Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Натанзон, А. М. Пратусевич, Топология m -спинорных структур на римановых поверхностях, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 2, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1419>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 09:24:09

ТОПОЛОГИЯ m -СПИНОРНЫХ СТРУКТУР НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

С. М. НАТАНЗОН, А. М. ПРАТУСЕВИЧ

1. Классические спинорные расслоения на компактных римановых поверхностях (тета-характеристики) активно используются в геометрии со времен Римана [1]. Их современная классификация и интерпретация как линейных расслоений, квадрат которых изоморфен кокасательному расслоению, предложены Атьей [2] и Мамфордом [3]. Они связали множество (классических) спинорных расслоений на римановой поверхности P с аффинным пространством функций Арфа (в смысле [4]), т.е. квадратичных форм $H_1(P, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (относительно индекса пересечения на $H_1(P, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$). Топологические аспекты исследованы в [5]. Классификация классических спинорных структур на некомпактных поверхностях дана в [6]. В настоящей статье мы анонсируем соответствующие результаты для m -спинорных расслоений. Теория для тора и цилиндра проста и описана в [7]. Поэтому далее мы рассматриваем лишь гиперболические римановы поверхности.

2. На компактных римановых поверхностях m -спинорное расслоение – это линейное расслоение, m -я степень которого изоморфна кокасальному расслоению. На некомпактной поверхности P спинорная структура $E \rightarrow P$ определяется с помощью униформизации $P = \mathbb{H}/\Gamma$, где $\mathbb{H}$ – верхняя полуплоскость комплексной плоскости, а Γ – фуксова группа, состоящая из ее гиперболических и параболических автоморфизмов. В этом случае m -спинорная структура определяется как фактор-расслоение тривиального расслоения $\mathbb{H} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ под действием группы Γ , где $g \cdot (z, t) = (g(z), \delta_g(z) \cdot t)$, $\delta_{g_2 g_1} = (\delta_{g_2} \circ g_1) \cdot \delta_{g_1}$ и $\delta_g^m = (g')^{-1}$. m -спинорные структуры играют важную роль в математической физике [8] и теории особенностей [9].

Мы связываем с m -спинорной структурой на P функцию на множестве гомотопических классов простых контуров на P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\pi_1^0(P, p) \subset \pi_1(P, p)$ – подмножество фундаментальной группы, состоящее из элементов, представимых простыми контурами. Отображение $\sigma: \pi_1^0(P, p) \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ назовем *m -функцией Арфа*, если

- 1) $\sigma(bab^{-1}) = \sigma(a)$;
- 2) $\sigma(a^{-1}) = -\sigma(a)$;
- 3) $\sigma(ab) = \sigma(a) + \sigma(b)$, если a и b можно представить простыми контурами таким образом, чтобы точка p была их единственной общей точкой и их индекс пересечения не 0;
- 4) $\sigma(ab) = \sigma(a) + \sigma(b) + 1$, если: а) a и b можно представить простыми контурами таким образом, чтобы точка p была их единственной общей точкой и их индекс пересечения равен 0; б) ориентированные контуры a , b и $(ab)^{-1}$ свободно гомотопны попарно не пересекающимся простым контурам $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, ориентации которых индуцированы комплексной структурой сферы с 3 дырами, которую они отсекают от P .

ТЕОРЕМА 1. Пусть P – риманова поверхность рода g с n проколами и k дырами. Тогда:

- 1) существует естественное взаимно однозначное соответствие между m -спинорными структурами на P и m -функциями Арфа на P ;
- 2) множество Σ всех m -функций Арфа на P состоит из $m^{2g+n+k-\chi}$ элементов, где $\chi = 1$, если $n + k > 0$, и $\chi = 0$ в противном случае;
- 3) пара $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ порождает линейный функционал $\sigma_1 - \sigma_2 \in H^1(P, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Более того, $\Sigma = \sigma + H^1(P, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, где $\sigma \in \Sigma$.

3. Опишем теперь простейшие топологические инварианты m -функций Арфа σ . К ним мы отнесем род g поверхности P и число s_i (соответственно t_i) проколов (соответственно дыр) поверхности P , на которых σ принимает значение i . Обозначим через $\Sigma_{g; s_0, \dots, s_{m-1}; t_0, \dots, t_{m-1}} \subset \Sigma$

Первый автор поддержан грантами РФФИ-04-01-00762, НШ-1972.2003.1; второй автор поддержан SFB 611 (DFG).

