Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Важенин, А. Г. Пинус, Элементарная классификация и разрешимость теории производных структур, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 3, 3–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1428>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:03:14

УДК 512.8

**ЭЛЕМЕНТАРНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ И
РАЗРЕШИМОСТЬ ТЕОРИЙ ПРОИЗВОДНЫХ СТРУКТУР****Ю. М. ВАЖЕНИН**, А. Г. ПИНУС

В работе приводится обзор результатов, связанных с элементарными теориями производных структур классических и универсальных алгебр. Сформулирован ряд открытых вопросов.

Библиография: 129 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§0. Введение	4
0.1. Мотивировки	4
0.2. Иерархии языков и теорий	6
0.3. Границы разрешимости и различимости	7
0.4. Метод интерпретации	11
§1. Линейные преобразования векторных пространств и модулей	11
1.1. Матричные группы и кольца	11
1.2. Полугруппы эндоморфизмов и группы автоморфизмов бесконечномерных векторных пространств	16
§2. Производные структуры полугрупп и групп	17
2.1. Решетки подполугрупп и подгрупп	17
2.2. Решетки конгруэнций и близкие к ним производные структуры	19
2.3. Степени полугрупп	20
§3. Преобразования упорядоченных множеств и графов	20
3.1. Полугруппы эндоморфизмов и направленных преобразований	20
3.2. Симметрические полугруппы и группы	22
§4. Производные структуры булевых алгебр	23
4.1. Группы автоморфизмов булевых алгебр	23
4.2. Решетки конгруэнций и подалгебр булевых алгебр	26
§5. Производные структуры свободных алгебр	27
§6. Производные структуры топологических пространств	33
Список литературы	35

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-01-00258).

§ 0. Введение

0.1. Мотивировки. *Производной структурой* данной алгебраической системы $\mathfrak{A}$ называется алгебраическая система $D(\mathfrak{A})$, однозначно определяемая по $\mathfrak{A}$ и несущая в себе ту или иную информацию о строении системы $\mathfrak{A}$. Для произвольных алгебраических систем $\mathfrak{A}$ в качестве их производных структур традиционно и всесторонне рассматривались группы автоморфизмов $\text{Aut}(\mathfrak{A})$, моноиды эндоморфизмов $\text{End}(\mathfrak{A})$, решетки подсистем $\text{Sub}(\mathfrak{A})$, решетки конгруэнций $\text{Con}(\mathfrak{A})$, полугруппы внутренних изоморфизмов $\text{Iso } \mathfrak{A}$ и т. п. В более частных ситуациях в качестве производных структур изучались и другие, связанные со спецификой алгебраической системы $\mathfrak{A}$, производные алгебраические системы $D(\mathfrak{A})$: для колец (полей) $\mathfrak{A}$ – всевозможные матричные кольца над $\mathfrak{A}$, для графов (упорядоченных множеств) – различные полугруппы их преобразований и т. д.

Свое начало изучение производных структур берет еще в XIX веке, и соответствующая тематика присутствует ныне практически во всех разделах алгебры, занимая в них центральные места. Более того, идея введения и исследования производных структур имеет общематематическое значение. В самом деле, такие структуры возникают не только в связи с изучением алгебраических систем, но и при рассмотрении объектов иного рода в самых разных областях математики. Упомянем, например, фундаментальные группы и алгебры замыканий топологических пространств, полугруппы непрерывных линейных операторов банаховых пространств, синтаксические моноиды кодов и т. д. При этом часто возникают плодотворные взаимосвязи между различными областями математики: топологические и иные системы изучаются с помощью алгебраических производных структур алгебраическими методами, а алгебраические системы – с помощью топологических и иных систем (к примеру: булевы алгебры – с помощью их стоуновских пространств).

Производная структура $D(\mathfrak{A})$ данного типа D обычно несет существенную информацию о системе $\mathfrak{A}$ и доставляет новый, нередко достаточно удобный язык, на котором можно исследовать строение системы $\mathfrak{A}$. Этим объясняется широта круга вопросов, связанных с рассмотрением взаимосвязей свойств исходной алгебраической системы $\mathfrak{A}$ и соответствующей производной структуры $D(\mathfrak{A})$. Образцы исследования таких вопросов содержатся во многих работах, среди которых упомянем, например, труды Р. Бэра [1], Ж. Лаллемана [49], А. Г. Пинуса [80], Б. И. Плоткина [86], М. Судзуки [105], Д. А. Супруненко [106], Л. Н. Шеврина и А. Я. Овсянникова [102].

Одним из основных вопросов, изучаемых в указанных и многих других публикациях, является *вопрос определимости системы $\mathfrak{A}$ своей производной структурой $D(\mathfrak{A})$* : следует ли из изоморфизма $D(\mathfrak{A}) \cong D(\mathfrak{B})$ производных структур данного типа D изоморфизм (или иная, достаточно тесная связь, см., к примеру, [78]) систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$? Поскольку утвердительный ответ на этот вопрос встречается относительно редко, обычно рассматривается следующий вопрос: найти необходимые и достаточные условия на алгебраические системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, при которых имеет место изоморфизм производных систем $D(\mathfrak{A})$ и $D(\mathfrak{B})$. Оба этих вопроса можно трактовать как задачу *классификации исходных систем с точностью до изоморфизма производных структур типа D* .

Развитие математической логики и теории моделей вызвало к жизни целый ряд важных и естественных проблем. Одной из центральных среди них является *проблема элементарной классификации*, т. е. классификации алгебраических систем с

точностью до совпадения их теорий в языке логики первого порядка. Актуальность указанной проблемы убедительно и выпукло продемонстрирована в книгах Ю. Л. Ершова [31], Ю. Л. Ершова и Е. А. Палютина [33]. Применив к производным структурам понятие элементарной эквивалентности, мы получаем общую формулировку *проблемы элементарной классификации производных структур*:

найти необходимые и достаточные условия на алгебраические системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ данного класса, при которых имеет место элементарная эквивалентность $D(\mathfrak{A}) \equiv D(\mathfrak{B})$ их производных структур типа D .

Другим важным вопросом, связанным, в частности, с элементарной классификацией, является *проблема разрешимости теорий первого порядка производных структур*:

существует ли алгоритм, который по любому предложению φ сигнатуры производной структуры $D(\mathfrak{A})$ из данного языка L (фрагмента языка первого порядка) отвечает на вопрос об истинности φ на системе $D(\mathfrak{A})$, другими словами, разрешима ли теория $LD(\mathfrak{A})$?

Обзор и систематизация результатов по этим двум и близким к ним проблемам и является целью нашей работы.

Заметим также, что с проблемой элементарной классификации производных структур связаны понятия *чисел Левенгейма* и *Ханфа*. Напомним, что числом Левенгейма (Ханфа) для класса K алгебраических систем называется наименьший кардинал k такой, что для любой системы $\mathfrak{A} \in K$ существует элементарно эквивалентная системе $\mathfrak{A}$ система $\mathfrak{A}' \in K$ такая, что $|\mathfrak{A}'| \leq k$ (если $|\mathfrak{A}| \geq k$, то существуют K -системы, элементарно эквивалентные системе $\mathfrak{A}$, произвольно большой мощности). В случае аксиоматизируемости класса K в логике первого порядка в силу теоремы Левенгейма–Сколема–Тарского об элементарных подсистемах и элементарных расширениях числа Левенгейма и Ханфа для K совпадают и равны $\aleph_0$. В случае же неаксиоматизируемости класса K , что чаще всего имеет место при изучении классов производных структур, числа Левенгейма и Ханфа дают существенную информацию о строении отношения элементарной эквивалентности на классе производных структур. Мы слегка подкорректируем определения чисел Левенгейма и Ханфа при работе с классами $D(K) = \{D(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in K\}$ производных структур. *D-числом Левенгейма (Ханфа)* для класса K назовем наименьший кардинал k такой, что для любой системы $\mathfrak{A} \in K$ существует система $\mathfrak{A}' \in K$ такая, что $D(\mathfrak{A}) \equiv D(\mathfrak{A}')$ и $|\mathfrak{A}'| \leq k$ (если $|\mathfrak{A}| \geq k$, то существуют K -системы $\mathfrak{A}'$ как угодно большой мощности такие, что $D(\mathfrak{A}) \equiv D(\mathfrak{A}')$). Очевидно, что мощности элементарно D -определимых K -систем не превышают минимального из D -чисел Левенгейма и Ханфа для класса K .

