Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Иванов, Размерность адамаровой алгебры делится на 4, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 2, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1416>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 16:33:23

РАЗМЕРНОСТЬ АДАМАРОВОЙ АЛГЕБРЫ ДЕЛИТСЯ НА 4

Д. Н. ИВАНОВ

Адамаровы алгебры обобщают классические матрицы Адамара¹, которые отвечают случаю коммутативных алгебр. В статье доказывается, что размерность адамаровой алгебры кратна 4. Это утверждение в качестве гипотезы было впервые сформулировано в [1].

Напомним основные определения. Пусть $\mathbf{A}$ – ассоциативная конечномерная над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ алгебра, через Tr_A обозначим след регулярного представления $\mathbf{A}$. Тогда $\text{Tr}_A xy$ является симметричной инвариантной формой на $\mathbf{A}$, которую мы будем называть *формой следа*. Известно, что алгебра $\mathbf{A}$ полупроста тогда и только тогда, когда форма следа невырождена на $\mathbf{A}$. Далее будут рассматриваться полупростые алгебры и термин “алгебра”, если не оговорено противное, будет обозначать ассоциативную конечномерную над $\mathbb{C}$ полупростую алгебру. Таким образом, по теореме Веддербарна алгебра $\mathbf{A}$ изоморфна конечной прямой сумме матричных алгебр $M_n(\mathbb{C}) = M_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Семейство неединичных собственных подалгебр $\mathcal{D} = \{\mathbf{B}_i, i = 1, \dots, r\}$ образует *ортогональное разложение* (ОР) алгебры $\mathbf{A}$, если все подалгебры $\mathbf{B}_i$ полупросты, содержат единичный элемент $\mathbf{1}_A$ алгебры $\mathbf{A}$ и выполняется условие ортогональности: алгебра $\mathbf{A}$ является прямой суммой попарно ортогональных подпространств, $\mathbf{A} = \langle \mathbf{1}_A \rangle \oplus \mathbf{B}_1^\circ \oplus \dots \oplus \mathbf{B}_r^\circ$, где $\mathbf{B}_i^\circ = \{x \in \mathbf{B}_i \mid \text{Tr}_A x = 0\}$.

Если все подалгебры ОР $\mathcal{D}$ коммутативны, то $\mathcal{D}$ называется *коммутативным*. Если все подалгебры в $\mathcal{D}$ изоморфны алгебре $\mathbf{B}$, то $\mathcal{D}$ называется *однородным ОР типа $\mathbf{B}$* (или просто *ОР типа $\mathbf{B}$*). Однородное ОР типа $2M_1$ называется *адамаровым разложением*. Алгебра, допускающая адамарово разложение, называется *адамаровой*. Через kM_n будем обозначать прямую сумму k экземпляров алгебры матриц M_n .

В [1] доказана следующая фундаментальная теорема.

ТЕОРЕМА 1 [1]. Алгебра $\mathbf{A}$ является свободным (левым, правым) модулем над каждой подалгеброй из семейства, образующего коммутативное ОР алгебры $\mathbf{A}$.

Применяя теорему 1 к адамаровым разложениям, которые, очевидно, являются коммутативными, получаем следующую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть подалгебры $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_r\}$ образуют адамарово разложение алгебры $\mathbf{A}$, $\dim \mathbf{A} = n$. Пусть $\text{Pr}(\mathbf{B}_i) = \{e_{i1}, e_{i2}\}$ – примитивные идемпотенты подалгебры $\mathbf{B}_i$, $i = \overline{1, r}$. В каждой подалгебре $\mathbf{B}_i$ выберем инволюцию A_i : $A_i^2 = \mathbf{1}_A$, $A_i \neq \mathbf{1}_A$. Тогда

- (1) $\text{Tr}_A e_{i1} = \text{Tr}_A e_{i2} = n/2$ для любого $i = \overline{1, r}$, в частности, n четно;
- (2) $A_i = \pm(e_{i1} - e_{i2})$, и инволюции A_i вместе с единичным элементом $\mathbf{1}_A$ образуют ортогональный базис алгебры $\mathbf{A}$, в частности, $r = n - 1$;
- (3) для любого $X \in \mathbf{A}$

$$n \text{Tr}_A X^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (\text{Tr}_A X A_i)^2 + (\text{Tr}_A X)^2. \quad (1)$$

Следующая теорема является основной.

ТЕОРЕМА 2. Если алгебра $\mathbf{A} = vM_1 \oplus M_{n_1} \oplus \dots \oplus M_{n_k}$, где $n_i > 1$ при $i = 1, \dots, k$, адамарова, то $n_1, \dots, n_k$ четны и размерность алгебры $\mathbf{A}$ делится на 4. В частности, v делится на 4.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00219).

