Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Щуплев, О воспроизводящих ядрах в $\mathbb{C}^d$ и формах объема на торических многообразиях, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 2, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1424>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 11:05:09

О ВОСПРОИЗВОДЯЩИХ ЯДРАХ В $\mathbb{C}^d$ И ФОРМАХ ОБЪЕМА НА ТОРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

А. В. ШУПЛЕВ

Интегральные представления Коши и Бохнера–Мартинелли выделяются среди всех известных в комплексном анализе своей простотой. В сущности, их ядра являются единственными дифференциальными формами максимальной степени среди всех, определенных на тех же множествах. Так, ядро интегрального представления Бохнера–Мартинелли в $\mathbb{C}^d$ порождает группу когомологий де Рама $H_{DR}^{2d-1}(\mathbb{C}^d \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{C}$, тогда как ядро Коши в $\mathbb{C}^d$ является порождающим элементом $H_{DR}^d(\mathbb{C}^d \setminus Z) \simeq \mathbb{C}$, где Z есть объединение координатных гиперплоскостей, т.е. множество особенностей ядра. Данное наблюдение послужило основой следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [1]. Конечный набор $Z = \bigcup E_\nu$ комплексных плоскостей произвольных размерностей в $\mathbb{C}^d$ называется *атомарным*, если максимальномерная нетривиальная группа когомологий его дополнения однопорождена:

$$H_{DR}^k(\mathbb{C}^d \setminus Z) = \begin{cases} \mathbb{C}, & k = k_0, \\ 0, & k > k_0. \end{cases}$$

Порождающий элемент η группы $H_{DR}^{k_0}(\mathbb{C}^d \setminus Z)$ называется *ядром* для набора Z .

Теория торических многообразий доставляет класс наборов Z координатных плоскостей, являющихся атомарными. А именно, любое n -мерное компактное симплицальное торическое многообразие представимо в виде фактор-пространства $X_\Delta := \mathbb{C}^d \setminus Z/G$, где $Z = Z_\Delta$ – некоторый набор координатных плоскостей в $\mathbb{C}^d$, а G – группа, изоморфная комплексному тору $\mathbb{T}^{d-n}$, причем набор Z и группа G кодируются с помощью целочисленного многогранника Δ в $\mathbb{R}^n$ с d гранями [2]. Мы рассматриваем только гладкие многообразия, для которых, как известно, кодирующий многогранник абсолютно прост, т.е. двойственный конус к Δ в каждой вершине порождается базисом решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. В [2] показано, что переменная $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \in \mathbb{C}^d$ играет роль обобщенных однородных координат многообразия X_Δ . Пусть $\omega(\zeta)$ есть (n, n) -форма объема на X_Δ , записанная в однородных координатах. Основным результатом данного сообщения составляет

ТЕОРЕМА 1. *Дифференциальная (d, n) -форма*

$$\eta = \omega(\zeta) \wedge \frac{d\zeta_{n+1}}{\zeta_{n+1}} \wedge \dots \wedge \frac{d\zeta_d}{\zeta_d} \quad (1)$$

в $\mathbb{C}^d$ является ядром для набора Z_Δ .

ПРИМЕР 1. Проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ естественно представляется в виде фактор-пространства $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/G$, где G – группа растяжений, изоморфная $\mathbb{T}$. Форма объема ω_{FS}^n на $\mathbb{CP}^n$, ассоциированная с метрикой Фубини–Штуди ω_{FS} , определяет на $\mathbb{C}^{n+1}$ дифференциальную $(n+1, n)$ -форму $\omega_{FS}^n \wedge \frac{d\zeta_{n+1}}{\zeta_{n+1}}$, с точностью до знака совпадающую с формой Бохнера–Мартинелли в $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\eta = \frac{\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \bar{\zeta}_k d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta}{(|\zeta_1|^2 + \dots + |\zeta_{n+1}|^2)^{n+1}}.$$

ПРИМЕР 2. Прямое произведение проективных пространств $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m$ является торическим многообразием, и форма объема $\omega_{FS}^n(\zeta) \wedge \omega_{FS}^m(\xi)$ на нем, умноженная на $\frac{d\zeta_{n+1}}{\zeta_{n+1}} \wedge \frac{d\xi_{m+1}}{\xi_{m+1}}$, дает $(n+m+2, n+m)$ -форму в $\mathbb{C}^{n+m+2}$, с точностью до знака совпадающую с внешним произведением форм Бохнера–Мартинелли в $\mathbb{C}_\zeta^{n+1}$ и $\mathbb{C}_\xi^{m+1}$.

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1. Гладкое компактное торическое многообразие X_Δ вкладывается в некоторое компактное торическое многообразие $\tilde{X}$ подобно тому, как $\mathbb{P}_{n-1}$ естественно вкладывается в $\mathbb{P}_n$ в виде бесконечно удаленной гиперповерхности. Однако в [1] пока-

зывается, что в торическом случае X_Δ есть полное пересечение $r = d - n$ торических гиперповерхностей $\mathcal{X}_i = \{\zeta_{n+i} = 0\}$, $i = 1, \dots, r$, объединение которых есть раздутие Z в $\mathbb{C}^d \subset \tilde{X}$.