Работа над данным обзором была начата авторами в 2000 г. Неожиданный, скоропостижный уход из жизни Ю. М. Важенина в 2003 г. на некоторое время прервал эту работу. Тем не менее второй автор считает своим долгом завершить задуманное и посвятить эту работу памяти Юрия Михайловича – прекрасного человека, известного алгебраиста. Хочу также выразить свою благодарность Ю. В. Нагребечкой, О. В. Белеградеку и В. А. Толстых за помощь в работе над разделами 1.1 и 1.2.

0.2. Иерархии языков и теорий. Для уточнения формулировок рассматриваемых вопросов определим понятия иерархий языков и теорий первого порядка. Они были введены первым из авторов обзора в [121] и подвергнуты детальному исследованию в его работах [122], [123].

Пусть $\mathcal{E}$ – совокупность всех формул логики первого порядка фиксированной сигнатуры σ , записанных в пренексной нормальной форме. *Языком* сигнатуры σ будем называть любое подмножество множества $\mathcal{E}$. Само $\mathcal{E}$ назовем *элементарным языком*. Пусть $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $Q_i \neq Q_{i+1}$ для $i \in \{1, \dots, p-1\}$ и $r, s, t \in \{0, 1\}$. Определим язык $Q_1 \dots Q_p \neg^r \wedge^s \vee^t$, где $z^1 = z$ и z^0 – пустой символ для $z \in \{\neg, \wedge, \vee\}$, следующим образом. Во-первых, блочная схема кванторной приставки каждой из формул языка $Q_1 \dots Q_p \neg^r \wedge^s \vee^t$ является подсловом слова $Q_1 \dots Q_p$. Во-вторых, связка $\neg, \wedge, \vee$ допускается в бескванторной части ξ этих формул, если соответственно $r = 1, s = 1, t = 1$, и не допускается, если соответственно $r = 0, s = 0, t = 0$. Обозначим, кроме того, через $\neg^r \wedge^s \vee^t$ бескванторный подязык языка $\forall \neg^r \wedge^s \vee^t$, через $\bar{\omega} \neg^r \wedge^s \vee^t$ – объединение $\bigcup_{p \in \omega} Q_1 \dots Q_p \neg^r \wedge^s \vee^t$, и пусть $\theta = \neg \wedge \vee$. Семейство SA всех языков вида $Q_1 \dots Q_p \neg^r \wedge^s \vee^t$, $\neg^r \wedge^s \vee^t$, $\bar{\omega} \neg^r \wedge^s \vee^t$ упорядочивается включением и называется *схемно-альтернативной иерархией языков*. Более бедной по сравнению с этой иерархией языков является *схемная иерархия*, т.е. семейство S всех языков вида $Q_1 \dots Q_p \theta$ и $\bar{\omega} \theta$, упорядоченное включением. Пусть $n \leq \omega$, $\bar{n} \theta = \{Q_1 \bar{x} \dots Q_p \bar{y} \xi \mid p \leq n\}$. *Переменной иерархией* называется упорядоченное включением семейство языков $V = \{\bar{n} \theta \mid n \leq \omega\}$. Наконец, *альтернативной* и *переменно-альтернативной иерархией* называются семейства $A = \{\bar{\omega} \neg^r \wedge^s \vee^t \mid r, s, t \in \{0, 1\}\}$ и $VA = \{X \cap Y \mid X \in V, Y \in A\}$ соответственно. *Тривиальной иерархией* называется одноэлементное семейство $\{\mathcal{E}\}$.

Вхождение формулы φ логики первого порядка в некоторый язык в рамках той или иной рассматриваемой иерархии говорит о сложности этой формулы в том или ином, специфическом для данной конкретной иерархии, смысле.

Пусть теперь K – некоторый класс алгебраических систем фиксированной сигнатуры σ и L – некоторый язык логики первого порядка. *Теорией класса K , ограниченной языком L (L -теорией класса K)*, называется совокупность LK всех тех предложений φ из L , которые истинны на каждой системе из K :

$$LK = \{\varphi \in L \mid \varphi\text{-предложение и для любой } \mathfrak{A} \in K \text{ имеет место } \mathfrak{A} \models \varphi\}.$$

Если теперь H – одна из определенных выше иерархий языков логики первого порядка, то через HK обозначим соответствующую иерархию теорий класса K , т.е. упорядоченную отношением теоретико-множественного включения совокупность

$$HK = \{LK \mid L \in H\}.$$

Целый ряд языков из самой богатой схемно-альтернативной иерархии хорошо известны и широко исследовались. Среди них: *элементарный язык $\mathcal{E}$* , *позитивный $\bar{\omega} \wedge \vee$* , *экзистенциальный $\exists \theta$* , *примитивный $\exists \neg \wedge$* , *сколемовский $\forall \exists \theta$* , *диофантов* или, по другой терминологии, *позитивно-примитивный $\exists \wedge$* , *универсальный $\forall \theta$* и *эквивалентный $\forall$* языки. Для четырех из них обычно используются следующие обозначения:

$$\bar{\omega} \wedge \vee = \mathcal{P}, \quad \exists \wedge = \mathcal{Q}, \quad \forall \theta = U, \quad \forall = I.$$

Названия языков переносятся на названия соответствующих теорий класса K . В связи с этим говорят об элементарной, позитивной, экзистенциальной, примитивной, сколемовской, диофантовой, универсальной и эквациональной теориях данного класса K алгебраических систем.

Представим диаграммы рассматриваемых иерархий языков логики первого порядка. Диаграммы тривиальной и схемной иерархии устроены предельно просто: первая одноэлементна, вторая – цепь типа $\omega + 1$. Диаграммы схемной, альтернативной, переменнo-альтернативной и схемно-альтернативной иерархий языков представлены на рис. 1–4.

0.3. Границы разрешимости и различимости. Сформулированные в разделе 0.1 проблемы L -классификации и разрешимости теорий производных структур зависят от рассматриваемого языка L , фиксируя который мы получаем формулировки конкретных проблем классификации и разрешимости. Так, например, возникает проблема элементарной классификации линейных групп и проблема разрешимости позитивной теории симметрической группы над счетным множеством. Такого сорта проблемы активно исследовались в 60–50-х годах XX века (см., например, обзоры [32], [48]). Накопленная здесь к середине 80-х годов информация сделала актуальной задачу нахождения границы разрешимости [48], корректная постановка которой в терминах критических теорий была впервые опубликована в работе [121].

Определенные в предыдущем разделе иерархии позволяют предельно точно сформулировать проблему нахождения границы разрешимости, решение которой дает описание всех, в рамках данной иерархии, разрешимых теорий рассматриваемого класса алгебраических систем. Этот же “иерархический” подход дает возможность сформулировать и проблему нахождения границы различимости, решение которой дает описание всех языков L из данной иерархии, которые различают алгебраические системы из рассматриваемого класса и для которых, стало быть, резонно исследовать проблему L -классификации. Приступим к формулировке указанных двух проблем.

Напомним, что теория LK называется *разрешимой*, если существует алгоритм, который по любому предложению $\varphi \in \mathcal{E}$ отвечает на вопрос о принадлежности φ теории LK . В противном случае, т.е. когда такого алгоритма не существует, теория LK называется *неразрешимой*.

