Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ильюта, Субрезультаты Сильвестра, рациональные аппроксимации Коши, цепные дроби Тиле и высшие порядки Брюа, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 2, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1417>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:02:05

**СУБРЕЗУЛЬТАНТЫ СИЛЬВЕСТРА,
РАЦИОНАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ КОШИ,
ЦЕПНЫЕ ДРОБИ ТИЛЕ И ВЫСШИЕ ПОРЯДКИ БРЮА**

Г. Г. ИЛЬЮТА

Знаки разделенных разностей (р.р.) функции $f(y)$ в $(n+1)$ -подмножествах множества $X_{\overline{m}} = \{x_1 < \dots < x_m\} \subset \mathbb{R}$ определяют элемент высшего порядка Брюа (в.п.Б.) $B(m, n)$ [1]. В заметке этот факт обобщается для функций многих переменных. Мы опираемся на развитое А. Ласку и М.-П. Шютценберге исчисление элементарных (э.) р.р. $\partial_{ij} = (1 - (ij))/(x_i - x_j)$, $\partial_{i, i+1} = \partial_i$, рассматриваемых как элементы групповой алгебры симметрической группы S_m $((ij)$ – транспозиция), действующей на функции перестановками переменных. Интерполяционный ряд Ньютона $f(y) = \sum \partial_{i-1} \dots \partial_1(f(x_1))(y - x_1) \dots (y - x_{i-1})$ имеет обобщение для функций многих переменных [2], причем коэффициентами являются примененные к функции композиции э.р.р. Сопоставление функции и каждой композиции э.р.р. элемента, соответствующего в.п.Б., можно рассматривать как комбинаторный вариант разложения функции в ряд Ньютона, и вопросом о сходимости такого ряда, по-видимому, следует считать обычный матроидный вопрос о реализуемости. Мы ограничимся здесь рядом Ньютона для функции $f(y_1) \dots f(y_k)$ и его коэффициентами, соответствующими симметризаторам Сильвестра $(\partial_{n-k} \dots \partial_1) \dots (\partial_{n-1} \dots \partial_k)$ (они отвечают за невырожденность перечисленных в заглавии объектов). Аксиомы в определении в.п.Б. получены по следующей схеме: если соотношение для р.р. представлено в виде равной 0 суммы и не все слагаемые равны 0, то среди них есть слагаемые разных знаков (получаем условие на индексы слагаемых, исключив непрерывные параметры). Такие аксиомы обобщают определение перестановки как множества инверсий (для $B(m, n)$ см. [3]). В [4] обобщается определение перестановки как списка переставляемых символов. Мы обобщим определение $B(m, n)$, следуя подходу из [4]. В этом случае сопоставленный функции элемент в.п.Б. можно интерпретировать как определяемый линейной функцией порядок (по величине значений) на наборе точек. Близкая конструкция, в которой роль набора точек играет множество вершин многогранника матроида Кокстера, изучалась в [5]. Равенство $\partial_{m-1} \dots \partial_1(x_1^{-1}) = (-1)^{m-1}(x_1 \dots x_m)^{-1}$ подсказывает арифметический аналог связи р.р. и в.п.Б.: для $A \in \mathbb{Z}$, $X_{\overline{m}} \subset \mathbb{N}$ циклический порядок на различных перестановках s показателей $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N} \cup 0$ определяют числа $A/(x_1^{s(n_1)} \dots x_m^{s(n_m)})^{-1} \bmod \mathbb{Z}$.

При подходящих m, k старшие коэффициенты в: 1) интерполяционном многочлене для функции $f(y_1) \dots f(y_k)$ [6], 2) субрезультантах Сильвестра (остатках в алгоритме Евклида, примененном к $f(y)$ и $\prod(y - x_i)$) [7], 3) числителе и знаменателе аппроксимации Коши [8] (аппроксимации Ньютона–Паде [9]), 4) числителе и знаменателе дроби, полученной после сворачивания цепной дроби Тиле [10], имеют вид $d_k(\overline{m}) = \det(f[i, j + m - k])$, $i, j = 1, \dots, k$, где $f[i, j] = \partial_{j-1} \dots \partial_i(f(x_i))$ при $i \leq j$ и $f[i, j] = 0$ при $i > j$. Обозначим через $C(m, n)$ множество n -подмножеств в $\overline{m} = \{1, \dots, m\}$.

