Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, О формуле объема гиперболического тетраэдра,
УМН, 2005, том 60, выпуск 2, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1414>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 12:24:09

О ФОРМУЛЕ ОБЪЕМА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТЕТРАЭДРА

Д. А. ДЕРЕВНИН, А. Д. МЕДНЫХ

Введение. Вычисление объема многогранника в трехмерном пространстве является очень старой и трудной проблемой. Первый известный результат в этом направлении принадлежит Тарталье (1494 г.), который нашел объем евклидова тетраэдра. Сейчас этот результат известен как формула Кэли–Менгера. Недавно в [1] и [2] было показано, что объем любого евклидова многогранника является корнем алгебраического уравнения, коэффициенты которого зависят от длин ребер и полностью определяются комбинаторным типом многогранника.

В гиперболическом и сферическом пространствах ситуация более сложная. Формула объема для биортогонального тетраэдра в этих пространствах известна со времен Лобачевского и Шлефли [3]. Объем правильного тетраэдра в гиперболическом пространстве найден в [4]. Случай гиперболического тетраэдра с несколькими идеальными вершинами исследован в [3]. Формула объема для произвольного тетраэдра оставалась долгое время неизвестной. Общий алгоритм для нахождения такой формулы намечен в [5]. Полное решение проблемы получено совсем недавно несколькими авторами [6]–[8]. Все результаты представлены в виде комбинации 16 дилוגарифмических функций или функций Лобачевского, зависящих от двугранных углов тетраэдра и некоторых вспомогательных параметров, являющихся корнями достаточно сложного квадратного уравнения с комплексными коэффициентами. Геометрический смысл формулы Мураками–Яно [7] разъяснен в [9] с точки зрения так называемой симметрии Редже. Замечательное изложение этих идей и полное геометрическое доказательство формулы дано в работе [10].

Заметим, что формула для объема существенно упрощается в случае симметрического тетраэдра, т.е. тетраэдра, противоположные двугранные углы которого равны. Впервые это было обнаружено Милнором [11] для идеального тетраэдра. Позже в [12] было показано, что достаточно простая формула объема существует и для произвольного симметрического тетраэдра с собственными вершинами.

В настоящей работе предложена элементарная интегральная формула для объема гиперболического тетраэдра. При этом, объем выражается через простые геометрические характеристики, зависящие от двугранных углов тетраэдра. Формула удобна для реализации на компьютере, а результаты работ [6]–[8] получаются из нее как следствия.

Объем гиперболического тетраэдра. Пусть $T(A, B, C, D, E, F)$ – компактный гиперболический тетраэдр с двугранными углами A, B, C, D, E, F , выбранными таким образом, что углы A, B, C лежат при одной вершине, а углы D, E, F противолежат углам A, B, C соответственно.

ТЕОРЕМА 1. *Объем гиперболического тетраэдра $T = T(A, B, C, D, E, F)$ равен*

$$\text{Vol}(T) = -\frac{1}{4} \int_{z_1}^{z_2} \log \frac{\cos \frac{A+B+C+z}{2} \cos \frac{A+E+F+z}{2} \cos \frac{B+D+F+z}{2} \cos \frac{C+D+E+z}{2}}{\sin \frac{A+B+D+E+z}{2} \sin \frac{A+C+D+F+z}{2} \sin \frac{B+C+E+F+z}{2} \sin \frac{z}{2}} dz,$$

где z_1 и z_2 – корни подынтегрального выражения, определяемые формулами

$$z_1 = \arctg \frac{k_2}{k_1} - \arctg \frac{k_4}{k_3}, \quad z_2 = \arctg \frac{k_2}{k_1} + \arctg \frac{k_4}{k_3},$$