Пусть H – одна из введенных в предыдущем разделе иерархий языков и HK – соответствующая иерархия теорий класса K алгебраических систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Теория $LK \in HK$ называется *H -критической*, если она является минимальной в иерархии HK неразрешимой теорией. *H -границей разрешимости класса K* называется множество

$$B_H(K) = \{L \in H \mid LK - H\text{-критическая теория}\}.$$

Поскольку, как легко понять, для любой из наших иерархий разрешимость наследуется для подтеорий, а неразрешимость – для надтеорий, а сами иерархии фундированы (не содержат бесконечно убывающих последовательностей языков), то описание границы разрешимости $B_H(K)$ равнозначно описанию в рамках иерархии HK всех разрешимых теорий класса K . Действительно, теория $LK \in HK$ разрешима тогда и только тогда, когда она не включает ни одну из теорий, входящих в $B_H(K)$.

Рис. 1

Рис. 2

Отношение совпадения L -теорий алгебраических систем из класса K задает естественное отношение эквивалентности $\equiv_L$ на классе K :

$$\mathfrak{A} \equiv_L \mathfrak{B} \text{ тогда и только тогда, когда } L\mathfrak{A} \equiv L\mathfrak{B}.$$

При этом каждая из рассматриваемых иерархий H определяет на классе K двойственную иерархию $\equiv_H$ отношений эквивалентности

$$\equiv_H = \{\equiv_L \mid L \in H\}.$$

Через $\triangle_K$ и ∇_K , как обычно, обозначим отношения изоморфизма и коллапса на классе K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Язык L иерархии языков H назовем K -различающим, если отношение $\equiv_L$ на K отлично от отношения ∇_K , иначе говоря, если существуют системы $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ из K такие, что $L\mathfrak{A} \neq L\mathfrak{B}$. Систему $\mathfrak{A}$ назовем L -определимой в классе K , если класс $\equiv_L$ -эквивалентности системы $\mathfrak{A}$ в K состоит только из систем, изоморфных $\mathfrak{A}$, т.е. если для любой системы $\mathfrak{B}$ из K равенство $L\mathfrak{B} = L\mathfrak{A}$ влечет изоморфизм $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$. Систему $\mathfrak{A}$ из K назовем *сильно L -определимой*, если существует L -предложение φ такое, что для любой K -системы $\mathfrak{B}$ условия $\mathfrak{B} \models \varphi$ и $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ равносильны. Минимальный в иерархии языков H K -различающий язык назовем *пограничным K -различающим языком*; H -границей различимости для класса K называется множество

$$N_H(K) = \{L \in H \mid L \text{ — пограничный } K\text{-различающий язык}\}.$$

Для каждой из введенных иерархий языков свойство “быть K -различающим” наследуется для надязыков, а свойство “не быть K -различающим” наследуется подязыками. Стало быть, язык $L \in H$ является K -различающим тогда и только тогда, когда он включает в себя хотя бы один из языков H -границы различимости $N_H(K)$ класса K .

В рамках данного обзора нас будут интересовать известные результаты и открытые проблемы, связанные с вопросами L -разрешимости, L -различимости, определения H -границ разрешимости, H -границ различимости, L -определимости, сильной L -определимости производных структур типа D в классах $D(K) = \{D(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in K\}$ для различных естественных классов K алгебраических систем, т.е. изучение возможностей использования элементарных теорий и их фрагментов для D -производных структур, с целью характеристики K -систем того либо иного класса K алгебраических систем. К примеру, описание отношения эквивалентности $\equiv_D^L$, индуцированного на классе K отношением $\equiv_L$ на классе $D(K)$:

$$\mathfrak{A} \equiv_D^L \mathfrak{B} \Leftrightarrow D(\mathfrak{A}) \equiv_L D(\mathfrak{B});$$

описание в тех или иных приемлемых терминах K -систем, D -производные структуры которых являются L -определимыми, строго L -определимыми в классе $D(K)$, и пр. Большинство известных результатов, допускающих интерпретацию в рамках данной проблематики, касаются различных классов K колец, полугрупп, векторных пространств, графов и упорядоченных множеств, булевых алгебр, свободных алгебр различных многообразий и др.

Заметим, наконец, что введенные выше иерархии языков не содержат бесконечных несравнимых последовательностей (на самом деле их ширина не превышает числа 16). В силу чего для любой из этих иерархий H любые H -границы разрешимости и различимости суть конечные совокупности языков H -иерархии и, значит, допускают возможность явного описания.

Важной целью обзора, имеющей, по нашему мнению, методологическое значение, является “иерархический” взгляд на уже опубликованные результаты и унификация соответствующей терминологии. Движение к этой цели позволяет по-новому осмыслить давно известные проблемы и открыть продуктивные пути для их дальнейшего развития и исследования.

0.4. Метод интерпретации. Доказательство большинства рассмотренных далее результатов основано на использовании хорошо известного в своих самых различных вариациях *метода интерпретации* одного класса K_1 алгебраических систем с помощью некоторого языка L в другом классе K_2 . Мы остановимся здесь лишь на самой простой формулировке этого понятия, отсылая за точными определениями различных вариаций понятий интерпретации к специальной литературе по теории моделей [31], [32].

Пусть K_1 — это некоторый класс универсальных алгебр чисто функциональной сигнатуры $\sigma_1 = \langle f_1^{n_1}, \dots, f_r^{n_r} \rangle$ без констант, а K_2 — класс универсальных алгебр сигнатуры $\sigma_2 = \langle g_1^{m_1}, \dots, g_l^{m_l} \rangle$ с теми же ограничениями на σ_2 . Эти ограничения на сигнатуру рассматриваемых алгебраических систем несущественны и вызваны только целью упрощения формулировок. Пусть L — некоторый элементарный язык. Тогда *класс K_2 допускает L -интерпретацию в классе K_1* , если существуют L -формулы

$$\phi_1(x_1, \dots, x_{m_1}, y), \dots, \phi_l(x_1, \dots, x_{m_l}, y)$$

сигнатуры σ_1 такие, что для любой K_1 -алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ алгебра $\mathfrak{A}\phi = \langle A; \sigma_2 \rangle$ принадлежит классу K_2 и любая K_2 -алгебра $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma_2 \rangle$ изоморфна алгебре вида $\mathfrak{A}\phi$ для некоторой K_1 -алгебры $\mathfrak{A}$. Здесь сигнатурные функции алгебры $\mathfrak{A}\phi$ определяются на множестве A с помощью L -формул $\phi_1, \dots, \phi_l$.

В случае, когда существуют L -интерпретации как класса K_1 в K_2 , так и класса K_2 в K_1 , будем говорить о L -биинтерпретируемости классов K_1 и K_2 друг в друге.

Подобная “строгая” формулировка понятия интерпретируемости чаще всего применима при изучении отношения L -эквивалентности $\equiv_L$ на различных классах алгебраических систем. В исследовании вопросов разрешимости (при доказательстве неразрешимости) чаще применяется понятие *относительной элементарной определимости* одного класса систем в другом (родственное понятию интерпретации), описанное, к примеру, в монографии Ю. Л. Ершова [31].

§ 1. Линейные преобразования векторных пространств и модулей

1.1. Матричные группы и кольца. Исторически первыми результатами, касающимися элементарных теорий производных структур, были результаты о группах линейных преобразований векторных пространств и модулей над ассоциативными кольцами, т.е. результаты, касающиеся элементарных теорий матричных групп. Пусть R — некоторое ассоциативное кольцо с единицей. Здесь и далее через $GL(k, R)$ и $SL(k, R)$ обозначены общая линейная и специальная линейная группы матриц порядка k над кольцом R ; через $UT(k, R)$ — подгруппа унитарных матриц группы $GL(k, R)$; через $M(k, R)$ — кольцо всех матриц порядка k над R ; наконец, через $NT(k, R)$ — кольцо нильтреугольных матриц из $M(k, R)$. Для кольца R через R^* обозначим двойственное к нему кольцо.

Первой работой по элементарным свойствам производных структур явилась работа А. И. Мальцева [53], в которой исследовались элементарные теории матричных групп над полями и кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел.

