Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Михаскив, Регуляризованный след обыкновенного линейного дифференциального оператора с полиномиальными коэффициентами в $L_2(-\infty, +\infty)$, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 2, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1418>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 12:36:51

**РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД ОБЫКНОВЕННОГО
ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА
С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В $L_2(-\infty, +\infty)$**

Д. Н. МИХАСКИВ

1. Пусть l – выражение вида $l = \sum_{j=0}^r p_j(x) \frac{d^j}{dx^j}$ на $\mathbb{R}$, где $p_j(x)$ ($j = 0, 1, \dots, r$) – полиномы с комплексными коэффициентами от вещественного переменного x . Как известно (см., например, [1]), на множестве финитных бесконечно-дифференцируемых функций дифференциальное выражение l представляется в виде $l = \sum_{s+t \leq n} h_{st}(a^*)^s a^t$, где $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{d}{dx})$, $a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{d}{dx})$, h_{st} – комплексные числа, $h_{s, n-s} \neq 0$ для некоторого $s \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Пусть p – натуральное число, а оператор A_0 порожден дифференциальным выражением $(a^*)^p a^p$ на финитных бесконечно-дифференцируемых функциях на $\mathbb{R}$. Заметим, что $a^* a f = \frac{1}{2}(Hf - f)$, где $Hf = -f'' + x^2 f$ – гармонический осциллятор. Из этого легко вывести, что $(a^*)^p a^p$ является многочленом от H с вещественными коэффициентами. Следовательно, оператор A_0 допускает замыкание A в $L_2(\mathbb{R})$ и A является самосопряженным оператором. Пусть $\varphi_k(x)$ – ортонормированная система собственных функций оператора H , соответствующих собственным значениям $2k + 1$ ($k = 0, 1, \dots$), – полная ортонормированная система функций Чебышёва–Эрмита. Функции $\varphi_k(x)$ являются собственными функциями для оператора A , соответствующими собственным числам λ_k , где $\lambda_k = k(k-1) \cdots (k-p+1)$ при $k \geq p$ и $\lambda_k = 0$ при $k < p$. Пусть далее оператор B порожден в $L_2(\mathbb{R})$ выражением $\sum_{s+t \leq q} h_{st}(a^*)^s a^t$, где q – натуральное число. Через μ_k обозначим собственные числа оператора $A + B$, занумерованные с учетом кратности в порядке возрастания действительных частей. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть $q < 2(p-1)$. Тогда существует возрастающая последовательность положительных чисел (a_m) , $a_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$, такая, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{j=0}^m (\mu_j - \lambda_j) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \operatorname{Sp} \left[\sum_{k=1}^{l_0} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR(\lambda, A))^k \right] d\lambda \right\} = 0,$$

где $l_0 = \left\lceil \frac{q}{2(p-1)-q} \right\rceil + 1$ и Γ_m – окружность на комплексной плоскости радиуса a_m с центром в нуле. В частности, если $q < p-1$, то

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\mu_j - \lambda_j - \sum_{l=0}^{\min(j, q)} \frac{h_{ll} j!}{(j-l)!} \right) = 0.$$

В п. 2 настоящей работы приведены две леммы (леммы 1 и 2), используемые в доказательстве, а в п. 3 указаны основные этапы доказательства теоремы.

2. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha_k = k(k-1) \cdots (k-p+1)$, где $k = p, p+1, \dots$ и $\beta > 1/p$ – заданное число. Тогда существует возрастающая последовательность положительных чисел $\{\gamma_m\}$ такая, что $\gamma_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$ и $\sum_{k=p}^{+\infty} |\alpha_k^\beta - \lambda_m|^{-1} \leq C$, где C – положительное число.

Пусть $0 < \delta < 1$. Оператор $BA^{-\delta}$ обладает в базисе $\varphi_k(x)$ матрицей, в которой лишь конечное число диагоналей отличны от нуля. Все элементы этой матрицы имеют порядок $O(k^{\frac{q}{2}-p\delta})$ при $k \rightarrow +\infty$, и легко видеть, что при $\frac{q}{2p} \leq \delta < 1 - \frac{1}{p}$ оператор $BA^{-\delta}$ ограничен, а оператор $BR(\lambda, A)$ – ядерный. Используя методы работы [2], можно доказать, что справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть $q < 2(p-1)$, $\frac{q}{2p} \leq \delta < 1 - \frac{1}{p}$ и $0 \leq \omega < 1 - \delta - \frac{1}{p}$. Тогда существует последовательность чисел a_m такая, что $\lambda_m < a_m < \lambda_{m+1}$ и $\|BR(\lambda, A)\|_1 = o(a_m^{-\omega})$ при $m \rightarrow +\infty$, где $\|\cdot\|_1$ – ядерная норма оператора.

3. Пусть Γ_m – окружности на комплексной плоскости с центром в нуле и радиусами a_m , где m настолько большое, что при $\lambda \in \Gamma_m$ выполняется неравенство $\|BR(\lambda, A)\| < 1$ и количество собственных чисел с учетом кратности операторов A и $A+B$ совпадает внутри контуров Γ_m (см. [3; с. 29–31]). Для пары операторов A и $A+B$ рассмотрим определитель возмущения: $\det[(A+B-\lambda E)(A-\lambda E)^{-1}] = \det[A+BR(\lambda, A)]$, и воспользуемся известным соотношением (см. [3; с. 216–220]):

$$\mathrm{Sp}(R(\lambda, A) - R(\lambda, A+B)) = \frac{d}{d\lambda}(\mathrm{Sp} \ln(E + BR(\lambda, A))).$$

Из этого равенства можно извлечь, что

$$\sum_{i=0}^m (\mu_i - \lambda_i) = \int_{\Gamma_m} \left[\mathrm{Sp}(BR(\lambda, A)) + \mathrm{Sp} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR(\lambda, A))^k \right) \right] d\lambda.$$

Далее, используя леммы 1 и 2 и оценки, полученные в [2], можно показать, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_m} \mathrm{Sp} \left[\sum_{k=l_0+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR(\lambda, A))^k \right] d\lambda = 0,$$

где $l_0 = \left[\frac{q}{2(p-1)-q} \right] + 1$.

Автор выражает благодарность К. А. Мирзоеву за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев // Функциональный анализ и его прил. 1999. Т. 33. № 1. С. 30–45. [2] В. А. Садовничий, В. Е. Подольский // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 2. С. 129–152. [3] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

Поморский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Представлено А. Г. Костюченко
Принято редколлегией 25.01.2005