Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Пустыльников, Обобщенный ньютоновский периодический бильярд в шаре, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 2, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1420>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 04:44:10

ОБОВЩЕННЫЙ НЬЮТОНОВСКИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИЙ БИЛЛИАРД В ШАРЕ

Л. Д. ПУСТЫЛЬНИКОВ

Обобщенные билиарды в произвольной области B были введены в [1], а в случае, когда область B , внутри которой массивная точка движется прямолинейно с постоянной скоростью, есть параллелепипед, такие билиарды были введены в [2] и изучались в рамках ньютоновской механики в [1] и [2] (ньютоновский билиард) и в рамках релятивистской механики в [1]–[4] (релятивистский билиард). Существо обобщения состоит в том, что при отражении точки от границы Γ области B проекция v_τ ее скорости v на касательное пространство к Γ в точке отражения не меняется, а проекция v_ν ее скорости v на нормаль в точке отражения преобразуется с помощью заранее заданной функции $f(\gamma, t)$, определенной на прямом произведении $\Gamma \times \mathbb{R}^1$ ($\mathbb{R}^1$ – прямая линия, $\gamma \in \Gamma$ – точка границы Γ , а величина $t \in \mathbb{R}^1$ обозначает время) согласно следующему закону. Предположим, что траектория точки, которая движется со скоростью v , пересекает Γ в точке $\gamma \in \Gamma$ в момент времени t^* . Тогда в этот момент времени t^* точка приобретает такую скорость v^* , как если бы она подверглась упругому удару с бесконечно-тяжелой плоскостью Γ^* , касающейся Γ в точке γ , которая движется в момент времени t^* вдоль нормали к Γ в точке γ со скоростью $(\partial f / \partial t)(\gamma, t^*)$. При этом упругий удар рассматривается в рамках ньютоновской механики, а в качестве положительного направления движения плоскости Γ^* выбирается направление внутрь области B . В настоящей работе изучается частный случай обобщенного ньютоновского билиарда, в котором область B есть n -мерный ($n \geq 1$) шар радиуса R , граница Γ – $(n - 1)$ -мерная сфера, а $f(\gamma, t) = f(t)$ – бесконечно-дифференцируемая функция, не зависящая от γ и имеющая период 2π по t , т.е. $f(t) = f(t + 2\pi)$.

ТЕОРЕМА. *Предположим, что в начальный момент времени t_0 точка имела скорость v_0 . Тогда во все последующие моменты времени $t \geq t_0$ модуль скорости $|v|$ точки не превосходит константу, зависящую только от v_0 , R и функции $f(t)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что в некоторый момент времени t столкновения точки с границей Γ в положении $\gamma \in \Gamma$ точка приобрела скорость $v = (v_\tau, v_\nu)$, направленную внутрь B , а в ближайший к t момент времени $t' \geq t$ столкновения с Γ в положении $\gamma' \in \Gamma$ точка приобрела скорость $v' = (v'_\tau, v'_\nu)$. Здесь v_τ и v'_τ – соответственно проекции векторов v и v' на касательные пространства к Γ в точках γ и γ' , а v_ν и v'_ν – соответственно координаты проекций векторов v и v' на нормали к Γ в точках γ и γ' . Из определения обобщенного ньютоновского билиарда следует, что

$$|v_\tau| = |v'_\tau|, \quad t' = t + \frac{2Rv_\nu}{v_\nu^2 + |v_\tau|^2}, \quad v'_\nu = v_\nu + 2(df/dt)(t'). \quad (1)$$

Рассмотрим отображение $A: (t, v_\nu) \rightarrow (t', v'_\nu)$ и введем новые переменные r и r' так, что

$$r = \frac{2Rv_\nu}{\varepsilon(v_\nu^2 + |v_\tau|^2)}, \quad r' = \frac{2Rv'_\nu}{\varepsilon((v'_\nu)^2 + |v'_\tau|^2)}, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Рассматривая переменные t и r как полярные координаты (t – угол, $0 \leq t < 2\pi$, r – радиус) и выражая через них отображение A , получим отображение $U_\varepsilon: (t, r) \rightarrow (t', r')$, имеющее в силу (1) и (2) следующий вид:

$$t' = t + \varepsilon r \pmod{2\pi}, \quad r' = r + \varepsilon r \varphi(t, r, \varepsilon), \quad (3)$$

где

$$|\varphi(t, r, \varepsilon)| < cr, \quad (4)$$

c – константа, не зависящая от t , r и ε . Так как преобразование A сохраняет площадь, то для отображения U_ε справедливо следующее свойство: любая замкнутая несамопересекающаяся кривая, окружающая точку $r = 0$, пересекается со своим образом относительно действия U_ε . Поэтому в силу соотношений (3) и (4) существуют такие константы $\varepsilon_0 > 0$ и $r_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ в области $0 < r \leq r_0$ справедливо утверждение теоремы Мозера [5], согласно которому в этой области существует замкнутая несамопересекающаяся кривая Π , окружающая точку $r = 0$ и инвариантная относительно действия U_ε . Так как в этом случае область внутри кривой Π также инвариантна относительно U_ε , то, переходя обратно к координате $v_\nu = (r\varepsilon)^{-1}$, получим, что при любом сколь угодно большом значении величины $|v_\nu|$ траектория точки (t, v_ν) относительно отображения A не выйдет за пределы некоторого круга с центром в точке $v_\nu = 0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Д. Пустыльников // УМН. 1999. Т. 54. №3. С. 179–180. [2] Л. Д. Пустыльников // УМН. 1995. Т. 50. №1. С. 143–186. [3] M. V. Deryabin, L. D. Pustyl'nikov // Lett. Math. Phys. 2003. V. 63. №3. P. 195–207. [4] M. V. Deryabin, L. D. Pustyl'nikov // Regul. Chaotic Dyn. 2003. V. 8. №3. P. 283–296. [5] J. K. Moser // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II. 1962. P. 1–20.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН

Представлено Р. А. Минлосом
Принято редколлегией 25.01.2005