ТЕОРЕМА 1.1.1 (А. И. Мальцев [53]). *Для любых полей F , P нулевой характеристики и любых натуральных чисел k и l следующие условия эквивалентны:*

- (1) $GL(k, F) \equiv GL(l, P)$ (при $k, l \geq 2$);

(2) $SL(k, F) \equiv SL(l, P)$ (при $k, l \geq 3$);

(3) $F \equiv P$ и $k = l$.

Иначе говоря, в элементарных теориях групп $GL(k, F)$ и $SL(k, F)$ выразимы и само поле F , и размер матриц k .

ТЕОРЕМА 1.1.2 (А.И. Мальцев [53]). Для любых натуральных чисел k и l , больших 2, следующие условия эквивалентны:

(1) $GL(k, \mathbb{Z}) \equiv GL(l, \mathbb{Z})$;

(2) $SL(k, \mathbb{Z}) \equiv SL(l, \mathbb{Z})$;

(3) $k = l$.

Здесь $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел.

ТЕОРЕМА 1.1.3 (А.И. Мальцев [53]). Пусть F – поле нулевой характеристики и k – любое натуральное число. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) элементарная теория $\mathcal{E}GL(k, F)$ разрешима ($k \geq 2$);

(2) элементарная теория $\mathcal{E}SL(k, F)$ разрешима ($k \geq 3$);

(3) элементарная теория $\mathcal{E}F$ разрешима.

ТЕОРЕМА 1.1.4 (А.И. Мальцев [53]). Для любого натурального $k > 2$ элементарные теории $\mathcal{E}GL(k, \mathbb{Z})$ и $\mathcal{E}SL(k, \mathbb{Z})$ неразрешимы.

Таким образом, уже в этой первой работе А.И. Мальцевым были поставлены и полностью решены проблемы классификации полей характеристики нуль, векторных пространств над этими полями и модулей над кольцом целых чисел с помощью теорий производных структур – матричных групп в элементарном языке (единственном языке иерархии E), а также вопросы разрешимости элементарных теорий этих матричных групп.

Результаты А.И. Мальцева получили дальнейшее развитие в работах [25], [27], [28], [8], где получены соответствующие утверждения для матричных групп и матричных колец над телами.

ТЕОРЕМА 1.1.5 (К.И. Бейдар, А.В. Михалев [8]). Для произвольных тел C , D и любых натуральных чисел k , l , больших 2, следующие условия эквивалентны:

(1) $GL(k, C) \equiv GL(l, D)$;

(2) $k = l$ и либо $C \equiv D$, либо $C \equiv D^*$.

ТЕОРЕМА 1.1.6 (В.Г. Дурнев [27]). Для любого тела C и любого натурального числа k , большего двух, следующие условия эквивалентны:

(1) элементарная теория $\mathcal{E}GL(k, C)$ разрешима;

(2) элементарная теория $\mathcal{E}C$ разрешима.

ТЕОРЕМА 1.1.7 (К.И. Бейдар, А.В. Михалев [8]). Пусть K , S – первичные кольца, содержащие 1 ($\frac{1}{2}$), и k , l – натуральные числа, большие трех (двух). Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $GL(k, R) \equiv GL(l, S)$;

(2) $M(k, R) \equiv M(l, S)$ либо $M(l, R) \equiv M(k, S)^*$.

Таким образом, для полей, тел и ряда колец была получена достаточно исчерпывающая информация о проблемах классификации и разрешимости теорий производных структур матричных групп в языке тривиальной иерархии E – в элементарном языке $\mathcal{E}$.

Среди открытых и естественно возникающих в данном контексте вопросов отметим вопрос полного описания ассоциативных колец R , для которых условия “разрешима теория $\mathcal{E}R$ ” и “разрешима теория $\mathcal{E}GL(k, R)$ ” эквивалентны при $k > 2$.

В связи с тем, что ряд результатов о равносильности элементарной эквивалентности колец R и S и элементарной эквивалентности групп $GL(k, R)$ и $GL(k, S)$ доказывался путем интерпретации кольца R в группе $GL(k, R)$, представляет также интерес полное описание класса ассоциативных колец R , которые допускают элементарную интерпретацию в группе $GL(K, R)$ при $k > 2$.

К настоящему времени накопилось достаточно много результатов, связанных с матричными группами над целыми числами для иных языков рассматриваемых иерархий.

ТЕОРЕМА 1.1.8 (Ю. В. Нагребецкая [65]). *Для любых натуральных чисел, больших чем два, следующие условия эквивалентны:*

- (1) $\forall \theta \ GL(k, \mathbb{Z}) = \forall \theta \ GL(l, \mathbb{Z})$;
- (2) $\forall \theta \ SL(k, \mathbb{Z}) = \forall \theta \ SL(l, \mathbb{Z})$;
- (3) $k = l$.

ТЕОРЕМА 1.1.9 (А. М. Слободской [103]). *Для любых натуральных чисел k и l имеет место равенство*

$$\exists \forall \wedge \vee GL(k, \mathbb{Z}) = \exists \forall \wedge \vee GL(l, \mathbb{Z}).$$

ТЕОРЕМА 1.1.10 (А. М. Слободской [103]). *Теория $\forall \neg \vee GL(3, \mathbb{Z})$ неразрешима.*

ТЕОРЕМА 1.1.11 (В. Г. Дурнев [28]). *Теории $\forall \exists \theta SL(k, \mathbb{Z})$ неразрешимы для любого $k > 2$.*

ТЕОРЕМА 1.1.12 (Ю. В. Нагребецкая [67]). *Теории*

$$\exists \forall \wedge \vee GL(k, \mathbb{Z}) \quad \text{и} \quad \exists \forall \wedge \vee SL(k, \mathbb{Z})$$

разрешимы для любого натурального k .

В работах В. Г. Дурнева [28], Ю. М. Важенина и Ю. В. Нагребецкой [126] доказан еще большой ряд утверждений, связанных с теориями групп $GL(k, \mathbb{Z})$ и $SL(k, \mathbb{Z})$ в различных элементарных языках.

Приведенные результаты позволяют ставить вопрос о нахождении границ разрешимости для групп $GL(k, \mathbb{Z})$, $SL(k, \mathbb{Z})$ в иерархии SA .

В работе Ю. В. Нагребецкой [66] доказано, что для любых $k \geq 2$, $l > 2$ имеет место: $\exists \forall \wedge \vee SL(k, \mathbb{Z}) = \exists \forall \wedge \vee SL(l, \mathbb{Z})$, $\forall \exists SL(2, \mathbb{Z}) \neq \forall \exists SL(l, \mathbb{Z})$, $\exists \forall \neg SL(2, \mathbb{Z}) \neq \exists \forall \neg SL(l, \mathbb{Z})$. Наряду с приведенными выше результатами это влечет следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1.13 (Ю. В. Нагребецкая [66]). *SA -границей различимости для класса $\{SL(k, \mathbb{Z}) \mid k \geq 2\}$ является множество $\{\forall \exists, \exists \forall \neg, \forall \neg \vee, \exists \neg \wedge\}$.*

Ряд результатов по вопросам разрешимости элементарных теорий групп унитарных матриц и вопросам об элементарной эквивалентности этих групп был получен О. В. Белеградеком в работах [10]–[18]. Заметим, что группа $UT(2, R)$ изоморфна аддитивной группе кольца R .

ТЕОРЕМА 1.1.14 (О. В. Белеградек [18]). *Для любых колец R и S , хотя бы одно из которых коммутативно или без делителей нуля, и любых натуральных чисел k и l , больших двух, следующие условия эквивалентны:*

- (1) $UT(k, R) \equiv UT(l, S)$;
- (2) $k = l$ и либо $R \equiv S$, либо $R \equiv S^*$.

