Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, Трилинейные функциональные уравнения,
УМН, 2005, том 60, выпуск 2, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1410>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 12:32:51

ТРИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В. М. БУХШТАБЕР, Д. В. ЛЕЙКИН

Пусть $u_1, \dots, u_{k-1}, z \in \mathbb{C}^g$ и D — линейный дифференциальный оператор по z с постоянными коэффициентами. Оператору D ставится в соответствие k -линейный оператор $\mathcal{D}$ по формуле

$$\mathcal{D}(f_1, \dots, f_k)(u_1, \dots, u_{k-1}) = D[f_1(u_1 + z) \cdots f_{k-1}(u_{k-1} + z) f_k((u_1 + \dots + u_{k-1}) - z)]|_{z=0}.$$

Уравнение вида $\mathcal{D}(f_1, \dots, f_k) = 0$ называется k -линейным уравнением. В случае $k = 2$ эта конструкция дает известные билинейные операторы и уравнения Хироты, получившие важные приложения в теории интегрируемых систем. Трилинейные уравнения относятся к введенному в [1] классу многомерных векторных теорем сложения вида

$$\sum_{\ell} a_{\ell}(u) b_{\ell}(v) c_{\ell}(u + v) = 1.$$

Уравнение $\mathcal{D}(f_1, f_2, f_3)(u, v) = 0$ сводится к полиномиальному соотношению между логарифмическими производными функций $f_1(u)$, $f_2(v)$ и $f_3(u + v)$. Здесь мы получим такие соотношения для функций на многообразиях Якоби плоских алгебраических кривых.

Введем оператор

$$Q(D)(f_1, f_2, f_3)(u, v) = \frac{\mathcal{D}(f_1, f_2, f_3)(u, v)}{f_1(u) f_2(v) f_3(u + v)}.$$

Положим $D_k = \partial/\partial z_k$, где $z = (z_1, \dots, z_g)$. Пусть $g = 1$ и $\rho_i(z) = (\log f_i(z))'$. Тогда

$$\begin{aligned} Q(D_1) &= \rho_1(u) + \rho_2(v) - \rho_3(u + v), \\ Q(D_1^2) &= (\rho_1(u) + \rho_2(v) - \rho_3(u + v))^2 + \rho_1'(u) + \rho_2'(v) + \rho_3'(u + v). \end{aligned}$$

Общее решение функционального уравнения $Q(D_1) = 0$ дается линейными функциями ρ_i , т.е. $f_i(z) = \exp(\alpha(z - \beta_i)^2 + \gamma_i)$, где α , β_i и γ_i — постоянные, причем $\beta_1 + \beta_2 = \beta_3$. Частное решение функционального уравнения $Q(D_1^2) = 0$ было получено Г. Фробениусом и Л. Штикельбергером [2]. Оно было применено к точно решаемым задачам квантовой механики [3]. Общее решение этого функционального уравнения описано в [4]. Функции f_i задают волновую функцию основного состояния для квантовой задачи трех тел. В случае общего положения решение представляет собой функции вида $\rho_i(z) = \zeta(z - \delta_i) - \beta_i$, т.е. $f_i(z) = e^{-\beta_i z + \gamma_i} \sigma(z - \delta_i)$, где $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ — эллиптические функции Вейерштрасса и β_i , γ_i и δ_i — постоянные, причем $\beta_1 + \beta_2 = \beta_3$, $\delta_1 + \delta_2 = \delta_3$. Отметим еще нормированное частное решение $f_i(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} \exp\left(-\frac{(z - q_i)^2}{2\Delta^2}\right)$, где q_i — постоянные и $\Delta = (q_1 + q_2 - q_3)/\sqrt{3}$.

Теория трилинейных уравнений для целых функций $f_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, опирается на следующие результаты.

ЛЕММА 1. Пусть для некоторого N имеет место разложение

$$f_1(u + z) f_2(v + z) f_3((u + v) - z) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(u, v) \psi_k(z).$$

Тогда для любого набора линейных дифференциальных операторов $L_1, \dots, L_{N+1}$ существует нетривиальный набор констант $c_1, \dots, c_{N+1}$ такой, что $Q(D)(f_1, f_2, f_3) = 0$ для оператора $D = \sum_{i=1}^{N+1} c_i L_i$.

