Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Эстеров, Индексы 1-форм, результаты и многогранники Ньютона, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 2, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1425>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 18:09:53

ИНДЕКСЫ 1-ФОРМ, РЕЗУЛЬТАНТЫ И МНОГОГРАННИКИ НЬЮТОНА

А. И. ЭСТЕРОВ

В этой работе индекс пересечения алгебраического многообразия $R \subset \mathbb{C}^m$ специального вида с образом ростка аналитического отображения $F: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ выражается через многогранники Ньютона компонент F при условии, что главные части компонент находятся в общем положении. Частными случаями индексов пересечения такого типа являются различные обобщения индекса Пуанкаре–Хопфа нуля векторного поля на случай 1-форм на особых многообразиях (например, индекс Гусейн-Заде–Эбелинга [1]). В качестве следствия получается также описание многогранника Ньютона многомерного результата, обобщающее результаты из [2] и [3].

Определим “относительный” вариант смешанного объема многогранников, необходимый для формулировки результата. Будем говорить, что выпуклый (не обязательно ограниченный) многогранник $A \subset \mathbb{R}^n$ похож на конус с вершиной $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, если $A = \Gamma + A'$, где $A' \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченный многогранник. Рассмотрим множество $\mathcal{M}_\Gamma$ всех упорядоченных пар многогранников (A, B) , похожих на конус $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, таких что симметрическая разность $A \Delta B$ ограничена. Это множество – полугруппа относительно сложения пар $(A, B) + (C, D) = (A + C, B + D)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Объемом $V(A, B)$ пары многогранников $(A, B) \in \mathcal{M}_\Gamma$ назовем разность объемов множеств $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Смешанным объемом пар многогранников называется симметричная полилинейная функция $\text{Vol}_\Gamma: \underbrace{\mathcal{M}_\Gamma \times \dots \times \mathcal{M}_\Gamma}_n \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\text{Vol}_\Gamma((A, B), \dots, (A, B)) = V(A, B)$ для любой пары $(A, B) \in \mathcal{M}_\Gamma$.

Доказательство существования и единственности, основные свойства и способы вычисления смешанного объема многогранников легко переносятся на смешанный объем пар. Для множества $\Sigma \subset \mathbb{Z}^n$ обозначим через $\mathbb{C}[\Sigma]$ множество многочленов Лорана $\{\sum_{a \in \Sigma} c_a t^a \mid c_a \in \mathbb{C}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для конечных множеств $\Sigma_i \subset \mathbb{Z}^N, i = 1, \dots, I$, замыкание множества

$$\{(\varphi_1, \dots, \varphi_I) \mid \varphi_i \in \mathbb{C}[\Sigma_i], \exists t \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^N : \varphi_1(t) = \dots = \varphi_I(t) = 0\} \subset \mathbb{C}[\Sigma_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{C}[\Sigma_I]$$

назовем результатным многообразием $R(\Sigma_1, \dots, \Sigma_I)$.

В обозначениях этого определения рассмотрим росток голоморфного отображения

$$F: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}[\Sigma_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{C}[\Sigma_I], R(\Sigma_1, \dots, \Sigma_I)),$$

$$F(x) = \left(\sum_{a \in \Sigma_1} f_{(a,1)}(x) t^a, \dots, \sum_{a \in \Sigma_I} f_{(a,I)}(x) t^a \right),$$

заданный ростками $f_{(a,i)}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, i = \{1, \dots, I\}, a \in \Sigma_i$, где $n = \text{codim } R(\Sigma_1, \dots, \Sigma_I)$. В случае общего положения главных частей ростков функций $f_{(a,i)}$ индекс пересечения

$$F(\mathbb{C}^n) \circ R(\Sigma_1, \dots, \Sigma_I) \quad (*)$$

выражается через многогранники Ньютона $\Delta_{f_{(a,i)}}$ функций $f_{(a,i)}$. Для точной формулировки введем следующие обозначения. Пусть $\text{Conv}(A)$ – выпуклая оболочка множества $A, \mathbb{R}_+^n \subset \mathbb{R}^n$ – положительный октант. Рассмотрим многогранники $\Delta_i = \text{Conv}(\Sigma_i) \times \mathbb{R}_+^n \subset \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^n$ и содержащиеся в них $\tilde{\Delta}_i = \text{Conv}(\bigcup_{(i,a), a \in \Sigma_i} \{a\} \times \Delta_{f_{(a,i)}}) \subset \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^n$. Через $\text{Lin}(A_1, \dots, A_J)$ обозначим минимальную подрешетку в $\mathbb{Z}^N$, в которую параллельными переносами помещаются множества $A_i \subset \mathbb{Z}^N, i = 1, \dots, J$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Набор множеств $\Sigma_i \subset \mathbb{Z}^N$, $i = 1, \dots, I$, будем называть существенным, если $J - \text{rk Lin}(\Sigma_{i_1}, \dots, \Sigma_{i_J}) < I - N$ для любого поднабора $\{i_1, \dots, i_J\} \subset \{1, \dots, I\}$ и $\text{Lin}(\Sigma_1, \dots, \Sigma_I) = \mathbb{Z}^N$.

