Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Зорич, О контактных квазиконформных погружениях, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 2, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1415>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 07:35:52

О КОНТАКТНЫХ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ПОГРУЖЕНИЯХ

В. А. Зорич

1. Введение. *Локально обратимое квазиконформное отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ при $n > 2$ обратимо глобально.* Это утверждение было сформулировано М. А. Лаврентьевым [1] для $n = 3$ и позднее доказано в работе [2].

Затем оно было развито в нескольких направлениях (см. [3], [4]).

Переход от погружений евклидова пространства к общему случаю погружений римановых многообразий [5], [6] и анализ доказательства в [2] стимулировал появление следующей конформно-инвариантной формы исходной теоремы, связанной с асимптотической геометрией и конформной классификацией римановых многообразий [7].

Для глобальной инъективности квазиконформного погружения $f: M^n \rightarrow N^n$ риманова многообразия M^n в односвязное риманово многообразие N^n при $n > 2$ достаточно, чтобы многообразие M^n имело конформно-параболический тип.

(О конформном типе многообразия см., например, в [7]–[9].)

В настоящей заметке мы отмечаем, что подобные теоремы имеют место соответственно для квазиконформных погружений группы Гейзенберга и для общих многообразий с контактной структурой конформно-параболического типа.

По-видимому, впервые квазиконформные отображения в контексте контактных структур появились в исследованиях Мостова [10]. Сейчас этому посвящена обширная литература и многочисленные исследования.

За общими геометрическими сведениями, относящимися к неголономной, в том числе к контактной геометрии, мы отсылаем, например, к книге [11] и, в частности, к содержащейся в ней статье Громова.

Основы теории квазиконформных отображений на субримановых многообразиях можно найти в [12]. Экстремальные длины, емкости конденсаторов и соответствующие оценки можно найти в [13]–[15].

2. Формулировка основных результатов. Мы будем рассматривать пространство $\mathbb{R}^n$, $n = 2m + 1$, с контактной структурой на нем. Возьмем для определенности евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ со стандартной контактной структурой, заданной формой $\omega = x dy + dz$.

Нулевые пространства формы образуют распределение H двумерных плоскостей, часто называемых горизонтальными, как и их векторы. Путь в пространстве считается допустимым, или, в иной терминологии, ω -допустимым или горизонтальным, если вектор скорости в любой момент горизонтален.

Заметим, что движение по прямым, параллельным оси x , допустимо. В плоскостях $x = c$ допустимы движения вдоль наклонных прямых. Наклон линейно зависит от c . Этого достаточно, чтобы стала очевидной возможность соединить любые две точки пространства допустимым путем.

Итак, пространство точек или состояний $\mathbb{R}^3$ с заданным в нем распределением H оказывается связным в смысле допустимых переходов из одного состояния в другое.

Если на плоскостях распределения H по тем или иным причинам имеется риманова метрика (например, как в нашем случае), то пара $(\mathbb{R}^3, H)$ естественно наделяется внутренней метрикой d , в которой расстояние между точками измеряется длиной кратчайшего допустимого пути с данными концами. Эта метрика часто называется метрикой Карно–Каратеодори (CC -метрикой). Возникает пространство $(\mathbb{R}^3, H, d)$ Карно–Каратеодори (короче, CC -пространство $(\mathbb{R}^3, d)$) или кратко $\mathbb{R}_{CC}^3$.

В случае связных нечетномерных групп Ли (лево- или право-) инвариантная контактная структура H и многие дальнейшие структуры на H вполне определяются заданием их в касательном пространстве к нейтральному элементу группы (в алгебре Ли).

Классическим примером может служить группа Гейзенберга.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ-05.01.00981 и НШ-2040.2003.1.

По отношению к общим многообразиям с контактной структурой (специально по отношению к строго псевдовыпуклым CR -многообразиям) она может выполнять примерно ту же функцию локального представления, какую пространство $\mathbb{R}^n$ выполняет в локальном описании n -мерного многообразия. Впрочем, в силу теоремы Дарбу все контактные структуры локально изоморфны.

Полученные ниже результаты применимы, в частности, к группе Гейзенберга.

Распределение H может быть связано не обязательно с римановой, а например, с конформной структурой или с CR -структурой.

Мы будем рассматривать погружения контактных многообразий, уважающие контактную структуру, т.е. контактные погружения. Точнее, мы будем рассматривать погружения, квазиконформные в смысле CC -метрики или конформной структуры. В более общей и простой форме, как показывают доказательства (см. препринт [16]), мы имеем дело с контактными отображениями, обладающими некоторым N -свойством (нуль-свойством), только не по отношению к мере точечных множеств, а по отношению к конформному инварианту — конформному модулю (экстремальной длине) семейств допустимых путей. Класс таких общих погружений обозначим через N . Сформулируем, однако, основное утверждение сначала в наиболее конкретном виде.

ТЕОРЕМА 1. *Квазиконформное погружение пространства $\mathbb{R}_{CC}^3$ конформно-параболического типа (например, группы Гейзенберга) в себя биективно.*

Возможные обобщения, которые, как мы уже отметили, можно увидеть из доказательства, состоят в том, что можно иметь лишь конформную, а не евклидову структуру на H ; что можно вместо квазиконформности погружения требовать лишь его принадлежности к классу N ; контактное пространство $(\mathbb{R}^3, H)$ можно заменить любым многообразием M^n с контактной структурой H конформно-параболического типа; наконец, можно рассматривать погружение такого многообразия в другое многообразие с контактной структурой.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть имеются два контактных многообразия одинаковой топологической размерности с конформной структурой на контактных гиперплоскостях, причем первое из многообразий имеет структуру конформно-параболического типа, а второе многообразие односвязно. Тогда всякое контактное погружение класса N (в частности, квазиконформное) первого многообразия во второе инъективно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Лаврентьев // Докл. АН СССР. 1938. Т. 20. № 4. С. 241–242. [2] В. А. Зорич // Матем. сб. 1967. Т. 74. № 3. С. 417–433. [3] V. A. Zorich // Lecture Notes in Math. 1992. V. 1508. P. 132–148. [4] В. А. Зорич // УМН. 2002. Т. 57. № 3. С. 3–28. [5] M. Gromov // Ann. of Math. Stud. 1981. V. 97. P. 183–213. [6] M. Gromov. Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces. Boston: Birkhäuser, 1999. [7] В. А. Зорич // Функц. анализ и его прил. 2000. Т. 34. № 3. С. 37–48. [8] В. А. Зорич, В. М. Кесельман // Функц. анализ и его прил. 1996. Т. 30. № 2. С. 40–55. [9] V. A. Zorich // Geom. Funct. Anal. 1999. V. 9. № 2. P. 393–411. [10] G. D. Mostow. Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1973. (Ann. of Math. Stud. V. 78.) [11] A. Bellaïche, J. J. Risler (Eds.). Sub-Riemannian Geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. (Progr. Math. V. 144.) [12] A. Korányi, H. M. Reimann // Adv. Math. 1995. V. 111. № 1. P. 1–87. [13] A. Korányi, H. M. Reimann // Bull. Sci. Math. (2). 1987. V. 111. № 1. P. 3–21. [14] H. M. Reimann // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1989. V. 14. № 2. P. 315–324. [15] P. Pansu // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1978/79. V. 4. P. 109–118. [16] V. A. Zorich. On contact quasiconformal immersions // Preprint. Zürich: ETH, 2002; www.fim.math.ethz.ch/Preprints.cgi/2002.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Представлено Д. В. Аносовым
Принято редколлегией 11.02.2005