Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Рыбников, Центризаторы некоторых квадратичных элементов в алгебрах Пуассона–Ли и метод сдвига инвариантов, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 2, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1421>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 02:19:58

ЦЕНТРАЛИЗАТОРЫ НЕКОТОРЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В АЛГЕБРАХ ПУАССОНА–ЛИ И МЕТОД СДВИГА ИНВАРИАНТОВ

Л. Г. РЫБНИКОВ

1. Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая комплексная алгебра Ли и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – ее картановская подалгебра. Универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ имеет возрастающую фильтрацию по степени выражения через образующие. По теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта ассоциированная градуированная алгебра есть симметрическая алгебра $S(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$. Коммутатор в $U(\mathfrak{g})$ задает скобку Пуассона–Ли $\{\cdot, \cdot\}$ в $S(\mathfrak{g})$. На образующих $x, y \in \mathfrak{g}$ имеем $\{x, y\} = [x, y]$.

Метод сдвига инвариантов позволяет строить коммутативные (относительно $\{\cdot, \cdot\}$) подалгебры в $S(\mathfrak{g})$. Этот метод состоит в следующем. Для любого регулярного элемента $h_0 \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$ подалгебра $A(h_0) \subset S(\mathfrak{g})$, порожденная $\mathfrak{g}$ -инвариантами в $S(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ и их производными всех порядков вдоль h_0 , коммутативна и имеет максимально возможную степень трансцендентности, равную $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{rk} \mathfrak{g})$ (см. [1]). Более того, подалгебры $A(h_0)$ являются максимальными коммутативными подалгебрами в $S(\mathfrak{g})$ относительно скобки Пуассона–Ли [2]. Подалгебры $A(h_0)$ названы в [3] *подалгебрами Мищенко–Фоменко*.

Пусть $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ – система корней алгебры $\mathfrak{g}$, Δ_+ – множество положительных корней, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ – простые корни. Зафиксируем инвариантное невырожденное скалярное умножение $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{g}$ и выберем в каждом корневом пространстве $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Delta$, элемент e_α так, чтобы $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$. Положим $h_\alpha := [e_\alpha, e_{-\alpha}]$, тогда для любого $h \in \mathfrak{h}$ имеем $(h_\alpha, h) = \alpha(h)$. Элементы e_α ($\alpha \in \Delta$) вместе с элементами $h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_l} \in \mathfrak{h}$ образуют базис пространства $\mathfrak{g}$.

Линейная и квадратичная части подалгебр Мищенко–Фоменко допускают следующее описание [4]: $A(h_0) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, $A(h_0) \cap S^2(\mathfrak{g}) = S^2(\mathfrak{h}) \oplus Q(h_0)$, где $Q(h_0) = \{\sum_{\alpha \in \Delta_+} \frac{\alpha(h)}{\alpha(h_0)} e_\alpha e_{-\alpha} \mid h \in \mathfrak{h}\}$.

Основным результатом данной работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. *При общих значениях параметра $h_0 \in \mathfrak{h}$ (т.е. для h_0 , лежащих в дополнении счетного числа собственных замкнутых по Зарисскому подмножеств в $\mathfrak{h}$) алгебра $A(h_0)$ есть централизатор пространства $Q(h_0)$ в $S(\mathfrak{g})$ относительно скобки Пуассона–Ли.*

В [5], [6] подалгебры Мищенко–Фоменко были подняты в универсальную обертывающую алгебру, т.е. построены такие коммутативные подалгебры $\mathcal{A}(h_0) \subset U(\mathfrak{g})$, что $\operatorname{gr} \mathcal{A}(h_0) = A(h_0)$. Мы выведем из теоремы 1 следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *При общих значениях параметра $h_0 \in \mathfrak{h}$ существует не более одной коммутативной подалгебры $\mathcal{A}(h_0) \subset U(\mathfrak{g})$, для которой $\operatorname{gr} \mathcal{A}(h_0) = A(h_0)$.*

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ это было доказано А. А. Тарасовым [7] для любого регулярного $h_0 \in \mathfrak{h}$.