соответствующее множество m -функций Арфа. Из определения m -функций Арфа сразу следует, что группа Mod гомотопических классов сохраняющих ориентацию автогомеоморфизмов поверхности P естественно действует на множестве $\Sigma_{g;s_0,\dots,s_{m-1};t_0,\dots,t_{m-1}} \subset \Sigma$.

ТЕОРЕМА 2. *Множество $\Sigma_{g;s_0,\dots,s_{m-1};t_0,\dots,t_{m-1}}$ непусто, если и только если $\sum_{0 \leq i \leq m-1} i(s_i + t_i) = (2 - 2g) - (n + k) \pmod{m}$. Действие группы Mod на непустом множестве $\Sigma_{g;s_0,\dots,s_{m-1};t_0,\dots,t_{m-1}}$ транзитивно, если и только если выполнено хотя бы одно из следующих условий: 1) m нечетно; 2) существует четное число i такое, что $s_i + t_i \neq 0$. В противном случае группа Mod имеет на $\Sigma_{g;s_0,\dots,s_{m-1};t_0,\dots,t_{m-1}}$ ровно 2 орбиты.*

4. Используем теперь m -функции Арфа для изучения пространства $M_{g,n,k}^m$ ($2g + n + k > 2$) модулей m -спинорных структур. По определению – это пространство пар (P, μ) , где μ – m -спинорная структура на римановой поверхности P рода g с n проколами и k дырами. Для $m = 2$ его топология исследована в [6], [10]. Для произвольного m пространство $M_{g,n,k}^m$ естественно распадается на подмножества $M_{g;s_0,\dots,s_{m-1};t_0,\dots,t_{m-1}}^m$, отвечающие простейшим топологическим инвариантам соответствующих m -функций Арфа. Из теоремы 2 сразу следует

ТЕОРЕМА 3. *Множество $M_{g;s_0,\dots,s_{m-1};t_0,\dots,t_{m-1}}^m$ непусто, если и только если $\sum_{i=0}^{m-1} i(s_i + t_i) = (2 - 2g) - (n + k) \pmod{m}$. Оно связано, если и только если выполнено хотя бы одно из следующих условий: 1) m нечетно; 2) существует четное число i такое, что $s_i + t_i \neq 0$. В противном случае множество $M_{g;s_0,\dots,s_{m-1};t_0,\dots,t_{m-1}}^m$ распадается на 2 компоненты связности.*

Для $k = 0$ это утверждение другим (алгебро-геометрическим) методом доказано в [7].

Используя теоремы 1, 2 и теорему Фрике–Клейна [11] в форме [10], можно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Компонента связности пространства $M_{g,n,k}^m$ ($2g + n + k > 2$) гомеоморфна $\mathbb{R}^d/G$, где $d = 6g + 2n + 3k - 6$ и $G \subset \text{Mod}$ – дискретная группа.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Riemann. Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß. New York: Dover, 1953. [2] M. F. Atiyah // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1971. V. 4. P. 47–62. [3] D. Mumford // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1971. V. 4. P. 181–192. [4] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1986. [5] D. Johnson // J. London Math. Soc. (2). 1980. V. 22. №2. P. 365–373. [6] С. М. Натанзон // Матем. заметки. 1989. Т. 45. №4. С. 111–116. [7] T. J. Jarvis // Internat. J. Math. 2000. V. 11. №5. P. 637–663. [8] E. Witten // Topological Methods in Modern Mathematics (Stony Brook, 1991). Houston: Publish or Perish, 1993. P. 235–269. [9] I. V. Dolgachev // Math. Ann. 1983. V. 265. P. 529–540. [10] С. М. Натанзон. Модули римановых поверхностей, вещественных алгебраических кривых и их супераналоги. М.: МЦНМО, 2003. [11] R. Fricke, F. Klein. Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. B. I: Die gruppentheoretischen Grundlagen. B. II: Die funktionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen. New York: Johnson Reprint Corp., 1965.

Московский государственный университет,
Московский независимый университет,
Институт теоретической и экспериментальной физики;
Mathematisches Institut, Universität Bonn
E-mail: natanzon@mccme.ru; anna@math.uni-bonn.de

Представлено С. П. Новиковым
Принято редколлегией 25.01.2005