Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Питербарг, Б. Стаматович, Грубая асимптотика вероятности одновременных высоких экстремумов двух гауссовских процессов: функционал двойного действия, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 1, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1398>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 02:46:29

**ГРУБАЯ АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТИ ОДНОВРЕМЕННЫХ
ВЫСОКИХ ЭКСТРЕМУМОВ ДВУХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ:
ФУНКЦИОНАЛ ДВОЙНОГО ДЕЙСТВИЯ**

В. И. ПИТЕРБАРГ, Б. СТАМАТОВИЧ

Рассмотрим два гауссовских процесса $X(t)$, $t \in T$, и $Y(t)$, $t \in S$, с почти наверное ограниченными траекториями, заданные на произвольных множествах T и S . Обозначим через $\sigma_X^2(t)$ и $\sigma_Y^2(t)$ дисперсии X и Y соответственно, через $r(t, s)$ – взаимную корреляционную функцию процессов X и Y и через $c(t, s) = \frac{\sigma_X(t)}{\sigma_Y(s)} \wedge \frac{\sigma_Y(s)}{\sigma_X(t)}$ – функцию мажорируемости. Для произвольного $D \subset T \times S$ рассмотрим минимум функционала двойного действия для X и Y ,

$$I(X, Y; D) = \inf_{(t,s) \in D} \frac{1}{(\sigma_X(t) \vee \sigma_Y(s))^2} \left(1 + \frac{(c(t, s) - r(t, s))^2}{1 - r(t, s)^2} \mathbf{I}_{r(t,s) < c(t,s)} \right). \quad (1)$$

Заметим, что в случаях $r = \pm 1$ деление 0 на 0 устранимо.

ТЕОРЕМА 1. *Если приведенные выше условия для гауссовских процессов X и Y выполнены, то для любого подмножества $D \subset T \times S$ имеет место соотношение*

$$\log \mathbb{P} \left(\bigcup_{(t,s) \in D} \{X(t) > u\} \cap \{Y(s) > u\} \right) \sim -\frac{1}{2} I(X, Y; D) u^2 \quad (2)$$

при $u \rightarrow \infty$. В частности,

$$\log \mathbb{P} \left(\sup_{t \in T} X(t) > u, \sup_{t \in S} Y(t) > u \right) \sim -\frac{1}{2} I(X, Y; T \times S) u^2$$

при $u \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$P_2(u) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{(t,s) \in D} \{X(t) > u\} \cap \{Y(s) > u\} \right).$$

Из свойств двумерного гауссовского распределения следует, что

$$\log P_2(u) \geq \sup_{(t,s) \in D} \log \mathbb{P}(X(t) > u, X(s) > u) \sim -\frac{1}{2} I(X, Y; D) u^2. \quad (3)$$

Введем функции

$$\begin{aligned} \alpha_{X,Y}(t, s) &= 1 - r(t, s)(r(t, s) \vee c(t, s)), \\ \beta_{X,Y}(t, s) &= r(t, s) \vee c(t, s) - r(t, s), \end{aligned} \quad (4)$$

$t, s \in T \times S$. Имеем для $\sigma(t) > 0$, $\sigma(s) > 0$:

