Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Крылов, Г. А. Эль, Стохастическое описание конечнозонных потенциалов,
УМН, 1999, том 54, выпуск 2, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm140>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:00:03

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОНЕЧНОЗОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

А. Л. КРЫЛОВ, Г. А. ЭЛЬ

Вводится понятие стохастической солитонной решетки, как случайного процесса, реализациями которого являются конечнозонные потенциалы уравнения Шрёдингера. Изучается эволюция этого процесса в соответствии с уравнением КдВ

Конечнозонные потенциалы уравнения Шрёдингера являются почти периодическими функциями [1], [2] и обладают поэтому естественной стохастической структурой [3]. Для g -зонного потенциала (эта структура) задается равномерным распределением на g -мерном торе.

1. Напомним, что солитонными решетками [2] называют (квази)периодические решения нелинейных уравнений, в частности, g -зонные потенциалы уравнения Шрёдингера, выражающиеся через тета-функцию Якоби на гиперэллиптической поверхности рода g : $\mu^2 = \prod_{j=1}^{2g+1} (\lambda - r_j)$,

$$(1) \quad u_g(x; \mathbf{r}) = C(\mathbf{r}) - 2\partial_{xx}^2 \ln \Theta(x | \mathbf{r}) = u_g(\mathbf{y}(x) | \mathbf{r}), \quad y_j(x) = k_j x + f_j, \quad f_j \pmod{2\pi}.$$

Здесь y_j – вещественные фазы, k_j – волновые числа, f_j – начальные угловые фазы. Функция $u_g(x | \mathbf{r})$ g -квазипериодична по x и задана рядом

$$(2) \quad u_g(x | \mathbf{r}) = \sum_j c_j e^{i(l_j x + h_j)},$$

где c_j, l_j, h_j – действительные числа и $-\pi < h_j \leq \pi$.

Эволюция начальных данных (1) согласно уравнению КдВ описывается линейным сдвигом на якобиане

$$(3) \quad u_g(x, t | \mathbf{r}) = u_g(y_1(x, t), \dots, y_g(x, t) | \mathbf{r}), \quad y_j(x, t) = k_j x + \omega_j t + f_j.$$

Солитонная решетка (2) называется модулированной, если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varepsilon x)$, $\varepsilon \ll 1$. Задача Коши для уравнения КдВ

$$(4) \quad u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad u(x, 0) = u_g(x | \mathbf{r}(\varepsilon x))$$

имеет решение $u(x, t) = u_g(x, t | \mathbf{r}(\varepsilon x, \varepsilon t))$, где $u_g(x, t | \mathbf{r})$ задается формулами (3), а эволюция параметров $\mathbf{r}(X, T)$, $X = \varepsilon x$, $T = \varepsilon t$ – уравнениями Уизема [2], [4]

$$(5) \quad \partial_T r_j + V_j(\mathbf{r}) \partial_X r_j = 0, \quad r_j(X, 0) = r_j(X), \quad j = 1, \dots, 2g + 1.$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Стохастической солитонной решеткой (ССР)* называется (случайный) процесс $\nu_g(x)$, порождаемый конечнозонным потенциалом (1) и заданный формулой $\nu_g(x | \mathbf{r}) = u_g(\dots k_j x + \phi_j \dots | \mathbf{r})$, где ϕ_j – независимые случайные величины, равномерно распределенные на $(-\pi, \pi]$. Очевидно, процесс $\nu_g(x | \mathbf{r})$ – эргодический. Разложение Стоуна–Колмогорова для $\nu_g(x)$ получается непосредственно из (2) заменой $h_j \rightarrow \theta_j$, где θ_j – равномерные на $(-\pi, \pi]$ некоррелированные распределения.

