Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Куркова, Граница Пуассона для однородных случайных блужданий,
УМН, 1999, том 54, выпуск 2, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm141>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:16:38

ГРАНИЦА ПУАССОНА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ

И. А. КУРКОВА

Мы исследуем инвариантную σ -алгебру и границу Пуассона для транзитных случайных блужданий в неограниченных областях целочисленной решетки. Введем необходимые определения. Рассмотрим однородную цепь Маркова $\mathcal{L}$ со счетным пространством состояний X , матрицей переходных вероятностей $(p_{\alpha\beta})$, $\alpha, \beta \in X$, и некоторым начальным распределением. Обозначим пространство путей цепи через $X^\infty = \{(\alpha_n)_{n=0}^\infty, \alpha_n \in X\}$ и вероятностную меру на нем через P . Предположим, что цепь неприводима, апериодична и транзитна. Введем функцию сдвига на пространстве путей: $T(\alpha_0, \alpha_1, \dots) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$. Множество $C \subset X^\infty$ назовем *инвариантным*, если $T^{-1}C = C$. Класс инвариантных множеств $\mathcal{C}$ образует σ -алгебру, которая называется *инвариантной σ -алгеброй*. Как только введена мера P на пространстве путей, мы можем рассмотреть счетный набор $\Delta = \{C_0, C_1, \dots\}$ непересекающихся инвариантных множеств положительной вероятности: все они, за исключением, быть может, одного C_0 , являются атомами, т.е. не содержат двух непересекающихся инвариантных подмножеств ненулевой вероятности; если присутствует C_0 не атом, то оно не содержит инвариантных атомов в качестве подмножеств; и $\sum_i P\{C_i\} = 1$. Разбиение Δ существенно единственно. Нам понадобится только его часть, состоящая из атомов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Фактор-пространство $(X^\infty, P)/\Delta$ пространства путей по разбиению Δ , соответствующему инвариантной σ -алгебре, называется *границей Пуассона* цепи $\mathcal{L}$.

Если разбиение Δ состоит из одного инвариантного множества, которое является атомом, то граница Пуассона называется *тривиальной*.

Найдем сначала границу Пуассона для двумерных случайных блужданий $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_3$ в плоскости $\mathbb{Z}^2$, в полуплоскости $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$ и в четверти плоскости $(\mathbb{Z}_+)^2$ соответственно. Блуждания максимально пространственно однородны. Это значит, что пространство состояний X может быть представлено как объединение конечного числа непересекающихся множеств: $X = \bigcup_r S_r$, таких, что для любого r и любых $\alpha, \beta \in S_r$ $p_{\beta, \alpha+(i,j)} = p_{\alpha, \alpha+(i,j)}$. Вероятности скачков $p_{\alpha, \alpha+(i,j)}$, $\alpha \in S_r$, обозначим через ${}^{(r)}p_{ij}$. Для цепи $\mathcal{L}_1$ предположим, что $\mathbb{Z}^2 = S \cup (\bigcup_{m=1}^k S^m)$, где $S^1, S^2, \dots, S^k$ конечны. Переходные вероятности ${}^{(r)}p_{ij}$ обозначим через p_{ij} и ${}^{(1)}p_{ij}, {}^{(2)}p_{ij}, \dots, {}^{(k)}p_{ij}$ соответственно. Для $\mathcal{L}_2$ $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z} = S \cup S'$, где $S = \{(i,j) : j > 0\}$ и $S' = \{(i,0)\}$. Вероятности скачков ${}^{(r)}p_{ij}$ для множеств S и S' обозначим через p_{ij} и p'_{ij} соответственно. Для $\mathcal{L}_3$ $(\mathbb{Z}_+)^2 = S \cup S' \cup S'' \cup \{(0,0)\}$, где $S = \{(i,j) : i, j > 0\}$, $S' = \{(i,0) : i > 0\}$ и $S'' = \{(0,j) : j > 0\}$. Вероятности скачков ${}^{(r)}p_{ij}$ обозначим соответственно через p_{ij} , p'_{ij} , p''_{ij} и p^0_{ij} . Предположим также, что цепи $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ неприводимые и апериодические, их скачки ограничены и есть соскок с границ за один шаг. Зафиксируем начальное состояние всех цепей в $(0,0)$. Введем векторы среднего сноса: $E = (E_x, E_y) = (\sum_{i,j} ip_{ij}, \sum_{i,j} jp_{ij})$, $E' = (E'_x, E'_y) = (\sum_{i,j} ip'_{ij}, \sum_{i,j} jp'_{ij})$ и $E'' = (E''_x, E''_y) = (\sum_{i,j} ip''_{ij}, \sum_{i,j} jp''_{ij})$. Мы будем рассматривать случай, когда $E_x \neq 0$ и $E_y \neq 0$ для $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_3$. Это влечет транзитность цепи $\mathcal{L}_1$. Необходимые и достаточные условия транзитности цепей $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_3$ при этом условии доказаны в [1]. Сформулируем основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Граница Пуассона цепи $\mathcal{L}_1$ тривиальна.

ТЕОРЕМА 2. Граница Пуассона цепи $\mathcal{L}_2$ тривиальна.