¹Квадратная матрица, состоящая из ± 1 , называется *матрицей Адамара*, если ее строки, а следовательно, и столбцы, ортогональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $n = \dim \mathbf{A} = v + n_1^2 + \dots + n_k^2$, $\text{Tr} A = \text{Tr}, \text{tr}$ — след матрицы, E_s — единичная матрица порядка s . Пусть $X = (X_0, X_1, \dots, X_k) \in \mathbf{A}$, где $X_0 = (x_1, \dots, x_v) \in vM_1$, $X_i \in M_{n_i}$, $i = \overline{1, k}$. Тогда $\text{Tr} X = x_1 + \dots + x_v + n_1 \text{tr} X_1 + \dots + n_k \text{tr} X_k$. Пусть подалгебры $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{n-1}\}$ образуют адамарово разложение алгебры $\mathbf{A}$. В каждой подалгебре $\mathbf{B}_s$ выберем инволюцию $A_s = (A_{s0}, A_{s1}, \dots, A_{sk})$, где $A_{s0} = (a_{s1}, \dots, a_{sv}) \in vM_1$, $A_{si} \in M_{n_i}$.

Шаг 1. Покажем, что $n_1, \dots, n_k$ четны. Подставляя в (1) $X = (0, \dots, 0, E_{n_i}, 0, \dots, 0)$, где E_{n_i} — единичная матрица в M_{n_i} , получим $nn_i^2 = \sum_{s=1}^{n-1} (\text{Tr} A_{si})^2 + n_i^4$. Отсюда, после сокращения на n_i^2 , выводим

$$n - n_i^2 = \sum_{s=1}^{n-1} (\text{tr} A_{si})^2.$$

Так как след инволютивной матрицы есть целое число, то в силу неравенства $n - 1 > n - n_i^2$ получаем, что для некоторого s $\text{tr} A_{si} = 0$. Отсюда, в силу того, что след инволютивной матрицы имеет одинаковую четность с ее порядком, получаем, что n_i четно.

Шаг 2. Покажем, что n делится на 4. Так как по лемме 1 $\dim \mathbf{A}$ четно, то в силу шага 1 v четно. Поэтому считаем далее $v \geq 2$. Подставим в (1) $X = ((x_1, \dots, x_v), 0, \dots, 0)$:

$$n(x_1^2 + \dots + x_v^2) = \sum_{s=1}^{n-1} (x_1 a_{s1} + \dots + x_v a_{sv})^2 + (x_1 + \dots + x_v)^2. \quad (2)$$

Рассмотрим $((n-1) \times v)$ -матрицу $N = (a_{sj})$. Из (2) следует

$$N^t N = nE_{n-1} - J_{n-1}, \quad (3)$$

где J_{n-1} — матрица порядка $n-1$, состоящая из одних единиц. Так как A_{s0} — инволюция, то $a_{sj} = \pm 1$. Заменяя в случае необходимости A_s на $-A_s$, мы можем без ограничения общности считать, что первый столбец матрицы N состоит из $+1$. Если $v = 2$, то в силу леммы 1 и шага 1 значение Tr на примитивных идемпотентах подалгебр $\mathbf{B}_s$ нечетно. Значит, $A_{s0} = (1, -1)$ для всех s . Но это противоречит (3). Далее считаем $v \geq 4$. Рассмотрим матрицу N' , образованную первыми тремя столбцами матрицы N . Обозначим через $z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}$ количество строк в N' вида $(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (1, -1, -1)$ соответственно. В силу (3) скалярные произведения столбцов матрицы N (и N') равны -1 . Следовательно,

$$z_{11} + z_{12} + 1 = z_{21} + z_{22}, \quad z_{11} + z_{21} + 1 = z_{12} + z_{22}, \quad z_{11} + z_{22} + 1 = z_{12} + z_{21}.$$

Учитывая равенство $z_{11} + z_{12} + z_{21} + z_{22} = n - 1$, находим, что $z_{11} = n/4 - 1$, $z_{12} = z_{21} = z_{22} = n/4$. В частности, n кратно 4. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. В [1] доказано, что алгебра $3M_2$ не является адамаровой. Таким образом, приведенные в теореме 2 необходимые условия свойства алгебры быть адамаровой не являются достаточными. Однако в случае коммутативных алгебр предполагается, что делимость размерности алгебры на 4 является достаточным условием. Последнее утверждение эквивалентно старой гипотезе о существовании матрицы Адамара любого порядка, кратного 4.

2. Интересна гипотеза: если алгебра $\mathbf{A} = M_{n_1} \oplus M_{n_2}$ адамарова, то $n_1 = n_2$ и любое адамарово разложение алгебры $\mathbf{A}$ содержит ее центральную двумерную подалгебру.

Автор благодарен проф. М. В. Зайцеву и проф. А. В. Михалеву за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. Н. Иванов // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 12. С. 83–102.