$$\begin{aligned} \log P_2(u) &= \log \mathbb{P}(\exists (t, s) \in D : X(t) > u, X(s) > u) \\ &= \log \mathbb{P} \left(\exists (t, s) \in D : \frac{X(t)}{\sigma(t)} > \frac{u}{\sigma(t)}, \frac{X(s)}{\sigma(s)} > \frac{u}{\sigma(s)} \right) \\ &= \log \mathbb{P} \left(\exists (t, s) \in D : \frac{X(t)}{\sigma(t)} > \frac{u}{\sigma(t) \vee \sigma(s)}, \frac{X(s)}{\sigma(s)} > \frac{c(t, s)u}{\sigma(t) \vee \sigma(s)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \log P \left(\exists (t, s) \in D : \frac{\alpha(t, s)X(t)}{\sigma(t)} > \frac{\alpha(t, s)u}{\sigma(t) \vee \sigma(s)}, \frac{\beta(t, s)X(s)}{\sigma(s)} > \frac{\beta(t, s)c(t, s)u}{\sigma(t) \vee \sigma(s)} \right) \\
&\leq \log P \left(\exists (t, s) \in D : \frac{\alpha(t, s)X(t)}{\sigma(t)} + \frac{\beta(t, s)X(s)}{\sigma(s)} > \frac{\alpha(t, s)u}{\sigma(t) \vee \sigma(s)} + \frac{\beta(t, s)c(t, s)u}{\sigma(t) \vee \sigma(s)} \right) \\
&\leq \log P \left(\sup_{(t, s) \in D} \frac{(\sigma(t) \vee \sigma(s)) (\alpha(t, s)X(t)/\sigma(t) + \beta(t, s)X(s)/\sigma(s))}{\alpha(t, s) + \beta(t, s)c(t, s)} > u \right) \\
&\sim -\frac{u^2}{2} \left(\sup_{(t, s) \in D} E \left(\frac{(\sigma(t) \vee \sigma(s)) (\alpha(t, s)X(t)/\sigma(t) + \beta(t, s)X(s)/\sigma(s))}{\alpha(t, s) + \beta(t, s)c(t, s)} \right)^2 \right)^{-1} \\
&= -\frac{u^2}{2} \inf_{(t, s) \in D} \frac{(\alpha(t, s) + \beta(t, s)c(t, s))^2}{(\sigma(t) \vee \sigma(s))^2 E (\alpha(t, s)X(t)/\sigma(t) + \beta(t, s)X(s)/\sigma(s))^2} \\
&= -\frac{u^2}{2} \inf_{(t, s) \in D} \frac{1 - 2r(t, s)(r(t, s) \vee c(t, s)) + (r(t, s) \vee c(t, s))^2}{(1 - r^2(t, s))(\sigma(t) \vee \sigma(s))^2} \\
&= -\frac{1}{2} I(X, Y; D) u^2 \tag{5}
\end{aligned}$$

при $u \rightarrow \infty$, где использовался переход от квадранта к касательной полуплоскости, увеличивающий вероятность, и неравенство Ферника [1], из которого следует логарифмическая асимптотика для хвоста распределения максимума. Теорема доказана.

Из цепочки неравенств (5) получаем следующее полезное неравенство для произвольного $D \subset T \times S$,

$$\begin{aligned}
&P \left(\bigcup_{t, s \in D} \{X(t) > u\} \cap \{Y(s) > u\} \right) \\
&\leq P \left(\sup_{(t, s) \in D} \frac{(\sigma_X(t) \vee \sigma_Y(s)) (\alpha_{X,Y}(t, s)X(t)/\sigma_X(t) + \beta_{X,Y}(t, s)Y(s)/\sigma_Y(s))}{\alpha_{X,Y}(t, s) + \beta_{X,Y}(t, s)c(t, s)} > u \right), \tag{6}
\end{aligned}$$

которое является логарифмически асимптотически точным.

ПРИМЕР. Пусть $X(t)$, $t \in [0, T]$, – гауссовский процесс с нулевым средним и единичной дисперсией. Пусть $P(u, \varepsilon)$ – вероятность существования двух точек t и s , разделенных интервалом длины ε и таких, что $X(t) > u$, $X(s) > u$. Полагаем $D = \{|t - s| \geq \varepsilon\} \cap [0, T]$. В силу теоремы $P(u, \varepsilon) \sim -u^2 \inf_D (1 + r(t, s))^{-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] X. Fernique // Lecture Notes in Math. 1989. V. 1391. P. 66–73.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова;
Университет Черногории

Представлено А.В. Булинским
Принято редколлегией 23.11.2004