Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Кувшинов, V -экстремальные решения проблемы моментов, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 2, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm142>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 18:01:57

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

V-ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ

М. Ю. КУВШИНОВ

Рассмотрим множество решений проблемы моментов Гамбургера, порожденной позитивной последовательностью чисел $s_0, s_1, s_2, \dots$, т.е. множество неубывающих функций $\sigma(u)$ ($-\infty < u < \infty$), удовлетворяющих уравнениям

$$(1) \quad s_k = \int_{-\infty}^{\infty} u^k d\sigma(u) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Решение проблемы моментов $\sigma(u)$ называется *V-экстремальным*, если его нельзя представить в виде $\sigma(u) = \frac{\alpha_1 \sigma_1(u) + \alpha_2 \sigma_2(u)}{\alpha_1 + \alpha_2}$, где $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$, а $\sigma_1(u), \sigma_2(u)$ — решения той же проблемы моментов, отличные от $\sigma(u)$.

V-экстремальные решения характеризуются важным свойством (см. [1]): $\sigma(u)$ есть V-экстремальное решение проблемы моментов в том и только том случае, если множество всех многочленов плотно в $L^1_{\sigma}(-\infty, \infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Решение проблемы моментов $\sigma(u)$ называется *N-экстремальным*, если множество всех многочленов плотно в $L^2_{\sigma}(-\infty, \infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. N-экстремальное решение является V-экстремальным.

Известно [2], что если $\sigma(u)$ — единственное решение проблемы моментов (1) (определенная проблема моментов), то оно N-экстремально. Мы рассмотрим случай, когда решение проблемы моментов (1) неединственно (неопределенная проблема моментов).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Класс N — совокупность всех аналитических в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ функций $w = f(z)$, отображающих полуплоскость $\text{Im } z > 0$ в полуплоскость $\text{Im } w \geq 0$.

Между множеством решений неопределенной проблемы моментов (1) и совокупностью всех функций $\varphi(z)$ класса N , пополненной константой ∞ , существует взаимно-однозначное соответствие, определяемое формулой Неванлинна [3]:

$$(2) \quad -\frac{A(z)\varphi(z) - C(z)}{B(z)\varphi(z) - D(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(u)}{u - z},$$

где $A(z), B(z), C(z), D(z)$ — некоторые целые функции от z (однозначно определяемые моментной последовательностью $s_0, s_1, s_2, \dots$).

Хорошо изучен вопрос N -экстремальности решений проблемы моментов (см., например, [4; с. 128]): для N -экстремальности решения $\sigma(u)$ необходимо и достаточно, чтобы ей по формуле (2) соответствовала функция $\varphi(z)$ равная вещественной константе (конечной или бесконечной).

Для неопределенной проблемы моментов ответ на вопрос является ли данное решение V -экстремальным или нет – не тривиален. Какие же условия надо наложить на функцию $\varphi(z)$, чтобы она по формуле (2) порождала V -экстремальное решение проблемы моментов (1)? Достаточное условие было получено в статье И. М. Глазмана и П. Б. Наймана [5], а именно, если решению $\sigma(u)$ в формуле Неванлинна (2) отвечает рациональная функция $\varphi(z) \in N$ конечной степени вещественная на вещественной оси, то $\sigma(u)$ – V -экстремальное решение.

Мы укажем более широкий класс неванлинновских функций $\varphi(z)$ ($\varphi(z) \in N$), порождающих по формуле (2) V -экстремальные решения неопределенной проблемы моментов (1). Каждой неубывающей функции $\tau_0(u)$ с ограниченной вариацией и вещественным числом K_0, K_1 поставим в соответствие функцию Неванлинна

$$(3) \quad \varphi_o(z) = K_1 z + K_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+uz}{u-z} d\tau_0(u), \quad K_1 \geq 0.$$

Как известно, нули функции $B(z)$ – вещественны. Нетрудно установить также, что множество ее нулей может быть ограничено лишь с одной стороны.

ТЕОРЕМА 1. Пусть неубывающая функция $\tau_0(u)$ постоянна на полусоси, содержащей бесконечно много нулей $B(z)$, существуют конечные моменты $l_k = \int_{-\infty}^{\infty} u^k d\tau_0(u)$ ($k = 0, 1, \dots$) и проблема моментов Гамбургера, порожденная моментной последовательностью $\{l_k\}_{k=0}^{\infty}$, – определенная. Тогда функция $\varphi_o(z)$, заданная формулой (3), порождает по формуле (2) V -экстремальное решение $\sigma_0(u)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\tau_0(u)$ постоянна на полусоси, содержащей бесконечно много нулей $B(z)$, и существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{|u|\delta} d\tau_0(u) < \infty$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда соответствующее решение $\sigma_0(u)$ V -экстремально.

Из класса мер $\tau_0(u)$, не порождающих определенную проблему моментов (в частности, $\tau_0(u)$ может не иметь конечных моментов), тоже можно выделить подкласс мер, которым соответствуют V -экстремальные решения.

Пусть множество нулей функции $B(z)$ не ограничено (ни с одной стороны), обозначим через $\dots < u_{-1} < u_0 < u_1 < \dots$ последовательность нулей $B(z)$.

ТЕОРЕМА 2. Если $\tau_0(u)$ – функция скачков (функция с ограниченной вариацией), причем на отрезках $[u_k, u_{k+1}]$ не более одного скачка $\tau_0(u)$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) и существуют по крайней мере два таких отрезка, на которых нет скачков, то мера $\sigma_0(u)$, соответствующая (по формулам (2), (3)) функции $\tau_0(u)$, является V -экстремальной.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору А. Г. Костюченко за постановку задачи и постоянный интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Наймарк М. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. № 4. С. 328–344. [2] Riesz M. // Acta Litterarum ac Scientiarum. Sztged. 1923. V. 1. № 4. P. 209–225. [3] Nevanlinna R. // Ann. Acad. Sci. Fenn. (A). 1922. V. 18. № 5. P. 1–52. [4] Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М.: Физматгиз, 1961. [5] Глазман И. М., Найман П. Б. // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102. № 3. С. 445–448.