ТЕОРЕМА 1. *Рассмотрим КдВ (4) как уравнение, описывающее t -эволюцию однородного процесса $u(x, t)$, с начальными данными $u(x, 0) = \nu_g(x | \mathbf{r})$. Тогда $u(x, t) = \nu_g(x | \mathbf{r})$, т.е. ССР $\nu_g(x | \mathbf{r})$ являются стационарными точками для КдВ-эволюции.*

Модулированная ССР $\nu_g(x | \mathbf{r}(\varepsilon x))$ задается формулами (1), в которых $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varepsilon x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Civilian Research and Development Foundation for the Former Soviet Union and USA (CRDF) (грант № RM1-145).

ТЕОРЕМА 2. Эволюция модулированной ССР задается формулой

$$\nu_g(x, t | \mathbf{r}(X, T)) = u_g(\dots k_j x + \omega_j t + \phi_j, \dots | \mathbf{r}(X, T)),$$

где $\mathbf{r}(X, T)$ определяется уравнениями Уизема (5).

3. Прямые вычисления с учетом эргодичности дают для двух первых моментов величины $\tilde{\nu}_g(x | \mathbf{r}) = \nu_g(x | \mathbf{r}) - C(\mathbf{r})$ простые формулы (в некоторой естественной нормировке):¹:

$$\langle \tilde{\nu}_g(x | \mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{4\pi i}(\mathbf{k}, B\mathbf{k}), \quad \langle \tilde{\nu}_g^2(x | \mathbf{r}) \rangle = -\frac{1}{4\pi i}(\boldsymbol{\omega}, B\mathbf{k}).$$

4. Для уравнения Шрёдингера с почти периодическим потенциалом $q(x)$ в [5] введено число вращения $\alpha(\lambda)$, фактически совпадающее с плотностью состояний $\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi}\alpha(\lambda)$. Для конечно-зонного $q(x) = u_g(x | \mathbf{r})$ имеет место соотношение $\alpha(\lambda) = dp(\lambda)/d\lambda$, где $dp(\lambda)$ – квазиимпульс. Интегральная плотность состояний $N(\lambda)$ и полная интегральная плотность состояний $\nu = N(\infty)$ вводятся равенствами

$$N(\lambda) \equiv \int_{-\infty}^{\lambda} \rho(\lambda') d\lambda', \quad \nu \equiv N(\infty) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^g k_j.$$

Особенно важный смысл имеют эти величины для изучения асимптотического случая $g \gg 1$. При $k_j = O(g^{-1})$ равномерное распределение угловых фаз ϕ_j на T^g переходит в пуассоновское распределение линейных фаз $l_j \equiv \phi_j/k_j$ на $\mathbb{R}$ со средним значением ν . При $\nu \ll 1$ линейные фазы l_j дают асимптотические положения солитонов – этот случай соответствует “солитонной турбулентности” Захарова [6]. Случай большой полной интегральной плотности $\nu \gg 1$, $k_j = o(1)$ отвечает нормальному распределению линейных фаз. ССР является естественным средством описания “предела слабой дисперсии как детерминированного аналога турбулентности” (Лакс, [7]).

Авторы благодарны С. Венакидесу, С. А. Молчанову, С. П. Новикову и М. И. Фрейдлину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Новиков С. П. (ред.) Теория солитонов. Метод обратной задачи рассеяния. М.: Наука, 1980. [2] Дубровин Б. А., Новиков С. П. // УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 29–98. [3] Пастур Л. А., Фиготин А. Л. Случайные и почти периодические самосопряженные операторы. М.: Наука, 1991. [4] Flaschka H., Forest M. G., McLaughlin D. W. // Commun. Pure Appl. Math. 1980. V. 33. P. 739–784. [5] Johnson R., Moser J. // Commun. Math. Phys. 1982. V. 84. P. 403–438. [6] Захаров В. Е. // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 1012. [7] Lax P. D. // AMS/IP Stud. Adv. Math. 1997. V. 3. P. 53–64.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, Москва;
Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн РАН, Троицк, Московская обл.

Принято редколлегией
26.01.1999

¹Формула для $\langle \tilde{\nu}_g \rangle$ была указана авторам С. Венакидесом.