ТЕОРЕМА. Пусть в обозначениях, введенных выше, $\Sigma_i \subset \mathbb{Z}^N$, $i = 1, \dots, I$, — существенный набор конечных множеств и множества $(\Delta_i \setminus \tilde{\Delta}_i)$, $i = 1, \dots, I$, ограничены. Тогда:

- 1) $\text{codim } R(\Sigma_1, \dots, \Sigma_I) = I - N$;
- 2) если главные части ростков функций $f_{(a,i)}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $a \in \Sigma_i$, в общем положении, то индекс пересечения $(*)$ определен и равен $I! \text{Vol}_{\{0\} \times \mathbb{R}_+^n}((\Delta_1 \setminus \tilde{\Delta}_1), \dots, (\Delta_I \setminus \tilde{\Delta}_I))$;
- 3) в общем случае индекс $(*)$ не меньше указанного значения или не определен.

Теорема сформулирована для случая, когда набор $\Sigma_i \subset \mathbb{Z}^N$, $i = 1, \dots, I$, существенный, так как общий случай легко сводится к этому. Доказательство основано на технике торических разрезов Хованского [4]. Пункт 1) в случае $I = N + 1$ доказан в [3]. Приведем теперь примеры приложений этого результата.

1. Пусть $f_i: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $i = 1, \dots, k$, — ростки голоморфных функций и $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j dx_j$ — росток голоморфной 1-формы на $(\mathbb{C}^n, 0)$. Рассмотрим отображение

$$F = ((\omega, df_1, \dots, df_k), (f_1, \dots, f_k)): (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n \times (k+1)} \oplus \mathbb{C}^k, R \times \{0\}),$$

где $(\omega, df_1, \dots, df_k)$ — матрица размера $n \times (k+1)$ с голоморфными коэффициентами и $R \subset \mathbb{C}^{n \times (k+1)}$ — множество вырожденных матриц в пространстве матриц размера $n \times (k+1)$. Заметим, что $(\mathbb{C}^{n \times (k+1)} \oplus \mathbb{C}^k, R \times \{0\}) = (\mathbb{C}[\Sigma_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{C}[\Sigma_I], R(\Sigma_1, \dots, \Sigma_I))$, где $I = n + k$, $\Sigma_1 = \dots = \Sigma_n$ — стандартный симплекс в $\mathbb{Z}^k$ и $\Sigma_{n+1} = \dots = \Sigma_{n+k}$ — точка в $\mathbb{Z}^k$. Легко видеть, что в этом случае индекс пересечения $(*)$ равен индексу Гусейн-Заде–Эбелинга ограничения 1-формы ω на полное пересечение $\{f_1 = \dots = f_k = 0\}$, определенному в [1] (в частности, эти две величины корректно определены одновременно). Таким образом, сформулированная выше теорема позволяет вычислять индекс Гусейн-Заде–Эбелинга в терминах многогранников Ньютона ростков функций f_i , $i = 1, \dots, k$, и компонент 1-формы ω_j , $j = 1, \dots, n$.

2. Пусть $I = N + 1$ в условиях сформулированной выше теоремы, тогда неприводимая гиперповерхность $R(\Sigma_1, \dots, \Sigma_I)$ задается неприводимым многочленом, который называется обобщенным результатом. Для ростка отображения $F: (\mathbb{C}^1, 0) \rightarrow (\mathbb{C}[\Sigma_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{C}[\Sigma_I], 0)$ с компонентами $f_{(a,i)} = \sum_{j=k(a,i)}^{\infty} c_{j,(a,i)} s^j$, где $a \in \Sigma_i$, $k(a,i) \subset \mathbb{N}$ и числа $c_{k(a,i),(a,i)}$ в общем положении, индекс пересечения $(*)$ равен значению опорной функции многогранника Ньютона обобщенного результата на ковекторе с компонентами $k(a,i)$. Таким образом, сформулированная выше теорема дает описание этого многогранника Ньютона.

Я благодарен С. М. Гусейн-Заде за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также А. Г. Хованскому за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Ebeling, S. M. Gusein-Zade // Mosc. Math. J. 2003. V. 3. №2. P. 439–455.
 [2] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants. Boston: Birkhäuser, 1994. [3] B. Sturmfels // J. Algebraic Combin. 1994. V. 3. №2. P. 207–236. [4] А. Г. Хованский // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11. №4. С. 56–67.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Представлено С. М. Гусейн-Заде
Принято редколлегией 25.01.2005