где

$$k_1 = -(\cos S + \cos(A + D) + \cos(B + E) + \cos(C + F) + \cos(D + E + F) + \cos(D + B + C) + \cos(A + E + C) + \cos(A + B + F)),$$

$$k_2 = \sin S + \sin(A + D) + \sin(B + E) + \sin(C + F) + \sin(D + E + F) + \sin(D + B + C) + \sin(A + E + C) + \sin(A + B + F),$$

$$k_3 = 2(\sin A \sin D + \sin B \sin E + \sin C \sin F),$$

$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2},$$

$$u \ S = A + B + C + D + E + F.$$

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант 03-51-3663) и РФФИ (гранты 03-01-00104, 02-01-22004a).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Суммы двугранных углов $V_1 = A + B + C$, $V_2 = A + E + F$, $V_3 = B + D + F$, $V_4 = C + D + E$ в числителе формулы объема и $H_1 = A + B + D + E$, $H_2 = A + C + D + F$, $H_3 = B + C + E + F$ в ее знаменателе имеют простой геометрический смысл. А именно, V_1, V_2, V_3, V_4 являются суммами двугранных углов при вершинах тетраэдра T , в то время как H_1, H_2 и H_3 — суммы углов вдоль гамильтоновых циклов T .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пределы интегрирования z_1 и z_2 удовлетворяют уравнению $k_1 \cos z + k_2 \sin z = k_3$, а $k_4^2 = -4 \det(G)$, где G — матрица Грама тетраэдра T . Геометрический смысл величин z_1 и z_2 может быть извлечен из результатов работы [10]. Они возникают как параметры разбиения идеального октаэдра на четыре идеальных тетраэдра с общим ребром. Октаэдр канонически определяется тетраэдром T , а его двугранные углы являются линейными комбинациями двугранных углов T .

Рассмотрим дилогарифмическую функцию, определенную следующим интегралом:

$$\text{Li}_2(x) = - \int_0^x \frac{\log(1-t)}{t} dt,$$

где $x \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$, а непрерывная ветвь $\log \xi = \log |\xi| + i \arg \xi$ определяется условиями $-\pi < \arg \xi < \pi$. Положим также $l(z) = \text{Li}_2(e^{iz})$.

Непосредственным следствием теоремы 1 является следующий результат, полученный ранее в [7] и [8].

СЛЕДСТВИЕ 1. Гиперболический объем тетраэдра T равен $\text{Im}(U(z_1, T) - U(z_2, T))/2$, где

$$\begin{aligned} U(z, T) = & (l(z) + l(A + B + D + E + z) + l(A + C + D + F + z) + l(B + C + E + F + z) \\ & - l(\pi + A + B + C + z) - l(\pi + A + E + F + z) \\ & - l(\pi + B + D + F + z) - l(\pi + C + D + E + z))/2. \end{aligned}$$

Для упрощения формулы Мураками-Яно заметим, что $\text{Im}(l(z)) = \text{Im}(\text{Li}_2(e^{iz})) = 2\Lambda(z/2)$, где $\Lambda(z)$ — функция Лобачевского, определенная интегралом

$$\Lambda(z) = - \int_0^z \log |2 \sin t| dt.$$

Таким образом, объем тетраэдра представляется в виде линейной комбинации шестнадцати функций Лобачевского.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Х. Сабитов // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1996. №6. С. 89–91.
- [2] R. Connelly, I. Sabitov, A. Walz // Beiträge Algebra Geom. 1997. V. 38. №1. P. 1–10. [3] Д. В. Алексеевский, Э. Б. Винберг, А. С. Солодовников, О. В. Шварцман. Геометрия-2 // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы матем. Фундам. напр. Т. 29. М.: ВИНТИ, 1988. [4] G. J. Martin // Math. Chronicle. 1991. V. 20. P. 127–147.
- [5] W.-Y. Hsiang // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1988. V. 39. №156. P. 463–468.
- [6] Yu. Cho, H. Kim // Discrete Comput. Geom. 1999. V. 22. №3. P. 347–366. [7] J. Murakami, M. Yano. On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron // Preprint, 2002; <http://www.f.waseda.ac.jp/murakami/papers/tetrahedronrev3.pdf>. [8] A. Ushijima. A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra // Preprint, 2003; arXiv: math.GT/0309216.
- [9] G. Leibon. The symmetries of hyperbolic volume // Preprint, 2002. [10] Y. Mohanty // Algebr. Geom. Topol. 2003. V. 3. P. 1–31. [11] J. Milnor // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 6. №1. P. 9–24. [12] Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, М. Г. Пашкевич // Сиб. матем. журн. 2004. V. 45. №5. P. 1022–1031.