Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Плоские мультипликативные модули, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 1, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1399>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 15:22:56

ПЛОСКИЕ МУЛЬТИПЛИКАЦИОННЫЕ МОДУЛИ

А. А. ТУГАНБАЕВ

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Кольцо называется *инвариантным справа (слева)*, если все его правые (левые) идеалы являются идеалами. Выражения типа “инвариантное кольцо” означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Модуль M_A называется *плоским*, если для любого левого A -модуля L естественный групповой гомоморфизм $M \otimes_A L$ является мономорфизмом. Модуль M_A называется *мультипликативным*, если для каждого его подмодуля N существует такой идеал B кольца A , что $N = MB$. Идеал X кольца A называется *чистым слева*, если $x \in Xx$ для каждого элемента $x \in X$. Если X – подмножество модуля M_A , то $r(X)$ обозначает правый аннулятор множества X в A . Если M – мультипликативный модуль над коммутативным кольцом и идеал $r(M)$ чист, то M плосок [1]. Основной результат работы – теорема 1.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – инвариантное кольцо с коммутативным умножением идеалов и M – мультипликативный правый A -модуль. Если идеал $r(M)$ чист слева, то M плосок.

Модуль M_A называется модулем без H -кручения, если для любых $m \in M$ и $a \in A$ таких, что $ma = 0$, существуют такие $x_1, \dots, x_n \in M$ и $y_1, \dots, y_n \in A$, что $m = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ и $y_i a = 0$ для всех i .

ЛЕММА 2 [2; предложение 6.2, теорема 6.3]. Правый A -модуль M является плоским $\iff$ для любого левого идеала B кольца A естественный групповой эпиморфизм $M \otimes_A B \rightarrow MB$ является изоморфизмом $\iff M$ – модуль без H -кручения и $M(B \cap C) = MB \cap MC$ для любых левых идеалов B и C кольца A .

ЛЕММА 3. Пусть M – мультипликативный правый модуль над инвариантным справа кольцом A и идеал $r(M)$ чист слева.

- (1) M – модуль без H -кручения.
- (2) Если $M(B \cap C) = MB \cap MC$ для любых двух левых идеалов B и C кольца A , то M плосок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $m \in M$, $a \in A$ и $ma = 0$. Так как A инвариантно справа, то $Aa \subseteq aA \subseteq r(m)$. Поэтому $mAa = 0$. Так как M – мультипликативный модуль, то существует такой идеал B , что $MB = mA$. Тогда $MBa = mAa = 0$. Поэтому $Ba \subseteq r(M)$. Так как $MB = mA$, то существуют такие $x_1, \dots, x_n \in M$ и $b_1, \dots, b_n \in B$, что $m = \sum_{i=1}^n x_i b_i$. Так как $b_1 a, \dots, b_n a \in r(M)$, то по условию существуют такие $c_1, \dots, c_n \in r(M)$, что $c_i b_i a = b_i a$ ($i = 1, \dots, n$). Положим $y_i = (1 - c_i) b_i$. Так как $x_i c_i \in Mr(M) = 0$ ($i = 1, \dots, n$), то $m = \sum_{i=1}^n x_i (1 - c_i) b_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ и $y_i a = (1 - c_i) b_i a = b_i a - c_i b_i a = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

(2) Утверждение следует из (1) и леммы 2.

ЛЕММА 4 [3; с. 30]. Пусть M – правый A -модуль, X – левый A -модуль с семейством образующих $\{x_i\}_{i \in I}$ и $\{t_i\}_{i \in I}$ – такое подмножество модуля M , что почти все элементы t_i равны нулю. Тогда элемент $\sum_{i \in I} t_i \otimes x_i$ группы $M \otimes_A X$ равен нулю в точности тогда, когда существуют конечное множество $\{y_j\}_{j \in J} \subseteq M$ и множество $\{a_{ji}\}_{(j,i) \in J \times I} \subseteq A$ такие, что $a_{ji} = 0$ для почти всех (j, i) , $\sum_{i \in I} a_{ji} x_i = 0$ для всех $j \in J$ и $t_i = \sum_{j \in J} y_j a_{ji}$ для всех $i \in I$.

ЛЕММА 5. Пусть M – правый A -модуль и идеал $r(M)$ чист слева.