ТЕОРЕМА 1.1.15 (О. В. Белеградек [18]). *Для любого коммутативного кольца, либо кольца без делителей нуля R и любого натурального $k > 2$ следующие условия эквивалентны:*

- (1) *элементарная теория $\mathcal{E}UT(k, R)$ разрешима;*
- (2) *элементарная теория $\mathcal{E}R$ разрешима.*

Существование условий на кольцо R в условиях теорем 1.1.14, 1.1.15 демонстрируют следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1.1.16 (О. В. Белеградек [18]). *Существуют конечные кольца R и S такие, что для любого натурального $k \geq 2$ имеет место*

$$UT(k, R) \cong UT(k, S), \quad \text{но} \quad R \not\equiv S \quad \text{и} \quad R \not\equiv S^*.$$

ТЕОРЕМА 1.1.17 (О. В. Белеградек [18]). *Существует кольцо R такое, что его элементарная теория $\mathcal{E}R$ неразрешима, а теория $\mathcal{E}UT(k, R)$ разрешима для любого натурального $k > 2$.*

В работах О. В. Белеградека рассмотрен целый ряд иных вопросов, связанных с элементарными теориями групп вида $UT(k, R)$. В частности, описаны все группы, элементарно эквивалентные группам вида $UT(k, R)$.

Известен ряд результатов, связанных с теориями унитарных матричных групп в них, отличных от элементарного, языках.

Заметим лишь, что из результатов А. И. Мальцева [52] и Б. Роуза [89] очевидным образом вытекает неразрешимость сколемовской теории $\forall \exists \theta UT(k, \mathbb{Z})$ при $k > 2$.

Перейдем теперь к изложению результатов о матричных кольцах.

Элементарная классификация колец $M(k, R)$ для случая тел R была получена еще А. И. Мальцевым.

ТЕОРЕМА 1.1.18 (А. И. Мальцев [52]). *Для любых тел D , C и натуральных чисел k и l следующие условия эквивалентны:*

- (1) $M(k, D) \equiv M(l, C)$;
- (2) $k = l$ и либо $D \equiv C$, либо $D \equiv C^*$.

Аналогичный результат имеет место и для ряда ассоциативных колец.

ТЕОРЕМА 1.1.19 (Ю. В. Нагребеккая). *Пусть R и S – ассоциативные коммутативные кольца с единицей и без делителей нуля. Тогда для любых натуральных k и l следующие условия эквивалентны:*

- (1) $M(k, R) \equiv M(l, S)$;
- (2) $R \equiv S$ и $k = l$.

Этот результат следует из интерпретации ассоциативного коммутативного кольца R с единицей и без делителей нуля при помощи бескванторной формулы, приведенной в [65], в кольце $M(k, R)$.

Ю. В. Нагребечкой [65] доказано также, что если R ассоциативное коммутативное кольцо, то разрешимость теории $\mathcal{E}R$ эквивалентна разрешимости теории $\mathcal{E}M(k, R)$.

Для более узкого класса колец имеет место следующий более сильный результат, полученный на основе результатов Ж. Дьёдонне [29].

ТЕОРЕМА 1.1.20 (Ю. В. Нагребечкая). *Если R – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля или тело нулевой либо нечетной характеристики, то для любого натурального k имеет место совпадение границ разрешимости в схемной иерархии:*

$$B_S(M(k, R)) \equiv B_S(R).$$

Это утверждение легко следует из определимости подобного кольца R в кольце $M(k, R)$ с помощью формулы $\varphi(x) = \forall y (xy = yx)$.

Полное описание границ разрешимости матричных колец над кольцом $\mathbb{Z}$ в схемно-альтернативной иерархии содержится в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 1.1.21 (Ю. В. Нагребечкая [65]). *Для любого натурального числа k SA -граница разрешимости кольца $M(k, \mathbb{Z})$ определяется равенством*

$$B_{SA}(M(k, \mathbb{Z})) = \{\forall\exists, \exists\forall, \forall\neg\forall, \exists\neg\wedge\}.$$

Изучение элементарных теорий колец $NT(k, R)$ было начато Б. Роузом [89], В. Вилером [129] и продолжено К. Р. Виделой [128].

ТЕОРЕМА 1.1.22 (К. Р. Видела [128]). *Для любых колец R и S и любых натуральных чисел k и l следующие условия эквивалентны:*

- (1) $NT(k, R) \equiv NT(l, S)$;
- (2) $k = l$ и либо $R \equiv S$, либо $R \equiv S^*$.

ТЕОРЕМА 1.1.23 (К. Р. Видела [128]). *Для произвольного кольца R и любого натурального числа k следующие условия эквивалентны:*

- (1) элементарная теория $\mathcal{E}NT(k, R)$ разрешима;
- (2) элементарная теория $\mathcal{E}R$ разрешима.

Заметим, что так как группы $GL(k, R)$, $SL(k, R)$, $UT(k, R)$ и кольца $M(k, R)$, $NT(k, R)$, очевидным образом, интерпретируются с помощью конъюнкций атомарных формул в самом кольце R , то для доказательства большей части приведенных в данном разделе 1.1 результатов достаточно построить интерпретацию, в соответствующем языке, кольца R в рассматриваемой матричной группе или кольце.

Другой метод нахождения критериев элементарной эквивалентности матричных групп и колец над кольцами R и S основан на известной теореме Кейслера–Шелаха (см. [94]) об изоморфизме подходящих ультрастепеней элементарно эквивалентных алгебраических систем, на том, что ультрастепень матричной группы (кольца) над кольцом R изоморфна матричной группе (кольцу) над соответствующей ультрастепенью кольца R , и на описании абстрактных изоморфизмов матричных групп (колец). (См., к примеру, [35], [36].)

Отметим также, что целый ряд иных, близких к приведенным выше результатов о теориях матричных групп и колец в языках первого порядка приведены в работах К. И. Бейдара, А. В. Михалева и Г. Е. Пунинского [9], О. В. Белеградека [10]–[18], Ю. В. Нагребечкой [63]–[67], Е. И. Буниной [21]–[25], В. Г. Дурнева [27], [28], В. Н. Ремесленникова и В. А. Романькова [88], В. А. Толстых [109] и др.

1.2. Полугруппы эндоморфизмов и группы автоморфизмов бесконечномерных векторных пространств. В настоящем разделе рассмотрены вопросы элементарной классификации и разрешимости элементарных теорий полугрупп и групп линейных преобразований бесконечномерных, в отличие от раздела 1.1, векторных пространств. Довольно естественно, что в ответах на эти вопросы играет роль логика второго порядка, т.е. расширение логики первого порядка, в котором допускается навешивание кванторов $\forall$ и $\exists$ по произвольным предикатам, определенным на основном множестве рассматриваемой алгебраической системы. Через $\text{Th}_2(\mathfrak{A})$ обозначим далее теорию алгебраической системы $\mathfrak{A}$ в логике второго порядка, а через $\text{Th}_2^k(\mathfrak{A})$, где k – некоторый кардинал, теорию алгебраической системы $\mathfrak{A}$ в расширении логики первого порядка, допускающем навешивание кванторов $\forall$ и $\exists$ по произвольным предикатам мощности, не превышающей кардинал k .

Для любого тела D и кардинала k пусть V_k^D – векторное пространство над телом D размерности k , $\text{End}(V_k^D)$ ($\text{Aut}(V_k^D)$) – полугруппа (группа) всех эндоморфизмов (автоморфизмов) векторного пространства V_k^D , а $\text{End}^*(V_k^D)$ – кольцо всех эндоморфизмов этого векторного пространства. Через $\langle k, D \rangle$ обозначим двусортную алгебраическую систему, первый сорт которой – множество k без каких-либо отношений и функций, а второй – тело D в стандартной сигнатуре.

Пусть K обозначает класс тел D , удовлетворяющих условию: мощность числа классов сопряженных элементов мультипликативной группы D^* равна мощности группы D^* . Заметим, что K – довольно широкий класс тел, включающий в себя, в частности, все поля.

Имеет место следующий результат, дающий исчерпывающий ответ об элементарной эквивалентности полугрупп (колец) эндоморфизмов и групп автоморфизмов бесконечномерных векторных пространств над телами.

