Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Висков, О формуле Швингера для скалярного произведения, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 2, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1412>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:29:56

О ФОРМУЛЕ ШВИНГЕРА ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

О. В. Висков

Фиксируем натуральное число s , и пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_s)$ — два набора переменных, которые в дальнейшем будем рассматривать как векторы-строки. Для произвольной постоянной $(s \times s)$ -матрицы $A = \|A_{i,j}\|$ обозначим (как это и сделано в [1])

$$S(A, x, y) = xAy^T = \sum_{i,j=1}^s x_i A_{i,j} y_j,$$

где символ T (здесь и в дальнейшем) означает операцию транспонирования.

Формула Швингера для скалярного произведения может быть записана в следующем виде (ср. с теоремой 4.1 в [1]):

ТЕОРЕМА 1 (Schwinger's Master Theorem). *Если произвольные постоянные $(s \times s)$ -матрицы A и B таковы, что матрица $I - AB$ обратима, то справедливо равенство*

$$\exp\{S(A, \partial_x, \partial_y)\} \exp\{S(B^T, x, y)\}|_{x=y=0} = \det(I - AB)^{-1}, \quad (1)$$

где $\partial_x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_s)$, $\partial_y = (\partial/\partial y_1, \partial/\partial y_2, \dots, \partial/\partial y_s)$ и символом I обозначена единичная матрица.

Справедливость равенства (1) для *кососимметрических* матриц A и B была установлена (без строгого доказательства) Швингером в отчете [2], опубликованном лишь много лет спустя в сборнике [3]. В [1] и [4] обсуждается связь соотношения (1) с имеющей фундаментальное значение в перечислительной комбинаторике Главной (Master) теоремой Макмагона [5] и с построением неэквивалентных неприводимых унитарных представлений общей унитарной группы.

Докажем, что справедливо следующее, обобщающее теорему 1, утверждение:

ТЕОРЕМА 2. *Если произвольные постоянные $(s \times s)$ -матрицы A и B таковы, что матрица $I - BA^T$ обратима, то имеет место тождество*

$$\exp\{S(A, \partial_x, \partial_y)\} \exp\{S(B, x, y)\} = \det(C) \exp\{S(CB, x, y)\}, \quad (2)$$

где $C = (I - BA^T)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем параметр t и обозначим

$$u = \exp\{tS(A, \partial_x, \partial_y)\} \exp\{S(B, x, y)\}. \quad (3)$$

Ясно, что введенная соотношением (3) функция u является решением следующей задачи Коши:

$$u_t = \sum_{i,j=1}^s A_{i,j} u_{x_i} y_j, \quad u|_{t=0} = \exp\{S(B, x, y)\}. \quad (4)$$

Будем искать решение задачи (4) в виде

$$u = \exp\{\alpha + S(\beta, x, y)\}, \quad (5)$$

где α и элементы $\beta_{i,j}$ $(s \times s)$ -матрицы $\beta = \|\beta_{i,j}\|$ — искомые функции параметра t .

Нетрудно проверить, что подстановка (5) в уравнение (4) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \beta'_{m,n} &= \sum_{i,j=1}^s \beta_{m,j} A_{i,j} \beta_{i,n}, & \beta_{m,n}|_{t=0} &= B_{m,n}, & m, n &= 1, 2, \dots, s; \\ \alpha' &= \sum_{i,j=1}^s \beta_{i,j} A_{i,j}, & \alpha|_{t=0} &= 0, \end{aligned}$$

которые удобно переписать в матричной форме

$$\beta' = \beta A^T \beta, \quad \beta|_{t=0} = B, \quad (6)$$

$$\alpha' = \text{Tr}(\beta A^T), \quad \alpha|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

В (7) (как и далее) символом $\text{Tr}(\cdot)$ обозначен след матрицы $(\cdot)$.

Поскольку, как нетрудно убедиться, решение задачи (6) (по крайней мере при малых t) определяется соотношением

$$\beta = (I - BA^T t)^{-1} B, \quad (8)$$

то интегрирование уравнения (7) с учетом (8) приводит к равенству

$$\alpha = \text{Tr}\{-\ln(I - BA^T t)\}. \quad (9)$$

Из равенства (9) и тождества Якоби, утверждающего, что для любой матрицы $(\cdot)$

$$\det \exp(\cdot) = \exp \text{Tr}(\cdot),$$

видно, что

$$\exp \alpha = \det(I - BA^T t)^{-1}.$$

Таким образом, решение задачи (4) имеет вид

$$u = \det(I - BA^T t)^{-1} \exp\{S((I - BA^T t)^{-1} B, x, y)\}.$$

Для окончания доказательства теоремы остается лишь положить параметр t равным единице.

В заключение отметим, что из теоремы 2 вытекают новые тождества для используемых в квантовой физике (см. [6], [7]) полиномов $L_{\alpha, \beta}(A)$, определяемых экспоненциальной производящей функцией

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha, \beta} x^{\alpha} L_{\alpha, \beta}(A) y^{\beta} = \exp\{S(A, x, y)\}.$$

В этом соотношении использованы мультииндексные обозначения и внутреннее суммирование осуществляется по всем композициям α и β числа m в виде суммы s неотрицательных целых чисел. Следует иметь в виду также тождество (см., например, равенство (4.4) в [1])

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha, \beta} \alpha! \beta! L_{\alpha, \beta}(A) L_{\alpha, \beta}(B) = \det(I - AB)^{-1}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Y. C. Chen, J. D. Louck // Adv. Math. 1998. V. 140. № 2. P. 207–236. [2] J. Schwinger. On angular momentum // U.S. Atomic Energy Commission Report NYO-3071, 1952. [3] L. C. Biedenharn, H. van Dam (Eds.). Quantum Theory of Angular Momentum. New York: Academic Press, 1965. [4] W. Y. C. Chen, H. W. Galbraith, J. D. Louck // Comput. Math. Appl. 2001. V. 41. № 9. P. 1199–1214. [5] I. P. Goulden, D. M. Jackson. Combinatorial Enumeration. New York: Wiley, 1983. [6] J. D. Louck // J. Math. Phys. 1965. V. 6. P. 1786–1804. [7] J. D. Louck // Amer. J. Phys. 1970. V. 38. P. 3–42.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: viskov@mi.ras.ru

Представлено Д. В. Аносовым
Принято редколлегией 11.02.2005