- (1) Для любого левого идеала B кольца A естественные групповые гомоморфизмы $M \otimes_A B \xrightarrow{f} M \otimes_A (B + r(M)) \xrightarrow{g} M \otimes_{A/r(M)} (B + r(M))/r(M)$ являются изоморфизмами. Кроме того, если естественный групповой эпиморфизм

- $M \otimes_{A/r(M)} (B + r(M))/r(M) \rightarrow M_{A/r(M)}(B + r(M))/r(M)$ – изоморфизм, то естественный групповой эпиморфизм $M \otimes_A B \rightarrow MB$ – изоморфизм.
- (2) Если $M_{A/r(M)}$ плосок, то M_A плосок.
- (3) Если A инвариантно справа и $M(B \cap C) = MB \cap MC$ для любых левых идеалов B и C кольца A , содержащих $r(M)$, то M_A плосок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $\sum_{i=1}^n m_i \otimes (b_i + c_i) \in M \otimes_A (B + r(M))$, где $m_i \in M$, $b_i \in B$ и $c_i \in r(M)$ для всех i . Так как идеал $r(M)$ чист слева, то существуют такие $d_i \in r(M)$, что $c_i = d_i c_i$ для всех i . Тогда $\sum_{i=1}^n m_i \otimes (b_i + c_i) = \sum_{i=1}^n m_i \otimes b_i + \sum_{i=1}^n m_i \otimes d_i c_i = \sum_{i=1}^n m_i \otimes b_i + \sum_{i=1}^n m_i d_i \otimes c_i = \sum_{i=1}^n m_i \otimes b_i + \sum_{i=1}^n 0 \otimes c_i = \sum_{i=1}^n m_i \otimes b_i$. Поэтому f – эпиморфизм. Докажем, что f – изоморфизм. Пусть α – естественный мономорфизм из B в $B + r(M)$ и $\sum_{i=1}^n m_i \otimes b_i \in M \otimes_A B$, где $m_i \in M$ и $b_i \in B$ для всех i . Тогда $f(\sum_{i=1}^n m_i \otimes b_i) = \sum_{i=1}^n m_i \otimes \alpha(b_i)$. Допустим, что $\sum_{i=1}^n m_i \otimes \alpha(b_i) = 0$. Положим $x_i = \alpha(b_i)$ при $i \in \{1, \dots, n\}$. Существует такое множество I , что $\{1, \dots, n\} \subseteq I$ и $B + r(M) = \{x_i\}_{i \in I}$. Положим $m_i = 0$ при $i \in I \setminus \{1, \dots, n\}$. Тогда элемент $\sum_{i \in I} m_i \otimes x_i$ группы $M \otimes_A (B + r(M))$ равен нулю. По лемме 4 существуют конечное множество $\{y_j\}_{j \in J} \subseteq M$ и множество $\{a_{ji}\}_{(j,i) \in J \times I} \subseteq A$ такие, что $a_{ji} = 0$ для почти всех (j, i) , $\sum_{i \in I} a_{ji} x_i = 0$ для всех $j \in J$ и $m_i = \sum_{j \in J} y_j a_{ji}$ для всех $i \in I$. Тогда $\sum_{i=1}^n m_i \otimes b_i = \sum_{i \in I} m_i \otimes b_i$, $\sum_{i \in I} a_{ji} b_i = 0$ для всех $j \in J$ и элемент $\sum_{i=1}^n m_i \otimes b_i$ группы $M \otimes_A B$ равен $\sum_{i \in I} (\sum_{j \in J} y_j a_{ji}) \otimes b_i = \sum_{j \in J} y_j \otimes (\sum_{i \in I} a_{ji} b_i) = 0$. Поэтому f – изоморфизм. Непосредственно проверяется, что g – изоморфизм. Таким образом, в естественной коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A B & \xrightarrow{gf} & M \otimes_{A/r(M)} (B + r(M))/r(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ MB & \longrightarrow & M(B + r(M)) \end{array}$$

верхняя стрелка – изоморфизм. Кроме того, очевидно, что нижняя стрелка – изоморфизм. Поэтому если правая стрелка этой диаграммы – изоморфизм, то и левая стрелка $M \otimes_A B \rightarrow MB$ – изоморфизм.

- (2) Утверждение следует из (1) и леммы 2.
- (3) По лемме 3(2) $M_{A/r(M)}$ плосок. По (2) M_A плосок.

ЛЕММА 6 [4]. Пусть A – кольцо с коммутативным умножением правых идеалов и M – мультипликативный правый A -модуль. Тогда $\bigcap_{i \in I} (MB_i) = M[\bigcap_{i \in I} (B_i + r(M))]$ для каждого непустого набора правых идеалов $\{B_i\}_{i \in I}$ кольца A .

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1. По лемме 6 $M(B \cap C) = MB \cap MC$ для любых левых идеалов B и C из A . По лемме 5(3) M плосок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. G. Naoum // Period. Math. Hungar. 1990. V. 21. № 4. P. 309–317. [2] A. A. Tuganbaev. Semidistributive Modules and Rings. Dordrecht: Kluwer, 1998. [3] B. Stenström. Rings of Quotients: An Introduction to Methods of Ring Theory. New York: Springer-Verlag, 1975. [4] A. A. Tuganbaev // J. Math. Sci. 2004. V. 123. № 2. P. 3839–3905.

Московский энергетический институт
(технический университет)
E-mail: askar@tuganbaev.mcsme.ru

Представлено А. В. Михалевым
Принято редколлегией 23.11.2004