ТЕОРЕМА 1.2.1 (В.А. Толстых [111]). *Для любых тел D, S из класса K и любых бесконечных кардиналов k и λ следующие условия эквивалентны:*

- (1) $\text{End}^*(V_k^D) \equiv \text{End}^*(V_\lambda^S)$;
- (2) $\text{End}(V_k^D) \equiv \text{End}(V_\lambda^S)$;
- (3) $\text{Aut}(V_k^D) \equiv \text{Aut}(V_\lambda^S)$;
- (4) $\text{Th}_2^k(\langle k, D \rangle) = \text{Th}_2^\lambda(\langle \lambda, S \rangle)$.

Как замечено в [111], равенство $\text{Th}_2^k(\langle k, D \rangle) = \text{Th}_2^\lambda(\langle \lambda, S \rangle)$ влечет равенства $\text{Th}_2(k) = \text{Th}_2(\lambda)$ и $\text{Th}_2^k(D) = \text{Th}_2^\lambda(S)$ (но не сводится к ним). Заметим также, что если в качестве D выбрать любое тело из класса K , описываемое с точностью до изоморфизма одним предложением в логике второго порядка, то при $k \geq |D|$ равенство $\text{Th}_2^k(\langle k, D \rangle) = \text{Th}_2^\lambda(\langle \lambda, S \rangle)$ равносильно тому, что $\lambda \geq |S|$, $\text{Th}_2(k) = \text{Th}_2(\lambda)$ и $D \cong S$. В качестве тел D указанного вида могут фигурировать поля $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, счетные алгебраически замкнутые и конечные поля.

Поскольку доказательство теоремы 1.2.1 состоит в построении биинтерпретации элементарных теорий группы $\text{Aut}(V_k^D)$ и теории второго порядка $\text{Th}_2^k(\langle k, D \rangle)$ друг в друге, то имеет место и следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.2.2 (В.А. Толстых [111]). *Для любого бесконечного кардинала k и любого тела D из класса K элементарные теории группы $\text{Aut}(V_k^D)$, полугруппы $\text{End}(V_k^D)$ и кольца $E^*(V_k^D)$ неразрешимы.*

В работе [111] содержится еще целый ряд утверждений, связанных с элементарными теориями различных групп и полугрупп преобразований бесконечномерных век-

торных пространств. Близкие вопросы рассматриваются в работе [127].

В связи с утверждением теоремы 1.2.2 естественным образом возникает вопрос о нахождении границ разрешимости теорий первого порядка указанных в этой теореме групп, полугрупп и колец в различных иерархиях языков первого порядка.

Кроме того, остается открытым вопрос о справедливости утверждений теорем 1.2.1 и 1.2.2 для произвольных тел. Заметим лишь, что, как указано в работе [111], утверждения теорем 1.2.1 и 1.2.2 имеют место для произвольных тел D, S в случае, когда размерности k, λ векторных пространств удовлетворяют неравенствам $k, \lambda > \max\{|D|, |S|\}$.

§ 2. Производные структуры полугрупп и групп

2.1. Решетки подполугрупп и подгрупп. Класс $\mathfrak{K}$ полугрупп называется *решеточно конечно аксиоматизируемым*, если класс решеток $\text{Sub } \mathfrak{K} = \{\text{Sub } \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in \mathfrak{K}\}$ аксиоматизируем внутри класса $\text{Sub } \mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ – класс всех полугрупп, т.е. если существует такой конечно аксиоматизируемый класс решеток $\mathfrak{R}$, что $\text{Sub } \mathfrak{K} = \mathfrak{R} \cap \text{Sub } \mathfrak{C}$. Полугруппы S и T называются *решеточно элементарно эквивалентными*, если $\text{Sub } S \equiv \text{Sub } T$. Говорят, что класс полугруппы $\mathfrak{K}$ *решеточно элементарно замкнут*, если класс решеток $\text{Sub } \mathfrak{K}$ элементарно замкнут внутри класса $\text{Sub } \mathfrak{C}$, т.е. если для полугрупп S и T , где $S \in \mathfrak{K}$, отношение $\text{Sub } S \equiv \text{Sub } T$ влечет включение $T \in \mathfrak{K}$. Если при этом $\mathfrak{K} = I\{T\}$ и $\mathfrak{K}$ решеточно элементарно замкнут, то полугруппу T будем называть *решеточно элементарно определяемой*. Здесь $I\mathfrak{K} = \{\mathfrak{A} \mid \text{существует } \mathfrak{B} \in \mathfrak{K} \text{ такая, что } \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}\}$.

Л. Н. Шевриним получен целый ряд результатов о решеточной элементарной определяемости и аксиоматизируемости различных полугрупп и их классов.

ТЕОРЕМА 2.1.1 (Л. Н. Шеврин [100], [101]). *Решеточно конечно аксиоматизируемы классы полугрупп идемпотентов, полугрупп без идемпотентов, периодических полугрупп, периодических унитарных полугрупп, непериодических полугрупп, квазициклических групп, групп без кручения, непериодических групп, непериодических абелевых групп, линейно упорядочиваемых групп.*

ТЕОРЕМА 2.1.2 (Л. Н. Шеврин [100], [101]). *Решеточно аксиоматизируемы классы коммутативных полугрупп с законом сокращения и без идемпотентов, свободных полугрупп, свободных коммутативных полугрупп, свободных полугрупп идемпотентов.*

ТЕОРЕМА 2.1.3 (Л. Н. Шеврин [100], [101]). *Бесконечная циклическая полугруппа и бесконечная циклическая группа решеточно элементарно определяемы.*

Довольно полная информация по вопросам разрешимости элементарных теорий решеток подполугрупп содержится в следующих результатах.

ТЕОРЕМА 2.1.4 (Ю. М. Важенин [119]). *Если класс $\mathfrak{K}$ полугрупп содержит непериодическую полугруппу, либо индексы конечных циклических подполугрупп полугрупп из $\mathfrak{K}$ не ограничены в совокупности, то элементарная теория классов решеток $\text{Sub } \mathfrak{K}$ наследственно неразрешима.*

ТЕОРЕМА 2.1.5 (Ю. М. Важенин, Е. В. Линецкий [125]). *Наследственно неразрешима теория класса $\text{Sub } \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{K}$ – класс всех конечных полурешеток.*

Полностью решена проблема разрешимости элементарной теории класса $\text{Sub } \mathfrak{K}$ в случае, когда $\mathfrak{K}$ – некоторое многообразие полугрупп.

ТЕОРЕМА 2.1.6 (Б. Баясгалан [6]). *Для любого многообразия $\mathfrak{M}$ полугрупп следующие условия эквивалентны:*

- (1) *элементарная теория класса $\text{Sub } \mathfrak{M}$ разрешима;*
- (2) *либо $\mathfrak{M} \subseteq \text{Var}\{xyz = xz\}$, либо $\mathfrak{M} \subseteq \text{Var}\{xyz = x\} \times \text{Var}\{x^n y = y, xy = yx\}$ для некоторого $n \geq 1$.*

Здесь $\text{Var}\{t_1 = t_2\}$ – многообразие, аксиоматизируемое тождеством $t_1 = t_2$.

Представляет интерес нахождение SA -критических теорий для класса $\text{Sub } \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ – многообразие всех полугрупп.

