Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Смирнов, Проективные орбиты редуктивных групп и многогранники Бриона, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 2, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1403>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 11:19:20

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ПРОЕКТИВНЫЕ ОРБИТЫ РЕДУКТИВНЫХ ГРУПП
И МНОГОГРАННИКИ БРИОНА

А. В. Смирнов

Пусть G – редуктивная комплексная алгебраическая группа. Рассмотрим множество пар (V, v) , где $G : V$ – конечномерное представление, $v \in V$ и линейная оболочка орбиты Gv совпадает с V . Введем на этом множестве частичный порядок следующим образом: будем говорить, что пара (W, w) доминирует пару (V, v) , и писать $(W, w) \succ (V, v)$, если существует такое G -эquivариантное линейное отображение $\pi: W \rightarrow V$, что $\pi(w) = v$ и соответствующее отображение $\tilde{\pi}: P(W) \rightarrow P(V)$ проективных пространств индуцирует конечный морфизм $\overline{G\langle w \rangle} \rightarrow \overline{G\langle v \rangle}$ (через $\langle u \rangle$ обозначается точка проективного пространства, определяемая вектором u).

Последнее условие эквивалентно тому, что $\overline{G\langle w \rangle} \cap P(\text{Ker } \pi) = \emptyset$.

Если $(W, w) \succ (V, v)$ и $(V, v) \succ (W, w)$, то будем называть пары (W, w) и (V, v) изоморфными. Очевидно, что пары (W, w) и (V, v) изоморфны тогда и только тогда, когда существует G -эquivариантный изоморфизм пространства W на V , переводящий w в v . Множество классов изоморфных пар обозначим через $\Gamma(G)$; класс изоморфных пар, содержащий пару (W, w) , – через $[W, w]$. Отношение доминирования индуцирует на $\Gamma(G)$ частичный порядок. Рассмотрим отношение эквивалентности на $\Gamma(G)$, порожденное отношением порядка. Классы эквивалентности будем называть связными компонентами множества $\Gamma(G)$.

ТЕОРЕМА 1. 1) Любая связная компонента множества $\Gamma(G)$ содержит конечное количество элементов и имеет наибольший и наименьший элементы.

2) Если элементы $[V, v]$ и $[W, w]$ лежат в одной связной компоненте, то стабильные подалгебры точек $\langle v \rangle$ и $\langle w \rangle$ сопряжены, а количество замкнутых орбит в многообразиях $\overline{G\langle w \rangle}$ и $\overline{G\langle v \rangle}$ одно и то же.

Тем не менее, G -многообразия $\overline{G\langle v \rangle} \subset P(V)$ и $\overline{G\langle w \rangle} \subset P(W)$ могут не быть изоморфны, даже если $(W, w) \succ (V, v)$. У этого имеется две причины: локальная и глобальная. Локальная заключается в том, что они могут иметь разные особенности, например, когда отображение $\tilde{\pi}$, ограниченное на $\overline{G\langle w \rangle}$, является морфизмом нормализации. Глобальная причина состоит в том, что стабилизаторы в группе могут отличаться (но в любом случае один стабилизатор является подгруппой конечного индекса в другом). С другой стороны, имеются примеры, когда $(W, w) \succ (V, v)$, $(W, w) \not\succeq (V, v)$, но $\overline{G\langle v \rangle} \simeq \overline{G\langle w \rangle}$.

На множестве $\Gamma(G)$ определена операция возведения в степень. А именно, положим $[V, v]^{\otimes n} = [V^{(n)}, v^{\otimes n}]$, где $V^{(n)}$ – линейная оболочка орбиты вектора $v^{\otimes n}$ в $V^{\otimes n}$. Как легко видеть, это определение корректно, а полученная операция согласована с частичным порядком.

Обозначим множество старших весов наибольшего элемента в классе эквивалентности пары (V, v) через $\Lambda(V, v)$ и рассмотрим множество $C(V, v) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda((V, v)^{\otimes n})/n$.

Напомним определение многогранника Бриона. Пусть X – G -инвариантный неприводимый конус в G -модуле V . Положим

$$\text{Bri}(X) = \{x \in X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{Z}_+, \lambda \in X(T) : x = \lambda/n, m_{\lambda^*, n}(X) \neq 0\},$$

где T – максимальный тор группы G , $X(T)$ – группа его весов, λ^* – вес, сопряженный весу λ (старший вес представления, сопряженного представлению со старшим весом λ), а $m_{\lambda, n}(X)$ – кратность вхождения неприводимого G -модуля $V_{(\lambda)}$ со старшим весом λ в $\mathbb{C}[X]_n$. В работе Бриона [1] доказывается, что $\text{Bri}(X)$ – выпуклый многогранник. Мы будем называть его *многогранником Бриона* конуса X . Для проективного многообразия $\tilde{X}$ положим $\text{Bri}(\tilde{X}) = \text{Bri}(X)$, где X – конус над $\tilde{X}$. Верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. 1) *Множество $C(V, v)$ зависит только от связной компоненты точки $[V, v]$.*

2) *Для некоторого n выполняется равенство $C(V, v) = \text{conv } \Lambda((V, v)^{\otimes n})/n$.*

3) $C(V, v) = \text{Bri}(\overline{G\langle v \rangle})$.

Доказательство опирается на описание многогранника Бриона через образ отображения момента [1]. Этот подход был использован автором при изучении многогранников Бриона нуль-конусов [2]. В случае сферических многообразий он позволяет описывать многогранники Бриона через сферические данные.

Автор выражает глубокую благодарность за постоянную помощь и вдохновляющие идеи своему научному руководителю, профессору Э.Б. Винбергу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] М. Brion // Lecture Notes in Math. 1987. V. 1296. P. 177–192. [2] А.В. Смирнов // Труды ММО. 2004. Т. 65. С. 230–252.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Представлено Э.Б. Винбергом
Принято редколлегией 25.01.2005