Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Б. Яровая, Предельная теорема для критического ветвящегося случайного блуждания на $\mathbb{Z}^d$ с одним источником, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 1, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1400>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 09:12:16

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ КРИТИЧЕСКОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ НА $\mathbb{Z}^d$ С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ

Е. Б. ЯРОВАЯ

Рассматривается симметричное ветвящееся случайное блуждание с непрерывным временем на решетке $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 1$) в предположении, что ветвление (т.е. рождение и гибель частиц) происходит в единственной точке (источнике). Здесь частица может с некоторой интенсивностью погибнуть или разделиться на произвольное число частиц. Если ветвления не произошло, то первоначальная частица продолжает случайное блуждание до следующего возвращения в источник. Предполагается, что каждая из новых частиц эволюционирует по тому же закону, независимо от остальных частиц и от всей предыстории.

Пусть $A := (a(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$ – матрица переходных интенсивностей (генератор) случайного блуждания, $a(x, y) \geq 0$ при $x \neq y$, $a(x, x) < 0$ и $\sum_y a(x, y) = 0$. Предполагается, что блуждание однородно по времени, пространственно однородно ($a(x, y) = a(0, y - x)$), симметрично ($a(x, y) = a(y, x)$) и неприводимо, т.е. все точки $y \in \mathbb{Z}^d$ достижимы, причем скачки имеют конечную дисперсию. Ветвящийся процесс в источнике $x_0 = 0$ задается с помощью инфинитезимальной производящей функции $f(u) := \sum_n b_n u^n$, где $b_n \geq 0$ при $n \neq 1$, $b_1 < 0$ и $\sum_n b_n = 0$. Некоторые результаты для простого случайного блуждания с процессом чистого размножения в источнике получены в работе [1].

Согласно локальной предельной теореме (см. [2; §7]), для рассматриваемого случайного блуждания переходные вероятности имеют следующую асимптотику: $p(t, x, y) \sim \gamma_d t^{-d/2}$ при $t \rightarrow \infty$, где γ_d – константа, зависящая от размерности решетки. Обозначим через $G_\lambda(x, y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, y) dt$ – функцию Грина случайного блуждания, представляющую собой преобразование Лапласа переходной вероятности $p(t, x, y)$ по t . Так как $G_\lambda(0, 0)|_{\lambda=0} < \infty$ при $d \geq 3$, то случайное блуждание транзитивно в размерностях $d \geq 3$ и возвратно в размерностях $d = 1, 2$. Пусть $\beta_c := 1/G_0(0, 0)$, тогда $\beta_c = 0$ при $d = 1, 2$ и $\beta_c > 0$ при $d \geq 3$. Предположим, что $\beta_r := f^{(r)}(1) < \infty$, где $r \in \mathbb{N}$, и $\beta := \beta_1$, т.е. число потомков частицы имеет конечные моменты всех порядков. Точка β_c является критической в том смысле, что асимптотическое поведение процесса различается при $\beta > \beta_c$, $\beta = \beta_c$ и $\beta < \beta_c$.

Обозначим через $\mu_t(y)$ число частиц в произвольном узле решетки $y \in \mathbb{Z}^d$ и через $\mu_t := \sum_y \mu_t(y)$ – общее число частиц на $\mathbb{Z}^d$. Асимптотическое поведение статистических моментов $m_n(t, x, y) := \mathbb{E}_x \mu_t^n(y)$ и $m_n(t, x) := \mathbb{E}_x \mu_t^n$ ($n \in \mathbb{N}$), где $\mathbb{E}_x$ обозначает математическое ожидание при условии $\mu_0(\cdot) = \delta_x(\cdot)$, исследовано в [3]. В случае $\beta > \beta_c$ при нормировке $e^{-\lambda_0 t}$ (показатель экспоненты λ_0 является корнем уравнения $\beta G_\lambda(0, 0) = 1$) случайные величины $\mu_t(y)$ и μ_t имеют предельное распределение при $t \rightarrow \infty$ [4].

