Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М.-М. Деза, М. Дютур, М. И. Штогрин, Эллиптические полициклы с дырами,
УМН, 2005, том 60, выпуск 2, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1413>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 06:55:23

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПОЛИЦИКЛЫ С ДЫРАМИ

М. Деза, М. Дютур, М. И. Штогрин

Рассмотрим произвольный 2-связный локально конечный плоский граф G . Пусть

(i) степени всех вершин данного графа не превышают q , где q фиксировано, $q \geq 3$.

Пусть, далее, множество всех внутренних граней плоского графа G разбивается на два подмножества F_1 и F_2 , для которых выполнены следующие три дополнительные условия:

(ii) все грани из множества F_1 являются r -угольниками, где r фиксировано, $r \geq 3$;

(iii) все грани из множества F_2 попарно не пересекаются друг с другом; более того, никакая грань из множества F_2 не пересекается с внешней гранью плоского графа G ;

(iv) каждая вершина графа G , степень которой меньше q (она не меньше 2 в силу 2-связности), принадлежит либо грани из множества F_2 , либо же внешней грани графа G .

Тогда плоский граф G с присоединенными к нему гранями из множества F_1 назовем (r, q) -полициклом с дырами и обозначим через $P = P(G, F_1)$. Грани из множеств F_1 и $F_2 = F_2(F_1)$ назовем соответственно *гранями* и *дырами* полицикла P . Полицикл P имеет два типа ребер: *внутреннее* ребро принадлежит двум граням полицикла, *границное* ребро принадлежит одной грани полицикла. Все граничные ребра составляют *границу* полицикла P . Внутреннее ребро назовем *сквозным*, если оба его конца лежат на границе полицикла $P = P(G, F_1)$.

Полицикл назовем *элементарным*, если выполняется следующая альтернатива: либо у него нет сквозных ребер – он *простой*, либо у него есть сквозные ребра, но при разрезании сразу по всем сквозным ребрам полицикл остается связным – он *самосклеенный*.

Разрезанный по всем сквозным ребрам полицикл с дырами распадется на компоненты связности – простые элементарные полициклы. Неразрезанный полицикл остается связным; некоторые его элементарные *слагаемые* (см. [1]) могут быть самосклеены.

Ниже мы даем полное перечисление элементарных (r, q) -полициклов с дырами для всех *эллиптических* параметров (r, q) , т.е. $(r, q) = (3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)$. Общее число дыр полицикла, обозначим его через t , предполагается произвольным, $0 \leq t \leq \infty$.

Рис. 1. F_{16}

Рис. 2. E_{13}^*

Рис. 3. E_{13}^{**}

Рис. 4. E_{14}^*

Случай 1. При $t = 0$ все элементарные $(5, 3)$ -полициклы найдены в [1; табл. 1]. При $t = 1$ имеются четыре серии элементарных $(5, 3)$ -полициклов – одна серия простых $(5, 3)$ -полициклов F_{2n+4} , рис. 1, и три серии самосклеенных $(5, 3)$ -полициклов E_{2n+1}^* (дыра $(n+2)$ -угольна), E_{2n+1}^{**} (дыра $(n+5)$ -угольна) и E_{2n}^* , $n \in \mathbb{N}$, см. рис. 2, 3 и 4 соответственно; на рис. 2 и 3 внешняя грань и дыра поменялись ролями: самосклеенные полициклы E_{2n+1}^* и E_{2n+1}^{**} получаются при одном и том же отождествлении *открытых* (в смысле [1]) ребер (с концами степени 2) простого полицикла E_{2n+1} , взятого из [1; табл. 1], но у них разные укладки на плоскости (чего не было у обычных полициклов [1]–[3]). Имеются пять индивидуальных элементарных самосклеенных $(5, 3)$ -полициклов: C_1^* , C_2^* (дыра 4-угольна), C_2^{**} (дыра 6-угольна), C_3^* (дыра 3-угольна)¹, C_3^{**} (дыра 7-угольна)². Они получаются из простых полициклов C_1 , C_2 , C_3 , взятых из [1; табл. 1], при

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00170), Фонда поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2185.2003.1) и Программы ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

¹Имеется (не)счетное число (бес)конечных $(5, 3)$ -полициклов с элементарным слагаемым C_3^* .

²Число конечных $(5, 3)$ -полициклов с элементарным слагаемым C_3^{**} счетно. Бесконечных нет: локально конечный граф имеет лишь конечное число вершин и ребер в дыре полицикла C_3^{**} .

отождествлении их открытых ребер (с концами степени 2). При $t \geq 2$ элементарных $(5, 3)$ -полициклов не существует.

