Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ф. Вернер, А. С. Холево, М. Е. Широков, О понятии сцепленности в гильбертовых пространствах, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 2, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1411>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:44:14

О ПОНЯТИИ СЦЕПЛЕННОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Р. Ф. ВЕРНЕР, А. С. ХОЛЕВО, М. Е. ШИРОКОВ

Оператор плотности (состояние) в тензорном произведении $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ гильбертовых пространств называется *разделимым*, если он принадлежит выпуклому замыканию подмножества состояний-произведений. Неразделимые состояния называются *сцепленными* (entangled). Эти понятия имеют важное значение в квантовой теории информации, однако они подробно изучались только в конечномерном случае [1]. В этом сообщении дается общее интегральное представление для разделимых состояний и впервые построен пример разделимого состояния, которое не является счетно разложимым. Мы также доказываем структурную теорему для квантовых каналов, разрушающих сцепленность (entanglement-breaking), которая обобщает конечномерный результат из [2]. В конечномерном случае такие каналы могут быть охарактеризованы как имеющие представление Стайнспринга–Крауса (3) с операторами V_j ранга 1. Пример не счетно разделимого состояния показывает существование бесконечномерных каналов, разрушающих сцепленность, которые не имеют такого представления.

В дальнейшем $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \dots$ – сепарабельные гильбертовы пространства, $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ – банахово пространство ядерных операторов и $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – выпуклое множество всех операторов плотности в $\mathcal{H}$. Для краткости мы называем их *состояниями*, подразумевая, что оператор плотности ρ однозначно задает нормальное состояние на алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ с расстоянием, определяемым следовой нормой, является полным сепарабельным метрическим пространством. Если π – борелевская вероятностная мера на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, то интеграл Бохнера

$$\bar{\rho}(\pi) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} \sigma \pi(d\sigma) \quad (1)$$

определяет состояние, называемое *барицентром* меры π .

Следующая лемма, которая усиливает утверждение о разложении Шоке для случая замкнутых выпуклых подмножеств $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, доказывается с использованием критерия компактности семейств вероятностных мер на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ [3]. Мы обозначаем $\overline{\text{co}}\mathcal{A}$ выпуклое замыкание множества $\mathcal{A}$ [4].

ЛЕММА. Пусть $\mathcal{A}$ – замкнутое подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Тогда $\overline{\text{co}}\mathcal{A}$ совпадает с множеством барицентров всех борелевских вероятностных мер с носителем $\mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Состояние в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ называется *разделимым*, если оно принадлежит выпуклому замыканию подмножества всех состояний-произведений $\rho \otimes \sigma$, где $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{K})$. Состояние называется *сцепленным*, если оно не разделимо.

В данном определении множество всех состояний-произведений можно заменить на подмножество всех чистых состояний-произведений (крайних точек множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$). Подмножество $\mathfrak{P}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ чистых состояний замкнуто в топологии следовой нормы. Поэтому из леммы следует, что состояние ρ является разделимым тогда и только тогда, когда существует борелевская вероятностная мера μ на $\mathfrak{P}(\mathcal{H}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{K})$ такая, что

$$\rho = \int_{\mathfrak{P}(\mathcal{H})} \int_{\mathfrak{P}(\mathcal{K})} |\varphi\rangle\langle\varphi| \otimes |\psi\rangle\langle\psi| \mu(d\varphi d\psi). \quad (2)$$

В конечномерном случае в силу теоремы Каратеодори данное представление сводится к известному определению разделимого состояния как конечной выпуклой комбинации чистых состояний-произведений [1]. В общем случае назовем состояние *счетно разложимым*, если для него существует представление (2) с чисто атомической мерой μ .

Канал – это линейное сохраняющее след отображение из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ такое, что двойственное отображение $\Phi^*: \mathfrak{B}(\mathcal{H}') \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ (которое существует, поскольку Φ ограничено) является вполне положительным. Для любого канала существует (неединственное) представление Стайнспринга–Крауса

$$\Phi(\rho) = \sum_j V_j \rho V_j^*, \quad (3)$$

в котором V_j – ограниченные операторы из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}'$ такие, что $\sum_j V_j^* V_j = I$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Канал Φ называется *каналом, разрушающим сцепленность*, если для любого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и любого состояния $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ состояние $(\Phi \otimes \text{Id}_{\mathcal{H}})(\omega)$, где $\text{Id}_{\mathcal{H}}$ – тождественный канал в $\mathcal{H}$, является разделимым.