ТЕОРЕМА 1. 1) Ряд Ньютона для $\prod f(y_i)$ имеет вид (сумма по $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$) $f(y_1) \dots f(y_k) = \sum \det(f[i, j + \lambda_j]) \det((y - x_1) \dots (y - x_{j+\lambda_j-1})) / \prod (y_i - y_j)$.

$$2) \det(f[i, j + \lambda_j]) = (\partial_{\lambda_1} \dots \partial_1) \dots (\partial_{k+\lambda_k-1} \dots \partial_k)(f(x_1) \dots f(x_k)).$$

$$3) d_k(\overline{m}) d_{k-2}(\overline{m-1} \setminus 1) = d_{k-1}(\overline{m-1}) d_{k-1}(\overline{m} \setminus 1) - d_{k-1}(\overline{m-1} \setminus 1) d_{k-1}(\overline{m}).$$

$$4) d_k(\overline{m}) = (-1)^k \sum_{i=1}^{k+1} d_k(\overline{m} \setminus i) / \prod_{i \neq j=1}^{k+1} (x_i - x_j).$$

$$5) 0 = \sum_{i=1}^{k+2} d_k(\overline{m} \setminus i) / \prod_{i \neq j=1}^{k+2} (x_i - x_j).$$

В [11] определены в.п.Б. $B(m, n, k)$ как множество отображений $c: C(m, n+1) \rightarrow \{-1, 1\}$, для которых все последовательности $c(I \setminus i_1), \dots, c(I \setminus i_{n+2})$, $I = \{i_1 < \dots < i_{n+2}\} \in C(m, n+2)$, имеют не более k перемен знака. Назовем в.п.Б. $B(m)$ подмножество элементов $\varepsilon = (\varepsilon_{nk})$ прямого произведения всех $B(m, n, k)$ по n и k , $n \geq k - 1$, удовлетворяющих условиям: 1) если

для $j_1 < \dots < j_{k+1} \in I$ последовательность $\varepsilon_{nk}(I \setminus j_1), \dots, \varepsilon_{nk}(I \setminus j_{k+1})$ имеет k перемен знака, то $\varepsilon_{n+1,k}(I) = \varepsilon_{nk}(I \setminus j_1, 2)$ если для $j_1 < j_2 \in J \in C(m, n+1)$, $a \in \{0, 1\}$ имеем равенство $\varepsilon_{nk}(J) = (-1)^a \varepsilon_{n-2,k-2}(J \setminus \{j_1, j_2\})$, то не выполняется хотя бы одно из условий $\varepsilon_{n-1,k-1}(J \setminus j_1) = (-1)^{a+1} \varepsilon_{n-1,k-1}(J \setminus j_2)$, $\varepsilon_{n,k-1}(J) = (-1)^a \varepsilon_{n-2,k-2}(J \setminus \{j_1, j_2\})$. Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если для функции f $d_k(J) \neq 0$ при всех $k-1 \leq n$, $J \in C(m, n+1)$, то $(\varepsilon_{nk}: J \mapsto \text{sign } d_k(J)) \in B(m)$.

Ряд Ньютона в теореме 1 получается применением тождества Бине–Коши к произведению $(k \times \infty)$ -матрицы Опитца $(f[i, j])$ [12] и $(\infty \times k)$ -матрицы $((y - x_1) \cdots (y - x_{j-1}))$ (утверждение 2) получается сравнением 1) с общим рядом Ньютона [2]). Применяя к матрице Опитца тождество Турбулла [13], получим соотношения для коэффициентов ряда Ньютона (мы ограничились частным случаем 3)), и затем можно аналогично перейти к комбинаторным аксиомам для в.п.Б.

