Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. К. Шейнман, Представления старшего веса алгебр Кричевера–Новикова
и интегрируемые системы, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 2, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1423>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:29:51

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СТАРШЕГО ВЕСА АЛГЕБР КРИЧЕВЕРА–НОВИКОВА И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

О. К. ШЕЙНМАН

1. G – комплексная или компактная связная редуктивная группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, Σ – компактная риманова поверхность с заданной комплексной структурой и двумя отмеченными точками $P_{\pm}$, $\mathcal{A}$ – алгебра мероморфных функций на Σ , голоморфных вне $P_{\pm}$, $\{A_K \mid K \in \mathbb{Z}\}$ – базис Кричевера–Новикова в $\mathcal{A}$ [1], $\{\omega^L \mid L \in \mathbb{Z}\}$ – двойственный базис в 1-формах: $\text{res}_{P_+} A_K \omega^L = \delta_K^L$. Аффинная алгебра Кричевера–Новикова $\widehat{\mathfrak{g}}$ определяется как бесконечномерное векторное пространство $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}t$ (t – формальная образующая), на котором задана скобка $[x \otimes A, y \otimes B] = [x, y] \otimes AB + \text{tr}(\text{ad } x \cdot \text{ad } y) \text{res}_{P_+}(A dB)t$, $[x \otimes A, t] = 0$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$, $A, B \in \mathcal{A}$, и почти градуированная структура, при которой подпространству $\mathfrak{g} \otimes A_K$ приписывается степень K , а $\deg t = 0$.

2. До настоящего времени для аффинных алгебр Кричевера–Новикова не существует никакого аналога теории Картана–Вейля. В частности, препятствием к обобщению понятия представления старшего веса является тот факт, что размерность картановской подалгебры $\mathfrak{h}$ (которая такова же, как для алгебр Каца–Мули) много меньше, чем размерность пространства уже известных [2] представлений.

В этой заметке мы связываем понятие представления старшего веса с другой коммутативной алгеброй Ли – алгеброй гамильтонианов в инволюции на пространстве $\mathcal{M} = \text{Hom}(\pi_1, G)/G$, где $\pi_1 = \pi_1(\Sigma \setminus P_{\pm})$ – фундаментальная группа проколотой римановой поверхности.

3. Пусть $\mathcal{O}$ – пространство коприсоединенных орбит алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$. Как легко следует из [3], [4], существует каноническое отображение $\tau_1: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M}$. Пусть $\tau_0: \widehat{\mathfrak{g}}^* \rightarrow \mathcal{O}$ – естественная проекция. Определим $\tau: \widehat{\mathfrak{g}}^* \rightarrow \mathcal{M}$ как сквозное отображение: $\tau = \tau_1 \tau_0$.

Пусть H – функция на $\mathcal{M}$, $\mu \in \mathcal{M}$ и $p \in \tau^{-1}\mu$. Тогда $H^* = \tau^* H$ – функционал на $\widehat{\mathfrak{g}}^*$. Его вариация в точке p , которую мы обозначим δH^* , является элементом второго сопряженного пространства $\widehat{\mathfrak{g}}^{**}$ к алгебре Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ (током). Последний мы обозначим δH .

Пусть V – почти градуированный $\widehat{\mathfrak{g}}$ -модуль, порожденный вакуумом (т.е. таким элементом v_0 , что $\widehat{\mathfrak{g}}_+ v_0 = 0$ и $N_+ v_0 = 0$, где $\widehat{\mathfrak{g}}_+ \subset \widehat{\mathfrak{g}}$ – подалгебра, порожденная элементами положительной степени, N_+ – подалгебра строго верхнетреугольных матриц). Для рассматриваемых ниже модулей и гамильтонианов действие δH на V удастся определить, и притом так, что оно коммутирует с действием $\mathfrak{h}$. Пусть $\widehat{\mathfrak{h}}$ – алгебра гамильтонианов в инволюции относительно стандартной [5], [6], [7] симплектической структуры на $\mathcal{M}$ и $\widehat{\lambda} \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. V называется модулем старшего веса $\lambda + \widehat{\lambda}$, если v_0 является собственным вектором действия $\mathfrak{h}$ с весом λ и $(\delta H)v_0 = \widehat{\lambda}(H)v_0 + \dots$ для каждого $H \in \widehat{\mathfrak{h}}$. Здесь и ниже многоточие обозначает сумму членов меньшей по сравнению с v_0 степени.

4. Для основных типов гамильтонианов токи δH удастся явно вычислить. Рассмотрим сначала гамильтонианы Голдсмэна [5]. Для простоты возьмем $G = GL(n)$. Пусть f – функция на G , постоянная на классах сопряженных элементов, C – контур на Σ и $\mu \in \mathcal{M}$. Положим $H_{f,C}(\mu) = f(M_C)$, где $M_C = \mu(C)$.

ТЕОРЕМА 1. $\delta H_{f,C}(\mu) = F(M_C) \otimes A_C$, где $F(M) \in \mathfrak{g}$ ($M \in G$) определяется из условия $\delta f(M) = \text{tr}(F(M)M^{-1}\delta M)$, $A_C = \sum_K N_C^K A_K$, $N_C^K = \frac{1}{2\pi i} \int_C \omega^K$.

ПРИМЕР. Пусть $H_C = \text{tr } M_C$, тогда $\delta H_C = M_C A_C$.

