Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Тензина, Некоторые свойства топологического радикала Бэра колец с топологической размерностью Крулля, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 2, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1422>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:33:39

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РАДИКАЛА БЭРА КОЛЕЦ С ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ КРУЛЛЯ

В. В. ТЕНЗИНА

В данной статье доказывается, что для некоторых типов колец топологический радикал Бэра не содержит односторонних топологически идемпотентных идеалов, хотя в общем случае топологический радикал Бэра даже может содержать единицу (см. [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем топологический модуль топологически неприводимым, если он не содержит замкнутых собственных подмодулей.

ЛЕММА. Пусть M – топологически неприводимый R -модуль, и пусть I – топологически Σ -нильпотентный идеал кольца R , тогда $IM = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $IM \neq 0$. Следовательно, существует такой элемент m из M , что $Im \neq 0$. Но тогда $[Im] = M$. Пусть для натурального числа n выполняется $[I^{n-1}m] = M$. Докажем, что тогда $[I^n m] = M$. Имеем: $[I^n m] \supseteq [I \cdot I^{n-1}m] \supseteq [I] \cdot [I^{n-1}m] \supseteq I \cdot M$. Отсюда $[I^n m] \supseteq [IM] = M$. Итак, для любого натурального n справедливо $[I^n m] = M$. Фиксируем произвольную окрестность нуля W в M . Тогда найдется такая окрестность нуля W_1 , что $W_1 + W_1 \subseteq W$. В кольце R выберем окрестность V такую, что $V \cdot m \subseteq W_1$. Так как I – топологически Σ -нильпотентный идеал, то $\exists n \in \mathbb{N}$: $I^n \subseteq V$. Итак, $M = [I^n m] \subseteq [V \cdot m] \subseteq [W_1] \subseteq W_1 + W_1 \subseteq W$, т.е. $M \subseteq \bigcap_{W \in \tau(M)} W = 0$, но это противоречит $IM \neq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Топологический радикал Бэра топологического кольца R обнуляет все топологически неприводимые R -модули.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – топологически неприводимый R -модуль. Введем следующее обозначение: $A(M) = \{r \in R : rM = 0\}$. Из доказанной выше леммы следует, что фактор-кольцо $R/A(M)$ не содержит топологически Σ -нильпотентных идеалов, так как модуль M точен и неприводим над $R/A(M)$. Поэтому $\mathcal{L}(R) \subseteq A(M)$, т.е. $\mathcal{L}(R)M = 0$.

Определим для топологического модуля M топологическую размерность Крулля, которую будем обозначать через $\text{top } K \dim M$, как девиацию частично упорядоченного множества всех замкнутых подмодулей с упорядочением по включению (см. [2]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть топологическое кольцо R обладает топологическим левым модулем M с топологической размерностью Крулля. Тогда если левый идеал J – топологически идемпотентен, т.е. $[J^2]_J = J$, и содержится в топологическом радикале Бэра, то $JM = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно введем несколько понятий, связанных с топологической размерностью Крулля. Назовем топологический модуль M с топологической размерностью Крулля топологически критическим, если для любого замкнутого подмодуля N модуля M выполняется $\text{top } K \dim M/N < \text{top } K \dim M$. Аналогично дискретному случаю (см. [3]) можно доказать, практически полностью повторяя доказательство, что каждый топологический модуль с топологической размерностью Крулля содержит какой-то топологически критический подмодуль. Для каждого порядкового γ определим замкнутое множество $S_\gamma(M)$. Положим $S_0(M) = 0$. Пусть уже определены все $S_\alpha(M)$ для каждого порядкового $\alpha < \beta$. Тогда $S_\beta(M)$ определим следующим образом: если β – предельное, то $S_\beta(M) = [\bigcup_{\alpha < \beta} S_\alpha(M)]$, иначе существует порядковое $\beta - 1$, в этом случае $S_\beta(M)$ представляет собой замыкание суммы всех замкнутых подмодулей N таких, что фактор-модуль $N/S_{\beta-1}(M)$ является топологически критическим. Заметим, что $\alpha_1 < \alpha_2 \Leftrightarrow S_{\alpha_1}(M) \leq S_{\alpha_2}(M)$. Существует такое порядковое δ , что для любого $\gamma > \delta$ справедливо $S_\gamma(M) = S_\delta(M)$. Так как любой топологический модуль с топологической размерностью Крулля содержит хотя бы один топологически критический подмодуль, то $M = S_\delta(M)$.

Пусть утверждение теоремы верно для всех топологических модулей с топологической размерностью Крулля меньше β . Докажем справедливость утверждения, если $\text{top } K \dim M = \beta$.

Пусть C – топологически β -критический подмодуль M . Для любого замкнутого подмодуля C' по предположению $JC \subseteq C'$. Следовательно, $[JC]$ – минимальный замкнутый подмодуль в C и поэтому является топологически неприводимым модулем. По предыдущей лемме $J[JC] = 0$, так как $J \subseteq \mathcal{L}(R)$. Следовательно, $[JC] = [J^2C] = [J[JC]] = 0$. Таким образом, $JC = 0$. Поэтому $JS_1(M) = 0$. При помощи трансфинитной индукции можно доказать, что $JM = 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Топологический радикал Бэра кольца, имеющего топологическую размерность Крулля, не содержит ненулевых односторонних топологически идемпотентных идеалов.*

СЛЕДСТВИЕ. *Топологический радикал Бэра топологического кольца с топологической размерностью Крулля не содержит единицу.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Арнаутков // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157. № 1. С. 12–15. [2] В. В. Тензина // Фундам. прикл. матем. 2004. Т. 10. № 3. С. 215–230. [3] R. Gordon, J. C. Robson // Mem. Amer. Math. Soc. 1973. № 133. P. 1–78.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Представлено А. В. Михалевым
Принято редколлегией 25.01.2005