Для набора F вещественных функций m переменных обозначим через $S(F)$ группу перестановок, действующих тождественно на F . Назовем в.п.Б. $B(S_m, F)$ множество классов эквивалентности линейных порядков на $S_m/S(F)$, для каждого из которых при любых фиксированных $g \in S_m$, $(ij) \notin gS(F)g^{-1}$ одинаков порядок на всех парах $(sgS(F), s(ij)gS(F))_s$, $s \in S(\partial_{ij}g(F))$ ($(A, B)_s = (A, B)$, если $s(i) < s(j)$, и $(A, B)_s = (B, A)$, если $s(i) > s(j)$). Два порядка эквивалентны, если они отличаются в паре рядом стоящих элементов, не связанных предыдущим условием (частичный порядок на $B(S_m, F)$ вводится аналогично [4]). Примеры: если F – множество кососимметрических функций, то $S(F)$ – группа четных перестановок A_m и $B(S_m, F)$ состоит из двух порядков $A_m < S_m \setminus A_m$, $S_m \setminus A_m < A_m$; можно показать, что $B(S_m, \partial_{n-1} \cdots \partial_1 F_{1,m-1}) = B(m, n)$, где $F_{1,m-1}$ – множество всех функций, симметричных по последним $m-1$ переменным.

Назовем $f \in F$ общей, если $\partial_{ij}g(f(x_1, \dots, x_m)) \neq 0$ для всех $g \in S_m$, $(ij) \notin gS(F)g^{-1}$. Упорядочивая смежные классы $hS(F)$ по величине $h(f(x_1, \dots, x_m))$, для общей f получим элемент $B(S_m, F)$. Поскольку любая композиция ∂ э.р.р. является линейной комбинацией перестановок, то последовательность чисел $h\partial(f(x_1, \dots, x_m))$ можно представить как последовательность значений линейной функции $\sum g(f(x_1, \dots, x_m))t_g$.

Функции можно исключить из определения $B(S_m, F)$, поскольку оно зависит только от групп симметрий. Отметим два направления для обобщений: если $x_i = x_j$, то $\partial_{ij}(f(x_i)) = f'(x_i)$ (для $B(m, n)$ см. [14]); э.р.р. можно определить для любой группы, порожденной отражениями: если r – отражение, $(\cdot, \cdot)$ – инвариантное скалярное произведение, то $\partial_r(f(x)) = (f(x) - f(r(x)))/(x, a)$, где a – отвечающий r корень.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Г. Ильюта // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 3. С. 306–308. [2] A. Lascoux. Notes on interpolation in one and several variables // <http://phalanstere.univ-mlv.fr/~al>. [3] G. Ziegler // Topology. 1993. V. 32. № 2. P. 259–279. [4] Yu. Manin, V. Schechtman // Adv. Stud. Pure Math. 1989. V. 17. P. 289–308. [5] A. Vince // J. Algebraic Combin. 2000. V. 11. № 2. P. 155–178. [6] W. Chen, J. Louck // Adv. Math. 1996. V. 117. № 1. P. 147–156. [7] A. Lascoux, P. Pragacz // J. Symbolic Comput. 2003. V. 35. № 6. P. 689–710. [8] H. Salzer // Z. Angew. Math. Mech. 1984. V. 64. P. 45–50. [9] G. Claessens // Aequationes Math. 1979. V. 19. P. 104–112. [10] J. Tan // J. Comput. Math. 2001. V. 19. № 4. P. 433–444. [11] Г. Г. Ильюта // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 5. С. 3–34. [12] G. Opitz // Z. Angew. Math. Mech. 1964. V. 44. Sonderheft. P. T52–T54. [13] B. Leclerc // Adv. Math. 1993. V. 100. № 1. P. 101–132. [14] Г. Г. Ильюта // Функц. анализ и его прил. 1998. Т. 32. № 3. С. 76–79.