Для g -мерных тета-функций первого порядка и родственных им функций разложение из леммы 1 существует при $N = 3^g$. Например, если $f_1 = f_2 = f_3 = \sigma$, то для $g = 1$ имеем $(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \sigma^3(1, \wp, \wp')$, а для $g = 2$ имеем $(\psi_1, \dots, \psi_9) = \sigma^3(1, \wp_{i,j}, \wp_{i,j,k}, \wp_{2,2\wp_{1,1} - \wp_{1,2}^2}, 1 \leq i \leq j \leq k \leq 2)$, где $\wp_{i,j,\dots}(z) = -\partial_{z_i, z_j, \dots} \log \sigma(z)$, см. [5].

ЛЕММА 2. Пусть $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^g$ – некоторое гладкое, регулярное при $\xi = 0$ отображение и $G(\xi)$ – мероморфная функция в окрестности $\xi = 0$. Образует функцию

$$F(u, v, \xi) = G(\xi)f_1(u + \phi(\xi))f_2(v + \phi(\xi))f_3((u + v) - \phi(\xi)).$$

Тогда, если в разложении $F(u, v, \xi)$ по степеням ξ коэффициент при ξ^k для некоторого k равен нулю, то $Q(D)(f_1, f_2, f_3) = 0$ для соответствующего оператора D .

Следующий результат – ключевой для приложений леммы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть σ – сигма-функция, ассоциированная с плоской алгебраической кривой

$$V = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^n - x^s - \sum_{ns - in - js > 0} \lambda_{ns - in - js} x^i y^j = 0 \right\}, \quad \text{где } (n, s) = 1.$$

Тогда имеет место формула

$$\sigma(u)\sigma(v)\sigma(u+v)R_{3g}(x, y) = c\psi^{-3}(x, y)\sigma(u + A(x, y))\sigma(v + A(x, y))\sigma(u + v - A(x, y)),$$

где $R_{3g}(x, y)$ – целая функция на V , задающая закон сложения на $\text{Sym}^g(V)$, см. [6], c – константа, $A: V \rightarrow \text{Sym}^g(V)$ – отображение Абеля и

$$\psi(x, y) = \exp \left\{ - \int_{\infty}^{(x, y)} \langle A^*(x', y'), dA(x', y') \rangle \right\}.$$

Здесь A^* – ассоциированное с A отображение, задаваемое абелевыми интегралами второго рода.

Лемма 2 и теорема 3 в сочетании с теоремой Вейерштрасса о пробелах приводят к теоремам сложения, характеризующим сигма-функции на якобианах.

ТЕОРЕМА 4. Наименьший порядок линейного дифференциального оператора D такого, что $Q(D)(\sigma, \sigma, \sigma)(u, v) = 0$, равен $g + 1$, где $g = (n - 1)(s - 1)/2$ – род кривой V .

Например, при $(n, s) = (2, 3)$ имеем: $g = 1$ и оператор наименьшего порядка $D = D_1^2$; при $(n, s) = (2, 5)$ имеем: $g = 2$ и, соответственно, $D = 2D_1 + D_2^3$. Положим $\rho_i^{(j, k)}(z) = \partial^{j+k} \log f_i(z) / \partial z_1^j \partial z_2^k$. Тогда

$$Q(2D_1 + D_2^3) = 2r_{(1,0)} + r_{(0,3)} + 3r_{(0,2)}r_{(0,1)} + r_{(0,1)}^3,$$

где $r_{(j,k)} = \rho_1^{(j,k)}(u) + \rho_2^{(j,k)}(v) + (-1)^{j+k} \rho_3^{(j,k)}(u + v)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. M. Buchstaber, I. M. Krichever // Internat. Math. Res. Notices. 1996. V. 10. P. 505–513. [4] V. M. Buchstaber, A. M. Perelomov // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1996. V. 175. P. 15–34. [6] V. M. Buchstaber, D. V. Leykin // J. Nonlinear Math. Phys. 2005. V. 12. Suppl. 1. P. 106–123. [5] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin // Rev. Math. Math. Phys. 1997. V. 10. № 2. P. 3–120. [3] F. Calogero // Lett. Nuovo Cimento. 1976. V. 16. P. 77–80. [2] G. Frobenius, L. Stickelberger // J. Reine Angew. Math. 1880. V. 88. P. 146–184.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Институт магнетизма, Киев, Украина
E-mail: buchstab@mendeleev.ru; dile@imag.kiev.ua

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией 11.02.2004