Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Булычева, О сходимости интервалов справедливых цен в модели с Европейскими опционами, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 2, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1404>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:15:27

О СХОДИМОСТИ ИНТЕРВАЛОВ СПРАВЕДЛИВЫХ ЦЕН В МОДЕЛИ С ЕВРОПЕЙСКИМИ ОПЦИОНАМИ

М. В. Булычева

Одна из популярных в современной финансовой математике моделей основана на рассмотрении всевозможных опционов-колл Европейского типа на некоторый актив с фиксированной датой исполнения. Более точно, пусть S_T – положительная случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, имеющая смысл цены некоторого финансового актива в момент времени T ; $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}_+$ – множество цен исполнения имеющихся на рынке опционов-колл Европейского типа на этот актив (владелец опциона получает сумму $(S_T - K)^+$ в момент T); $\varphi(K)$, $K \in \mathbb{K}$, – цена в момент 0 такого опциона (для простоты предполагаем, что безрисковая процентная ставка равна нулю). Эта модель была впервые рассмотрена в работах [1], [2]. Обзор литературы по данной модели можно найти в [3].

В настоящей работе данная модель рассматривается с точки зрения подхода, предложенного в [4]. Именно, в этой работе вводится условие отсутствия обобщенного арбитража (это усиление обычного понятия безарбитражности; последнее является слишком слабым в моделях с бесконечным числом активов, в частности, в нашей модели) и доказывается, что при $\mathbb{K} = \mathbb{R}_+$ модель удовлетворяет этому условию, если и только если

- (а) φ выпукла на $\mathbb{R}_+$;
- (б) $\varphi'_+(0) \geq -1$;
- (в) $\lim_{K \rightarrow \infty} \varphi(K) = 0$;
- (г) $\varphi'' \sim \text{Law} S_T$,

где φ'_+ обозначает правостороннюю производную, а φ'' обозначает вторую производную в смысле распределений (т.е. φ'' – это мера, определяемая формулой $\varphi''((a, b]) = \varphi'_+(b) - \varphi'_+(a)$) с соглашением $\varphi''(\{0\}) = \varphi'_+(0) + 1$, а знак “ $\sim$ ”, как обычно, обозначает эквивалентность мер.

Рассмотрим теперь платежное поручение $F = f(S_T)$, где $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая функция. В [4] определяется множество справедливых цен $I(F)$ платежного поручения F и доказывается, что если $\mathbb{K} = \mathbb{R}_+$, модель удовлетворяет условию отсутствия обобщенного арбитража и функция f ограничена снизу, то

$$I(F) = \begin{cases} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \varphi''(dx) \right\}, & \text{если } \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \varphi''(dx) < \infty, \\ \emptyset & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Предположение $\mathbb{K} = \mathbb{R}_+$ очень удобно с теоретической точки зрения, поскольку оно приводит к одноточечному множеству справедливых цен, но на практике $\mathbb{K}$ конечно (обычно оно состоит из 10–20 точек). В случае конечного $\mathbb{K}$ условие отсутствия обобщенного арбитража равносильно обычному условию безарбитражности, состоящему в том, что $A \cap L_+^0 = \{0\}$, где L_+^0 обозначает множество неотрицательных случайных величин на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, а

$$A = \left\{ \sum_{m=1}^M h_m ((S_T - K_m)^+ - \varphi(K_m)) : M \in \mathbb{N}, h_m \in \mathbb{R}, K_m \in \mathbb{K} \right\}$$

(с финансовой точки зрения, A – множество возможных прибылей, которые можно получить в данной модели). Далее, в случае конечного $\mathbb{K}$ множество $I(F)$ является интервалом с концевыми точками $C_*(F)$ и $C^*(F)$, где

$$C_*(F) = \sup\{x : \text{существует } X \in A \text{ такой, что } x - X \leq F \text{ P-п.н.}\},$$

$$C^*(F) = \inf\{x : \text{существует } X \in A \text{ такой, что } x + X \geq F \text{ P-п.н.}\}.$$

Возникает следующий естественный вопрос. *Предположим, что $(\mathbb{K}_n)_{n=1}^\infty$ – последовательность конечных подмножеств $\mathbb{R}_+$, “сходящаяся” к $\mathbb{R}_+$. При каких условиях на*

$F = f(S_T)$ имеет место сходимость $I_n(F) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I(F)$? Здесь $I_n(F)$ – интервал справедливых цен F в модели, основанной на $\mathbb{K}_n$, а $I(F)$ – интервал справедливых цен F в модели, основанной на $\mathbb{R}_+$, т.е. $I(F)$ задается формулой (1). При этом имеется в виду, что все “допредельные” модели и “предельная” модель заданы на одном и том же пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с одной и той же случайной величиной S_T и основаны на одной и той же функции $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ (так что в “допредельных” моделях используются ее сужения на $\mathbb{K}_n$). Этот вопрос имеет некоторое сходство с проблемами теории “больших” рынков (см. [5; гл. VI]), но существенное отличие от этой теории состоит в том, что у нас имеется “предельная” модель.

Прежде всего, необходимо конкретизировать сходимость $\mathbb{K}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{R}_+$. Естественно понимать эту сходимость в следующем смысле:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, \exists y \in \mathbb{K}_n: |y - x| < \varepsilon. \quad (2)$$

Основным результатом работы является приводимая ниже теорема. Для ее формулировки введем обозначения $Q = \text{Law } S_T$,

$$\underline{f}(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} Q\text{-ess inf}_{y: |y-x| < \varepsilon} f(y), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

$$\overline{f}(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} Q\text{-ess sup}_{y: |y-x| < \varepsilon} f(y), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где $Q\text{-ess inf}$ (соответственно $Q\text{-ess sup}$) – существенная нижняя (соответственно верхняя) грань по мере Q . (Функции $\underline{f}$ и $\overline{f}$ корректно заданы на носителе меры Q , а вне этого множества продолжим их произвольно, например, доопределяем нулем.)

ТЕОРЕМА. Пусть функция φ удовлетворяет условиям (a)–(d), выполнено условие (2), f ограничена снизу и существует $a > 0$ такое, что $f(S_T) \leq a + aS_T$ P -п.н. Тогда

$$I_n(F) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\mathbb{R}_+} \underline{f}(x) \varphi''(dx), \int_{\mathbb{R}_+} \overline{f}(x) \varphi''(dx) \right]$$

в том смысле, что левые концы $I_n(F)$ сходятся к $\int_{\mathbb{R}_+} \underline{f}(x) \varphi''(dx)$, а правые концы $I_n(F)$ сходятся к $\int_{\mathbb{R}_+} \overline{f}(x) \varphi''(dx)$.

Из этой теоремы можно вывести

СЛЕДСТВИЕ. В предположениях теоремы следующие условия эквивалентны:

- (a) $I_n(F) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I(F)$;
- (b) f является Q -существенно непрерывной, т.е. $\underline{f} = \overline{f}$ Q -п.н.;
- (c) f имеет Q -п.в. непрерывную модификацию, т.е. существует функция g такая, что $g = f$ Q -п.н. и g непрерывна Q -п.н.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Banz, M. Miller // J. Bus. 1978. V. 51. P. 653–672. [2] D. T. Breeden, R. H. Litzenberger // J. Bus. 1978. V. 51. № 4. P. 621–651. [3] J. Jackwerth // J. Derivatives. 1999. V. 7. № 2. P. 66–82. [4] A. S. Cherny. General arbitrage pricing model: probability and possibility approaches // Preprint, 2004; <http://mech.math.msu.su/~cherny>. [5] А. Н. Ширяев. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией 25.01.2005