Иная картина наблюдается в критическом случае, где имеет место нерегулярный, прогрессивный по номеру n рост моментов полного числа частиц при $t \rightarrow \infty$ (в том смысле, что $m_1^2 \ll m_2$, $m_2^2 \ll m_4$ и т.д.). Это свидетельствует о том, что поведение случайной величины μ_t не определяется поведением моментов при $t \rightarrow \infty$. По этой причине в критическом случае исследовалось асимптотическое поведение вероятности невырождения (выживания) популяции частиц $Q(t, x)$, а также вероятности $Q(t, x, 0)$ наличия частиц в источнике в момент времени t на $\mathbb{Z}^d$, которые удовлетворяют интегральным уравнениям

$$Q(t, x, y) = p(t, x, y) - \int_0^t p(t-s, x, 0) f(1 - Q(s, 0, y)) ds,$$

$$Q(t, x) = 1 - \int_0^t p(t-s, x, 0) f(1 - Q(s, 0)) ds.$$

Работа выполнена в рамках программы “Междисциплинарные научные проекты МГУ им. М.В. Ломоносова”, 2004 г. Предполагается использование моделей случайного блуждания с размножением и гибелью частиц в пространственно неоднородной среде в низких размерностях ($d \leq 3$) для исследования закономерностей миграции и деления клеточных популяций.

Следующие результаты сформулированы для ветвящегося случайного блуждания, стартующего из нуля.

ТЕОРЕМА 1. Если $\beta = \beta_c$, то $Q(t, 0, 0) \sim k_d u(t)$ и $Q(t, 0) \sim K_d v(t)$ при $t \rightarrow \infty$, где k_d, K_d – положительные константы, а функции u, v имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u(t) &= t^{-1/2}(\ln t)^{-1}, & v(t) &= t^{-1/4} & \text{при } d &= 1; \\ u(t) &= t^{-1}, & v(t) &= (\ln t)^{-1/2} & \text{при } d &= 2; \\ u(t) &= t^{-1/2}(\ln t)^{-1}, & v(t) &\equiv 1 & \text{при } d &= 3; \\ u(t) &= t^{-1}(\ln t), & v(t) &\equiv 1 & \text{при } d &= 4; \\ u(t) &= t^{-1}, & v(t) &\equiv 1 & \text{при } d &\geq 5. \end{aligned}$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ частица находится в источнике $x_0 = 0$, то из теоремы 1 вытекает условная предельная теорема о размере популяции частиц μ_t на $\mathbb{Z}^d$:

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\beta = \beta_c$, тогда для любого $z > 0$ на $\mathbb{Z}^d$ справедливо соотношение $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_0[e^{-z\mu(t)} | \mu(t) > 0] = 1 - \sqrt{1 - e^{-z}}$.

Если частица стартует из произвольного узла x решетки $\mathbb{Z}^d$, то результат теоремы 2 остается справедливым для размерностей $d = 1, 2$. В размерностях $d \geq 3$, даже при отсутствии гибели частиц ($b_0 = 0$) и делении на две частицы ($\beta_c = b_2$), утверждение теоремы 2 обобщается для произвольного x при любом $z > 0$ следующим образом:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x[e^{-z\mu_t} | \mu_t > 0] = \left(1 - \frac{G_0(x, 0)}{G_0(0, 0)}\right) e^{-z} + \frac{G_0(x, 0)}{G_0(0, 0)} (1 - \sqrt{1 - e^{-z}}).$$

При введении гибели частиц ($b_0 > 0$) в источнике получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Если $\beta = \beta_c$ и $d \geq 3$, то для любого $z > 0$ при каждом x справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x[e^{-z\mu_t} | \mu_t > 0] = \frac{\left(1 - \frac{G_0(x, 0)}{G_0(0, 0)}\right) e^{-z} + \frac{G_0(x, 0)}{G_0(0, 0)} \sqrt{\frac{\beta_c}{b_2}} (1 - \sqrt{1 - e^{-z}})}{1 - \frac{G_0(x, 0)}{G_0(0, 0)} \left(1 - \sqrt{\frac{\beta_c}{b_2}}\right)}.$$

Отметим, что в случае размерности $d = 1$ в статье [5] рассмотрена модель ветвящегося случайного блуждания, близкая к исследованной в данной работе. Автор выражает благодарность В. А. Ватутину за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. Б. Яровая // ТМФ. 1991. Т. 88. № 1. С. 25–30. [2] Ф. Спирер. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969. [3] S. Albeverio, L. V. Bogachev, E. B. Yarovaya // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. 1998. V. 326. № 8. P. 975–980. [4] Л. В. Богачев, Е. Б. Яровая // Докл. РАН. 1998. Т. 363. № 4. С. 439–442. [5] V. A. Topchii, V. A. Vatutin, E. B. Yarovaya // Teor. Imovir. ta Mat. Statist. 2003. V. 69. P. 158–172.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией 23.11.2004