Случай 2. При $t = 0$ все элементарные $(3, 5)$ -полициклы найдены в [1; табл. 2]. При $t = 1$ имеются четыре серии элементарных $(3, 5)$ -полициклов – одна серия простых $(3, 5)$ -полициклов f_{2n+4} , рис. 5, и три серии самосклеенных $(3, 5)$ -полициклов e_{2n+3}^* (дыра $(n+2)$ -угольна), e_{2n+3}^{**} (дыра $(n+3)$ -угольна) и e_{2n+2}^* , $n \in \mathbb{N}$, см. рис. 6, 7 и 8. Один индивидуальный элементарный самосклеенный $(3, 5)$ -полицикл b_2^* получается из простого полицикла b_2 , взятого из [1; табл. 2], при отождествлении его *сильно открытых* (в смысле [1]) ребер (с концами степени 3). При $t \geq 2$ элементарных $(3, 5)$ -полициклов не существует.

Рис. 5. f_{16} Рис. 6. e_{15}^* Рис. 7. e_{15}^{**} Рис. 8. e_{16}^*

Случай 3. При $t = 0$ имеются 4 элементарных $(4, 3)$ -полицикла, в их состав входят: пять граней куба; четыре грани куба, инцидентные с одним ребром; три грани куба с одной общей вершиной; одна грань куба. При $t \geq 1$ элементарных $(4, 3)$ -полициклов нет.

Случай 4. При $t = 0$ имеем 4 элементарных $(3, 4)$ -полицикла, в их состав входят: семь граней октаэдра; шесть граней октаэдра, инцидентные с одним ребром; четыре грани октаэдра с одной общей вершиной; одна грань октаэдра. При $t \geq 1$ элементарных $(3, 4)$ -полициклов нет.

Случай 5. При $t = 0$ существуют два элементарных $(3, 3)$ -полицикла, в их состав входят: три грани тетраэдра; одна грань тетраэдра. При $t \geq 1$ элементарных $(3, 3)$ -полициклов нет.

ТЕОРЕМА. В случаях 1–5 перечислены все элементарные (r, q) -полициклы с дырами для всех эллиптических параметров (r, q) , т.е. $(r, q) = (3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)$.

Доказательство теоремы сводится к обоснованию полноты списка *ядер* (см. [1]) полициклов.

Каждый элементарный полицикл из вышеуказанных 8 серий является элементарным слагаемым лишь для себя самого, хотя E_{2n+1}^* , E_{2n+1}^{**} , F_{10} , e_{2n+3}^* , e_{2n+3}^{**} , f_6 расширяемы. Полициклы F_{2n+4} при $n \neq 3$, E_{2n}^* , f_{2n+4} при $n \neq 1$, e_{2n+2}^* нерасширяемы. Дыры в полициклах F_{10} , E_7^* , f_6 , e_5^* и C_1^* , b_2^* *устранимы* (каждую дыру можно заклеить своим³ r -угольником).

Число дыр неэлементарных $(5, 3)$ - и $(3, 5)$ -полициклов ничем не ограничено сверху. Число дыр $(4, 3)$ - и $(3, 4)$ -полициклов не больше 1. Неэлементарный $(4, 3)$ -полицикл с одной дырой представляет собою боковую поверхность m -призмы, $m \geq 3$; он нерасширяем при $m = 3$ и $m \geq 5$, *собственный* (см. [1]) при $m = 4$ и *гелицен* (см. [1]) при $m = 4 + 4n$, $n \in \mathbb{N}$. Неэлементарный $(3, 4)$ -полицикл с одной дырой представляет собою боковую поверхность m -антипризмы, $m \geq 3$; он нерасширяем при $m \geq 4$, *собственный* при $m = 3$ и *гелицен* при $m = 3 + 3n$, $n \in \mathbb{N}$. Все $(3, 3)$ -полициклы (их имеется всего лишь три) оказались без дыр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Деза, М. И. Штогрин // Труды МИАН. 2002. Т. 239. С. 127–145. [2] М. Деза, М. И. Штогрин // УМН. 1999. Т. 54. № 6. С. 159–160. [3] М. Деза, М. И. Штогрин // УМН. 2000. Т. 55. № 1. С. 179–180.

CNRS/ENS, Paris and Institute
of Statistical Mathematics, Tokyo;
ENS, Paris and Hebrew University, Jerusalem;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: Michel.Deza@ens.fr; Mathieu.Dutour@ens.fr; stogrin@mi.ras.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией 11.02.2005

³ Дыру полицикла E_7^{**} (e_5^{**}) можно заклеить двумя пятиугольниками (треугольниками).