Заметим, что форма (1) полумероморфна, с полярными сингулярностями на гиперповерхностях $\mathcal{X}_i$, поэтому по формуле Лере $\int_{\tilde{\gamma}} \eta = (2\pi i)^r \int_{X_\Delta} \text{Res}^r(\eta)$, где $\gamma \subset \mathbb{C}^d \setminus Z$ есть r -кратная кограница Лере над циклом $X_\Delta \subset \tilde{X}$. Форма-вычет $\text{Res}^r(\eta)$ есть форма объема ω , и интеграл справа отличен от нуля. Так как η замкнута, это доказывает теорему.

Существует естественная конструкция формы объема на торическом многообразии, ассоциированном с многогранником Δ . Рассмотрим для этого полином Лорана $P(z) = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha z^\alpha$ с неотрицательными коэффициентами и многогранником Ньютона, совпадающим с Δ . Обозначим целые точки многогранника через $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ и определим отображение $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{P}_N$ формулой $z \mapsto (\sqrt{c_{\alpha_0}} z^{\alpha_0} : \dots : \sqrt{c_{\alpha_N}} z^{\alpha_N})$.

ТЕОРЕМА 2. *Форма $\omega = f^*(\omega_{FS}^n)$ измеряет объем многообразия X_Δ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение f продолжается во все гладкие точки X_Δ , и замыкание образа $\mathbb{T}^n$ является конечным накрытием $X_\Delta \subset \mathbb{P}_N$ [3]. Поэтому ω есть сужение формы ω_{FS}^n на всюду плотное подмножество $f(\mathbb{T}^n)$ многообразия X_Δ и измеряет его объем.

По теореме Кушниренко $\left(\frac{i}{2}\right)^n \int_{\mathbb{T}^n} \omega = \pi^n \text{Vol}(\Delta)$. Заметим, что интегрирование ω по угловым координатам в равенстве приводит к формуле Пассаре для объема многогранников [4].

Цикл γ , интерпретированный в теореме 1 как r -кратная кограница Лере над X_Δ , может быть описан более точно. Именно, многообразие X_Δ допускает симплектическую редукцию и поэтому представимо в виде $\mu^{-1}(\rho)/G_{\mathbb{R}}$, где $G_{\mathbb{R}}$ — вещественная часть группы G , μ — моментное отображение, ассоциированное с действием $G_{\mathbb{R}}$ на $\mathbb{C}^n \setminus Z$, а ρ — произвольная точка из внутренней некоторого конуса K в двойственной алгебре Ли группы $G_{\mathbb{R}}$. В рассматриваемом случае эта алгебра естественно изоморфна $H^2(X_\Delta, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^r$, а конус K , описываемый линейными неравенствами $l_k(t) \geq 0$, $k = 1, \dots, s$, является конусом классов кэлеровых форм на X_Δ и непуст. Благодаря такому представлению X_Δ , цикл $\mu^{-1}(\rho)$ может выступать в качестве кратной кограницы Лере γ . Пусть $V = (d \times n)$ -матрица, строками которой являются целочисленные векторы нормалей к d граням Δ . Обозначим через A целочисленную $(r \times d)$ -матрицу, строки которой образуют $\mathbb{Z}$ -базис решетки соотношений между строками матрицы V . Тогда γ задается равенствами

$$a_{i1}|\zeta_1|^2 + \dots + a_{id}|\zeta_d|^2 = \rho_i, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2)$$

Обозначим через U_ρ ограниченную область (полиэдр) в $\mathbb{C}^d$, заданную r неравенствами, полученными из (2) заменой знаков равенства на знаки “меньше”. Рассмотрим подобласть $D \subset U_\rho$, определенную следующим образом. Для каждого $k = 1, \dots, s$ существует единственное тождество для точек γ вида $\sum_{I_k} |\zeta_i|^2 - \sum_{J_k} b_j |\zeta_j|^2 = l_k(\rho)$ с неотрицательными b_j . Тогда область D зададим системой неравенств $\sum_{I_k} |\zeta_i|^2 < l_k(\rho)$. Форма (1) является воспроизводящим ядром, так как для пары областей (U_ρ, D) справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $f \in \mathcal{O}(\overline{U_\rho})$. Тогда для любой точки $z \in D$*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^d \text{Vol}(\Delta)} \int_{\gamma} f(\zeta) \eta(\zeta - z).$$

Отметим, что полученное интегральное представление отлично от предложенного в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. K. Tsikh. Toric residues // Proceedings of the Conference “Nordan 3”. Stockholm: Stockholm University, 1999. [2] D. A. Cox // Proc. Sympos. Pure Math. 1997. V. 62. Part 2. P. 389–436. [3] T. Oda. Convex Bodies and Algebraic Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1988. [4] M. Passare // Adv. Stud. Pure Math. 2004. V. 42. P. 263–268. [5] A. A. Кытманов // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44. № 2. С. 358–371.