Изучение элементарных теорий решеток подгрупп различных групп было начато в работе М. И. Каргаполова [45]. Дальнейшие результаты по разрешимости подобных элементарных теорий были получены в работах Г. Т. Козлова [46], Н. Г. Луковникова и В. И. Мартянова [51], Э. И. Фридмана [34] и М. А. Тайцлина [107]. Из результатов работы М. И. Каргаполова и теоремы 2.1.6 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1.7 (Б. Баясгалан [5]). *Для любого многообразия $\mathfrak{M}$ групп следующие условия эквивалентны:*

- (1) *элементарная теория класса $\text{Sub } \mathfrak{M}$, решеток подгрупп $\mathfrak{M}$ -групп, разрешима;*
- (2) *$\mathfrak{M}$ -многообразие абелевых периодических групп.*

Известен также ряд результатов о неразрешимости универсальных теорий решеток подгрупп различных классов групп. Из доказанной в работе [50] неразрешимости квазиэквациональной теории класса всех (всех конечных) модулярных арговых решеток и известной вложимости этих решеток в решетки подгрупп абелевых групп вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1.8 (Л. Липшиц [50]). *Неразрешима универсальная теория решеток подгрупп всех (всех конечных) абелевых групп.*

Имеет место также следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1.9 (А. М. Слободской, Э. И. Фридман [104]). *Неразрешимы универсальные теории решеток подгрупп (сервантных подгрупп) следующих классов абелевых групп: всех, всех без кручения, всех периодических, всех p -групп для некоторого простого p , всех полных, всех полных без кручения.*

Проблема классификации абелевых групп по элементарным теориям решеток их подгрупп решена А. И. Кокориным.

ТЕОРЕМА 2.1.10 (А. И. Кокорин [47]). *Для любых абелевых групп G и G' элементарная эквивалентность $\text{Sub } G \equiv \text{Sub } G'$ их решеток подгрупп влечет их разложимость $G \cong H \oplus Q$, $G' \cong H' \oplus Q'$ такую, что $H \equiv H'$, а группы Q и Q' локально циклические.*

СЛЕДСТВИЕ 2.1.1 (А. И. Кокорин [47]). *Для любых абелевых групп G и G' без кручения ранга, не меньшего двух, элементарная эквивалентность $\text{Sub } G \equiv$*

$\text{Sub } G'$ из решеток подгрупп влечет элементарную эквивалентность $G \equiv G'$ самих групп.

В связи с приведенными результатами представляет интерес вопрос нахождения границ разрешимости в иерархиях V, S, A, VA, SA класса $\text{Sub } \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{K}$ – класс всех полугрупп, класс всех групп, класс всех абелевых групп.

Заметим в заключение, что еще одной производной структурой, связанной с решетками подалгебр и вопросами порожденности подалгебр, могут служить так называемые генерические мультиалгебры (см. [77], [83]).

2.2. Решетки конгруэнций и близкие к ним производные структуры. Через $\text{Id } S$ и $\text{Div } S$ обозначим соответственно решетку идеалов полугруппы S и квазипорядоченное множество $\langle S; | \rangle$, где $|$ – отношение делимости, определенное на основном множестве полугруппы S следующим образом:

$$x | y \Leftrightarrow \exists a, b \in S (y = axb \vee y = ax \vee y = xb \vee x = y).$$

Эти производные структуры связаны между собой и с решеткой конгруэнций $\text{Con } S$ полугруппы S . А именно: решетка $\text{Id } S$ является полной дистрибутивной подрешеткой решетки $\text{Con } S$ и антиизоморфна решетке $2^{\text{Div } S}$ – кардинальной степени двухэлементной решетки 2 с показателем – квазипорядоченным множеством $\text{Div } S$.

Как и ранее, для класса $\mathfrak{K}$ полугрупп через $\text{Con } \mathfrak{K}$, $\text{Id } \mathfrak{K}$, $\text{Div } \mathfrak{K}$ обозначим соответственно классы $\{\text{Con } S \mid S \in \mathfrak{K}\}$, $\{\text{Id } S \mid S \in \mathfrak{K}\}$, $\{\text{Div } S \mid S \in \mathfrak{K}\}$.

Имеется довольно полная информация по вопросу разрешимости элементарных теорий классов $\text{Con } \mathfrak{M}$, $\text{Id } \mathfrak{M}$, $\text{Div } \mathfrak{M}$ для различных многообразий $\mathfrak{M}$ полугрупп.

ТЕОРЕМА 2.2.1 (Б. Баясгалан [3]). *Класс решеток $\text{Con } \mathfrak{M}$ имеет разрешимую элементарную теорию только для многообразий $\mathfrak{M}$ полугрупп вида $\mathfrak{M} = \text{Var}\{x^n y = y, xy = yx\}$ для некоторого натурального n .*

СЛЕДСТВИЕ 2.2.1 (Б. Баясгалан [3]). *Для многообразий $\mathfrak{M}$ групп следующие условия эквивалентны:*

- (1) разрешима элементарная теория класса решеток $\text{Con } \mathfrak{M}$ (т.е. решеток нормальных подгрупп $\mathfrak{M}$ -групп);
- (2) разрешима элементарная теория класса решеток $\text{Sub } \mathfrak{M}$ (решеток подгрупп $\mathfrak{M}$ -групп).

ТЕОРЕМА 2.2.2 (Б. Баясгалан [3]). *Для многообразия $\mathfrak{M}$ полугрупп следующие условия эквивалентны:*

- (1) разрешима элементарная теория класса квазипорядоченных множеств $\text{Div } \mathfrak{M}$;
- (2) разрешима элементарная теория класса решеток $\text{Id } \mathfrak{M}$;
- (3) многообразие $\mathfrak{M}$ не включает в себя многообразия вида $\text{Var}\{xyz = t^2, xy = yx\}$ и $\text{Var}\{x^2 = x, xy = yx\}$;
- (4) на многообразии $\mathfrak{M}$ выполнено некоторое тождество вида $uxv = yz$, где x, y, z – переменные, а u, v – некоторые полугрупповые термы;
- (5) каждая полугруппа из $\mathfrak{M}$ является идеальным расширением вполне простой полугруппы при помощи полугруппы с нулевым умножением.

В некоторых случаях найдены границы разрешимости рассматриваемых выше теорий. К примеру, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.2.3 (Б. Баясгалан [4]). *Если $\mathfrak{K}$ – произвольный класс полугрупп, содержащий все инверсные полугруппы, либо $\mathfrak{K}$ – конечно базлируемое многообразие локально конечных полугрупп, включающее в себя многообразие полурешеток, то SA -граница разрешимости класса $\text{Div } \mathfrak{K}$ есть $\{\exists \forall \neg \wedge \vee\}$.*

ТЕОРЕМА 2.2.4 (Б. Баясгалан [5]). *Для произвольного многообразия $\mathfrak{M}$ полугрупп следующие условия эквивалентны:*

- (1) *элементарная теория класса $\text{Id } \mathfrak{M}$ неразрешима;*
- (2) *SA -граница разрешимости класса $\text{Id } \mathfrak{M}$ есть $\{\exists \forall \exists \neg \wedge \vee\}$;*
- (3) *$\text{Var}\{x^2 = x, xy = yx\} \subseteq \mathfrak{M}$ или $\text{Var}\{xyz = t^2, xy = yx\} \subseteq \mathfrak{M}$.*

2.3. Степени полугрупп. Для полугруппы $\mathfrak{C} = \langle S; \cdot \rangle$ через $\text{Row } \mathfrak{C}$ обозначим множество всех непустых подмножеств множества S с операцией умножения комплексов: $X \cdot Y = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$. Полугруппа $\text{Row } \mathfrak{C}$ содержит полугруппу $\mathfrak{C}$ в качестве своей подполугруппы, если допустить отождествление элементов из S с соответствующими одноэлементными подмножествами. Отметим, что в работе Е. М. Могиланской [60] построен пример двух неизоморфных полугрупп $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$, степени которых, полугруппы $\text{Row } \mathfrak{C}_1$ и $\text{Row } \mathfrak{C}_2$, изоморфны.

Для полных симметрических полугрупп (полугрупп всех отображений множества в себя) имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.3.1 (Ю. М. Важенин [117]). *Полная симметрическая полугруппа сильно элементарно определима своей степенью, более того, отношения $\text{Row } \mathfrak{C}_1 \equiv \text{Row } \mathfrak{C}_2$ и $\mathfrak{C}_1 \equiv \mathfrak{C}_2$ равносильны для любых полных симметрических полугрупп $\mathfrak{C}_i$.*

Следующая теорема дает описание всех полугрупповых многообразий $\mathfrak{M}$, для которых соответствующий класс $\text{Row } \mathfrak{M} = \{\text{Row } \mathfrak{C} \mid \mathfrak{C} \in \mathfrak{M}\}$ имеет разрешимую элементарную теорию.