ТЕОРЕМА 1. Канал Φ является каналом, разрушающим сцепленность, тогда и только тогда, когда существует полное сепарабельное метрическое пространство $\mathcal{X}$, борелевская $\mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ -значная функция $x \mapsto \rho'(x)$ и разложение единицы (положительная операторно-значная мера) $M(dx)$ на $\mathcal{X}$ такие, что

$$\Phi(\rho) = \int_{\mathcal{X}} \rho'(x) \mu_{\rho}(dx), \quad (4)$$

где $\mu_{\rho}(B) = \text{Tr } \rho M(B)$ для любого борелевского множества $B \subseteq \mathcal{X}$.

Доказательство использует обобщение известного соответствия между вполне положительными отображениями и состояниями в $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}$ [5].

Если существует представление (4) с чисто атомической мерой $M(dx)$, то канал Φ называется *счетно разложимым*. Нетрудно убедиться, что канал является счетно разложимым тогда и только тогда, когда для него существует представление (3) с операторами V_j ранга 1. С другой стороны, канал является счетно разложимым тогда и только тогда, когда состояния в $(\Phi \otimes \text{Id}_{\mathcal{H}})(\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}))$ счетно разложимы. Это сводит вопрос о существовании канала, разрушающего сцепленность, но не имеющего представления (3) с операторами ранга 1, к вопросу о существовании разделимого состояния, которое не является счетно разложимым. Ниже приведена конструкция такого состояния.

Рассмотрим одномерный тор $\mathbb{T}$, параметризованный как интервал $[0, 2\pi)$ со сложением $\text{mod } 2\pi$. Пусть $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T})$ с нормированной мерой Лебега $\frac{dx}{2\pi}$. Рассмотрим унитарное представление $x \rightarrow V_x$ группы $\mathbb{T}$, где $(V_u \psi)(x) = \psi(x - u)$.

ТЕОРЕМА 2. Для любых векторов состояний $|\varphi_j\rangle \in \mathcal{H}_j \simeq L^2(\mathbb{T})$, $j = 1, 2$, с отличными от нуля коэффициентами Фурье разделимое состояние

$$\rho_{12} = \int_0^{2\pi} V_x^{(1)} |\varphi_1\rangle \langle \varphi_1| V_x^{(1)*} \otimes V_x^{(2)} |\varphi_2\rangle \langle \varphi_2| V_x^{(2)*} \frac{dx}{2\pi}$$

в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ не является счетно разложимым.

СЛЕДСТВИЕ 1. Существует канал, разрушающий сцепленность, не представимый в виде (3) с операторами V_j ранга 1.

Доказательство состоит в явном построении, опирающемся на пример теоремы 2 и соответствия между вполне положительными отображениями и состояниями в тензорном произведении пространств. Имеется гипотеза, что не счетно разложимые состояния образуют плотное подмножество во множестве всех разделимых состояний. В пользу этого говорит следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2. В любой окрестности произвольного чистого состояния-произведения найдутся разделимые состояния, которые не счетно разложимы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. F. Werner. Quantum Information Theory – an Invitation // Springer Tracts Modern Phys., V. 173, 2001; e-print quant-ph/0101061. [2] M. Horodecki, P. W. Shor, M. B. Ruskai // Rev. Math. Phys. 2003. V. 15. P. 629–641; e-print quant-ph/0302031. [3] А. С. Холево, М. Е. Широков // Теория вероятн. и ее примен. 2005 (to appear); e-print quant-ph/0408176. Т. 50. № 1. [4] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. [5] M.-D. Choi // Linear Algebra Appl. 1975. V. 10. P. 285–290.

Institute of Mathematical Physics, TUB,
Braunschweig, Germany;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: holevo@mi.ras.ru, msh@mi.ras.ru

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией 15.03.2005