ТЕОРЕМА 3. Если для цепи $\mathcal{L}_3$ выполнено одно из условий:

- (1) $E_x > 0, E_y > 0$;
- (2) $E_x < 0, E_y < 0, E_x E'_y - E_y E'_x > 0, E_y E''_x - E_x E''_y < 0$;
- (3) $E_x < 0, E_y < 0, E_x E'_y - E_y E'_x < 0, E_y E''_x - E_x E''_y > 0$;
- (4) $E_x > 0, E_y < 0, E_x E'_y - E_y E'_x > 0$;

$$(5) \quad E_x < 0, \quad E_y > 0, \quad E_y E_x'' - E_x E_y'' > 0,$$

то ее граница Пуассона тривиальна. Если для цепи $\mathcal{L}_3$

$$(6) \quad E_x < 0, \quad E_y < 0, \quad E_x E_y' - E_y E_x' > 0, \quad E_y E_x'' - E_x E_y'' > 0,$$

то ее граница Пуассона состоит из двух точек. Одна из них совпадает почти наверное с множеством траекторий, которые бесконечно часто посещают S' , другая – с множеством траекторий, которые бесконечно часто посещают S'' .

Доказательство теорем 1–3 опирается на теорему Блэкуэлла, см. [2].

Приведем некоторые обобщения на случай большей размерности. Рассмотрим цепи $\mathcal{L}_4$ и $\mathcal{L}_5$, которые являются случайными блужданиями соответственно в $(\mathbb{Z}_+)^n$ и $(\mathbb{Z}_+)^k \times \mathbb{Z}^m$. Для набора $\Lambda \subset \{1, 2, \dots, n\}$ (соответственно $\Lambda \subset \{1, 2, \dots, k\}$) обозначим грань $B^\Lambda = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i > 0, i \in \Lambda, x_i = 0, i \notin \Lambda\} \subset (\mathbb{Z}_+)^n$ (соответственно $B^\Lambda = \{(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) : x_i > 0, i \in \Lambda, x_i = 0, i \notin \Lambda\} \subset (\mathbb{Z}_+)^k \times \mathbb{Z}^m$). Определим однородную марковскую цепь $\mathcal{L}_4$ (соответственно $\mathcal{L}_5$) с переходными вероятностями

$$p_{\alpha, \beta} = p(\Lambda, \beta - \alpha).$$

Таким образом, переходные вероятности зависят только от грани и от начальной точки. Снова предположим неприводимость, апериодичность этих цепей и ограниченность скачков. Обозначим через $E(\alpha)$ вектор среднего скачка за один шаг в состоянии α , тогда $E(\alpha) \equiv E_\Lambda$ при $\alpha \in B^\Lambda$. Выберем грань B^Λ , $\Lambda \neq \{1, 2, \dots, n\}$, для $\mathcal{L}_4$ (соответственно $B^\varnothing = \{(0, 0, \dots, 0, y_1, \dots, y_m)\}$ для $\mathcal{L}_5$). Через точку a этой грани проведем плоскость C^Λ размерности $n - |\Lambda|$ (соответственно k) перпендикулярно этой грани. Введем марковскую цепь $\mathcal{L}^\Lambda$ (соответственно $\mathcal{L}^\varnothing$) с пространством состояний C^Λ и матрицей переходных вероятностей

$$p_{\alpha, \beta}^\Lambda = p_{\alpha, \beta} + \sum_{\gamma \neq \beta} p_{\alpha, \gamma}, \quad \alpha, \beta \in C^\Lambda,$$

где суммирование осуществляется по всем $\gamma \in (\mathbb{Z}_+)^n$ (соответственно $\gamma \in (\mathbb{Z}_+)^k \times \mathbb{Z}^m$) таким, что прямая, соединяющая β и γ , перпендикулярна C^Λ . Эта конструкция рассмотрена в [3]. Будем говорить, что грань B^Λ эргодична, если цепь $\mathcal{L}^\Lambda$ эргодична. Если это так, обозначим через $\pi^\Lambda(\gamma)$ ее стационарные вероятности. Введем вектор $v^\Lambda = (v_1^\Lambda, v_2^\Lambda, \dots, v_n^\Lambda)$:

$$v_i^\Lambda = 0, \quad i \notin \Lambda, \quad v_i^\Lambda = \sum_{\gamma \in C^\Lambda} \pi^\Lambda(\gamma) E(\gamma), \quad i \in \Lambda.$$

Для цепи $\mathcal{L}_4$ обозначим границу грани B^Λ через $\partial B^\Lambda = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i = 0 \text{ для некоторого } i \in \Lambda\}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть для цепи $\mathcal{L}_4$ грань B^Λ , $\Lambda \neq \{1, 2, \dots, n\}$, эргодическая и все компоненты v_i^Λ вектора v^Λ при $i \in \Lambda$ положительны. Тогда множество траекторий, которые лишь конечное число раз посещают ∂B^Λ , имеет положительную вероятность и является атомом инвариантной σ -алгебры цепи $\mathcal{L}_4$.

ТЕОРЕМА 5. Предположим, что для цепи $\mathcal{L}_5$ вложенная цепь $\mathcal{L}^\varnothing$ эргодическая. Тогда граница Пуассона цепи $\mathcal{L}_5$ тривиальна.

Автор благодарит В. А. Малышева за постановку задачи, внимание и помощь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fayolle G., Malyshev V. A., Menshikov M. V. Topics in Constructive Theory of Markov Chains. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. [2] Blackwell D. // Ann. Math. Statist. 1955. V. 26. P. 654–658. [3] Malyshev V. A. // Adv. Appl. Probab. 1993. V. 25. P. 140–175.