2. Докажем теорему 1. Заметим, что для любого n множество $E_n \subset \mathfrak{h}$ таких $h_0 \in \mathfrak{h}$, что централизатор подпространства $Q(h_0)$ в $S^n(\mathfrak{g})$ относительно скобки Пуассона–Ли имеет размерность, большую $\dim A(h_0) \cap S^n(\mathfrak{g})$ (т.е. строго содержит пространство $A(h_0) \cap S^n(\mathfrak{g})$), замкнуто по Зарисскому в $\mathfrak{h}$. Поэтому достаточно доказать, что $E_n \neq \mathfrak{h}$ для любого n . Иначе говоря, достаточно доказать *существование* $h_0 \in \mathfrak{h}$, удовлетворяющего условию теоремы.

ЛЕММА 1. *Существуют такие $h_0, h \in \mathfrak{h}$, что числа $\frac{\alpha(h)}{\alpha(h_0)}$ ($\alpha \in \Delta_+$) линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем h_0 так, чтобы для простых корней α_i значения $\alpha_i(h_0)$ были алгебраически независимы над полем $\mathbb{Q}$. Так как никакие два положительных корня не пропорциональны, то числа $\frac{1}{\alpha(h_0)}$, $\alpha \in \Delta_+$, линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Выберем h так, чтобы значения $\alpha(h)$ были ненулевыми рациональными числами. Тогда числа $\frac{\alpha(h)}{\alpha(h_0)}$, $\alpha \in \Delta_+$, линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Работа выполнена при поддержке фонда CRDF (грант RM1-2543).

Выберем элемент $\gamma \in \mathfrak{g}^*$ такой, что $\gamma(h_{\alpha_i}) = 1$ для простых корней α_i и $\gamma(e_\alpha) = 0$ для $\alpha \in \Delta$. Зададим скобку Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_\gamma$ на $S(\mathfrak{g})$ следующим образом: для образующих $x, y \in \mathfrak{g}$ положим $\{x, y\}_\gamma = \gamma([x, y])$. При любом $t \in \mathbb{C}$ линейная комбинация $t\{\cdot, \cdot\} + (1-t)\{\cdot, \cdot\}_\gamma$ является скобкой Пуассона на $S(\mathfrak{g})$, причем для $t \neq 0$ соответствующие алгебры Пуассона изоморфны. А именно, пусть $S(\mathfrak{g})_t$ – алгебра $S(\mathfrak{g})$ со скобкой Пуассона $t\{\cdot, \cdot\} + (1-t)\{\cdot, \cdot\}_\gamma$; тогда при $t \neq 0$ изоморфизм $\psi_t: S(\mathfrak{g})_1 \rightarrow S(\mathfrak{g})_t$ задается на образующих $x \in \mathfrak{g}$ следующим образом: $\psi_t(x) = t^{-1}x + t^{-2}(1-t)\gamma(x)$. Очевидно, что $\psi_t(Q(h_0)) = Q(h_0)$.

ЛЕММА 2. Для некоторого $h_0 \in \mathfrak{h}$ централизатор пространства $Q(h_0)$ в $S(\mathfrak{g})_0$ имеет степень трансцендентности не больше $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{rk } \mathfrak{g})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем h_0 и h как в лемме 1 и положим $q = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \frac{\alpha(h)}{\alpha(h_0)} e_\alpha e_{-\alpha} \in Q(h_0)$. Для любого $f \in S(\mathfrak{g})$ имеем $\{q, f\}_\gamma = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \gamma(h_\alpha) \frac{\alpha(h)}{\alpha(h_0)} (e_{-\alpha} \frac{\partial f}{\partial e_{-\alpha}} - e_\alpha \frac{\partial f}{\partial e_\alpha})$. В частности,

$$\left\{ q, \prod_{i=1}^l h_{\alpha_i}^{m_i} \prod_{\alpha \in \Delta_+} e_\alpha^{n_\alpha} e_{-\alpha}^{n_{-\alpha}} \right\}_\gamma = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \gamma(h_\alpha) \frac{\alpha(h)}{\alpha(h_0)} (n_{-\alpha} - n_\alpha) \prod_{i=1}^l h_{\alpha_i}^{m_i} \prod_{\alpha \in \Delta_+} e_\alpha^{n_\alpha} e_{-\alpha}^{n_{-\alpha}}. \quad (1)$$