Пусть b_{μ} – голоморфное расслоение степени 0 на Σ , заданное представлением μ . Пусть $V = V(b)$ – пространство полубесконечных форм от голоморфных вне $P_{\pm}$ мероморфных сечений расслоения b [2]. Пусть $V_{\mu} = V(b_{\mu})$.

ТЕОРЕМА 2. Существует естественное действие токов $\delta H_{f,C}(\mu)$ в пространстве V_{μ} . Пусть $v_0 \in V_{\mu}$ – вакуум заряда $-n$. Тогда

$$(\delta H_{f,C})v_0 = \text{tr}(F(M_C))N_C^0 v_0 + \dots$$

Работа выполнена при поддержке программы “Математические методы нелинейной динамики” Президиума РАН и проектов РФФИ 02-01-00803, 02-01-22004.

Если контуры C не пересекаются, гамильтонианы $H_{f,C}$ находятся в инволюции [5]. Таким образом, $\widehat{\lambda}(H_{f,C}) = \text{tr}(F(M_C))N_C^0$.

5. В частном случае $G = SU(2)$ гамильтонианы Голдмэна образуют вполне интегрируемую систему [6]. При этом контуры C раскраивают риманову поверхность на штаны, и переменными действия системы являются $\theta_C = \arccos \frac{1}{2} \text{tr} M_C$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(M) = -\int_0^{\theta(M)} \theta \tan \theta d\theta$, где $\theta(M) = \arccos \frac{1}{2} \text{tr} M$. Тогда $\text{tr} F(M_C) = \theta_C$.

Из теорем 2, 3 следует, что (по крайней мере при $\lambda = 0$) вес фермионного представления вполне определяет проекцию набора M_C на базу лагранжевой поляризации пространства $\mathcal{M}$, рассмотренной в [6]. Теорема 2 также показывает, что между весами и точками пространства $\mathcal{M}$ имеется зависимость.

6. Для $G = GL(n, \mathbb{C})$ при произвольном n известно, что $\mathcal{M}$ является вполне интегрируемой системой [7], [8]. Представим $\mathcal{M}$ как пространство модулей расслоений Хиггса. Пусть ϕ – поле Хиггса, заданное с помощью параметров Тюринга согласно [8] (мы рассматриваем ϕ как матричнозначную 1-форму). Возьмем интегралы Хитчина в виде $H_{m,K} = m^{-1} \text{res}_{P_+} \text{tr}(\phi^m \Omega_K^{1-m})$, где Ω_K^l – базисные тензоры Кричевера–Новикова веса $l = 1, \dots, n$. Тогда $\delta H_{m,K} = \text{res}_{P_+} \text{tr}(\phi^{m-1} \Omega_K^{1-m} \delta \phi)$. В каждой точке пространства $\mathcal{M}$ этой вариации соответствует ток со значениями в $\mathfrak{g}$ и полюсами на дивизоре Тюринга. За этим током мы сохраняем то же самое обозначение: $\delta H_{m,K} = \phi^{m-1} \Omega_K^{1-m}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(b, \phi) \in \mathcal{M}$, где b – расслоение, ϕ – поле Хиггса. Тогда существует естественное действие тока $\delta H_{m,K}$ в пространстве $V(b)$ (см. выше) и для вакуума $v_0 = \psi_{-m} \wedge \psi_{-m+1} \wedge \dots \in V(b)$ имеем

$$(\delta H_{m,K})v_0 = \left(\sum_{-m}^0 \langle \psi_N^+ | \delta H_{m,K} | \psi_N \rangle \right) v_0 + \dots,$$

где ψ_N – базис Кричевера–Новикова в пространстве сечений расслоения b , ψ_N^+ – двойственный базис.

Результаты настоящего пункта имеют прямое обобщение на случай произвольной комплексной полупростой группы Ли.

7. Сопоставление теорем 3, 4 с результатами [6] приводит к следующей гипотезе.

ГИПОТЕЗА. Имеется взаимно однозначное соответствие между неприводимыми представлениями старшего веса алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$, отвечающими фиксированному весу картановской подалгебры, и (векторным) пространством значений, принимаемых полным набором независимых интегралов системы.

Напомним [6], что это пространство тесно связано с поляризацией пространства $\mathcal{M}$, определяемой рассматриваемым набором интегралов.

Автор благодарит И. М. Кричевера за указания, способствовавшие доказательству теорем 1, а также участников семинаров по геометрии и топологии и по квантовой теории поля Математического института им. В. А. Стеклова РАН за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. М. Кричевер, С. П. Новиков // Функц. анализ и его прил. 1987. Т. 21. № 2. С. 46–63. [2] О. К. Шейнман // Функц. анализ и его прил. 2001. Т. 35. № 3. С. 60–72. [3] О. К. Шейнман // Функц. анализ и его прил. 1993. Т. 27. № 4. С. 54–62. [4] О. К. Шейнман // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 185–186. [5] W. Goldman // Invent. Math. 1986. V. 85. P. 263–302. [6] L. Jeffrey, J. Weitsman // Comm. Math. Phys. 1992. V. 150. № 3. P. 593–630. [7] N. Hitchin // Duke Math. J. 1987. V. 54. № 1. P. 91–114. [8] I. M. Krichever. Vector bundles and Lax equations on algebraic curves // Comm. Math. Phys. 2002. V. 229. № 2. P. 229–269; hep-th/0108110.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Независимый московский университет, Москва
E-mail: oleg@sheinman.mcsme.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией 25.01.2005