Для каждого $\alpha = \sum_{i=1}^l m_i \alpha_i \in \Delta_+$ имеем $\gamma(h_\alpha) = \sum_{i=1}^l m_i \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Так как числа $\frac{\alpha(h)}{\alpha(h_0)}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то правая часть равенства (1) равна нулю тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in \Delta_+$ выполнено $n_\alpha - n_{-\alpha} = 0$. Это значит, что централизатор элемента q в $S(\mathfrak{g})_0$ состоит из линейных комбинаций мономов, имеющих равную степень по e_α и $e_{-\alpha}$ для любого $\alpha \in \Delta_+$, т.е. порожден элементами h_{α_i} и $e_\alpha e_{-\alpha}$ ($\alpha \in \Delta_+$), и, следовательно, имеет степень трансцендентности $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{rk } \mathfrak{g})$.

Из леммы 2 следует, что централизатор пространства $Q(h_0)$ в $S(\mathfrak{g})_t$ имеет степень трансцендентности не больше $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{rk } \mathfrak{g})$ при общем t , а значит, и при любом t , так как при $t \neq 0$ пуассоновы алгебры $S(\mathfrak{g})_t$ изоморфны. Пусть $Z \subset S(\mathfrak{g})$ – централизатор пространства $Q(h_0)$ в $S(\mathfrak{g})_1$. Поскольку $\text{tr deg}(Z) \leq \text{tr deg}(A(h_0))$ и $A(h_0) \subset Z$, любой элемент алгебры Z алгебраичен над $A(h_0)$. Следовательно, так как алгебра $A(h_0)$ коммутативна относительно скобки Пуассона–Ли, алгебра Z также коммутативна (см., например, [8; лемма 1]). Но $A(h_0)$ – *максимальная* коммутативная подалгебра в $S(\mathfrak{g})$, поэтому $Z = A(h_0)$. Теорема 1 доказана.

3. Докажем теорему 2. В [3] доказано, что пространство $A(h_0)^{(2)} = \mathbb{C} + \mathfrak{h} + S^2(\mathfrak{h}) + Q(h_0)$ может быть поднято до коммутативного подпространства $\mathcal{A}(h_0)^{(2)} \subset U(\mathfrak{g})^{(2)}$ единственным способом (при помощи отображения симметризации). Из теоремы 1 следует, что при общем h_0 любое поднятие $\mathcal{A}(h_0) \subset U(\mathfrak{g})$ алгебры $A(h_0)$ есть централизатор пространства $\mathcal{A}(h_0)^{(2)}$ в алгебре $U(\mathfrak{g})$. Теорема 2 доказана.

Я благодарю Э.Б. Винберга за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1979. Т. 19. С. 3–94. [2] А. А. Тарасов // УМН. 2002. Т. 57. № 5. С. 165–166. [3] Э. Б. Винберг // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 1. С. 3–25. [4] А. Т. Фоменко // Матем. сб. 1981. Т. 115. № 2. С. 263–280. [5] М. Nazarov, G. Olshanski // Comm. Math. Phys. 1996. V. 178. № 2. P. 433–506; arXiv: q-alg/9507003. [6] А. А. Тарасов // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 115–122. [7] А. А. Тарасов // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 7. С. 155–160. [8] Л. Г. Рыбников // Функц. анализ и его прил. 2003. Т. 37. № 2. С. 41–51.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: leo_rybnikov@mtu-net.ru

Представлено Э.Б. Винбергом
Принято редколлегией 25.01.2005