ТЕОРЕМА 2.3.2 (Б. Баясгалан [3]). *Для многообразия $\mathfrak{M}$ полугрупп класс $\text{Row } \mathfrak{M}$ имеет разрешимую элементарную теорию тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \subseteq \text{Var}\{xyz = xz\}$. Отсюда, в частности, следует, что для любого нетривиального группового многообразия $\mathfrak{M}$ класс $\text{Row } \mathfrak{M}$ имеет неразрешимую элементарную теорию.*

ТЕОРЕМА 2.3.3 (Б. Баясгалан, Ю. М. Важенин [7]). *SA -граница разрешимости класса степеней всех полугрупп есть $\{\forall \neg \vee\}$.*

§ 3. Преобразования упорядоченных множеств и графов

3.1. Полугруппы эндоморфизмов и направленных преобразований.

Пусть $\mathfrak{G} = \langle \Gamma; \alpha \rangle$ – произвольный граф, т.е. непустое множество вершин с определенным на нем бинарным рефлексивным отношением α . Граф $\mathfrak{G}$ назовем пустым (тривиальным), если α есть отношение равенства на Γ ($\alpha = \Gamma \times \Gamma$). Через $\mathfrak{G}^{-1}$ обозначим граф $\langle \Gamma; \alpha^{-1} \rangle$, а через $E(\mathfrak{G})$, $I(\mathfrak{G})$, $D(\mathfrak{G})$ – полугруппы всех эндоморфизмов, $\inf$ -эндоморфизмов и частичный группоид направленных преобразований графа $\mathfrak{G}$ соответственно. При этом для любого класса $\mathfrak{K}$ графов положим $E(\mathfrak{K}) = \{E(\mathfrak{G}) \mid \mathfrak{G} \in \mathfrak{K}\}$, аналогично определяются $I(\mathfrak{K})$ и $D(\mathfrak{K})$. Напомним, что

$$\begin{aligned} f \in E(\mathfrak{G}) &\Leftrightarrow \forall x, y \in \Gamma (\alpha(x, y) \rightarrow \alpha(f(x), f(y))), \\ f \in I(\mathfrak{G}) &\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \Gamma (x \in \inf(y, z) \rightarrow f(x) \in \inf(f(y), f(z))), \end{aligned}$$

где $\inf(y, z) = \{x \in \Gamma \mid t(\alpha)(x, y) \& t(\alpha)(x, z) \wedge \forall v(t(\alpha)(v, y) \& t(\alpha)(v, z) \rightarrow t(\alpha)(v, x))\}$, а $t(\alpha)$ – транзитивное замыкание отношения α .

Наконец, $f \in D(\mathfrak{G})$, если $\forall x \in \Gamma \alpha(x, f(x))$.

Пусть $X \in \{E, I, D\}$. Класс графов $\mathfrak{K}$ назовем (конечно) X -аксиоматизируемым, если класс $X(\mathfrak{K})$ полугрупп, или, соответственно, частичных группоидов, относительно (конечно) аксиоматизируем внутри класса $X(\mathfrak{Gr})$, где $\mathfrak{Gr}$ – класс всех графов. Класс графов $\mathfrak{K}$ (точно) элементарно X -определим, если для любого графа $\mathfrak{G}_2$ из соотношения $X(\mathfrak{G}_1) \equiv X(\mathfrak{G}_2)$ для некоторого графа $\mathfrak{G}_1 \in \mathfrak{K}$ следует, что $\mathfrak{G}_1 \equiv \mathfrak{G}_2$ или $\mathfrak{G}_1^{-1} \equiv \mathfrak{G}_2$ (соответственно $\mathfrak{G}_1 \equiv \mathfrak{G}_2$).

Имеют место следующие утверждения, связанные с X -аксиоматизируемостью и элементарной X -определимостью различных классов графов.

ТЕОРЕМА 3.1.1 (Ю. М. Важенин [115], [116]). *Следующие классы графов являются конечно X -аксиоматизируемыми для $X \in \{E, I\}$: класс $\mathfrak{A}_1$ всех симметричных графов; класс $\mathfrak{A}_2$ всех графов, в каждом из которых есть дуга, не принадлежащая ни одному ориентированному циклу; класс $\mathfrak{A}_3$ всех тривиальных графов; класс всех антисимметричных графов; класс всех транзитивных графов; класс всех линейно упорядоченных множеств.*

ТЕОРЕМА 3.1.2 (Ю. М. Важенин [115], [116]). *Произвольный граф из класса $(\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2) \setminus \mathfrak{A}_3$ (в частности, любое частично упорядоченное множество) является элементарно X -определимым для $X \in \{E, I\}$.*

ТЕОРЕМА 3.1.3 (Ю. М. Важенин [115], [116]). *Для $X \in \{E, I\}$ класс полугрупп $X(\mathfrak{K})$ арифметически не замкнут и, следовательно, не является X -аксиоматизируемым, если класс графов $\mathfrak{K}$ содержит бесконечный граф одного из следующих типов: неантисимметричный, пустой; линейно упорядоченное множество; решетка с нулем и единицей, все остальные элементы которой попарно несравнимы (решетка вида M_k для произвольного кардинала k).*

Точную (верхнюю или нижнюю) грань элементов x, y некоторого частично упорядоченного множества назовем нетривиальной, если x и y несравнимы.

ТЕОРЕМА 3.1.4 (Ю. М. Важенин [116]). *Любое частично упорядоченное множество, содержащее хотя бы одну нетривиальную точную грань, является точно элементарно I -определимым.*

Через $E_w(\mathfrak{G})$ ($E_n(\mathfrak{G})$) обозначим подполугруппу полугруппы $E(\mathfrak{G})$, состоящую из эндоморфизмов графа $\mathfrak{G}$ с произвольной конечной (состоящей не более чем из n элементов) областью значений.

ТЕОРЕМА 3.1.5 (А. Г. Пинус [69]). *Для любого класса $\mathfrak{K}$ графов, включающего в себя бесконечное линейно упорядоченное множество, элементарные теории классов полугрупп $E(\mathfrak{K})$, $E_w(\mathfrak{K})$ неразрешимы. Для класса $\mathfrak{K}$, состоящего из всех линейно упорядоченных множеств, и любого натурального n элементарная теория класса полугрупп $E_n(\mathfrak{K})$ разрешима.*

Заметим также, что из результатов работы А. Г. Пинуса [70] следует, что E_n – число Левенгейма для класса всех линейно упорядоченных множеств – равно $2^{\aleph_0}$.

В дальнейших утверждениях рефлексивность рассматриваемых графов не предполагается.

ТЕОРЕМА 3.1.6 (Ю. М. Важенин [116], [120]). *Следующие классы графов конечно D -аксиоматизируемы: класс всех транзитивных графов; класс всех пустых графов; класс всех непустых антисимметричных графов; класс всех симметричных графов; класс всех частично упорядоченных множеств, разложимых в кардинальную сумму множеств с наибольшим и наименьшим элементом, лишь одно из которых не одноэлементно.*

ТЕОРЕМА 3.1.7 (Ю. М. Важенин [116], [120]). *Для произвольных графов $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ отношение $D(\mathfrak{G}_1) \equiv D(\mathfrak{G}_2)$ влечет отношение $\mathfrak{G}'_1 \equiv \mathfrak{G}'_2$, где граф $\mathfrak{G}'$ получается из графа $\mathfrak{G}$ удалением изолированных вершин.*

В работах Ю. М. Важенина [115], [116], [120] получен целый ряд утверждений – аналогов утверждений теорем 3.1.1–3.1.4, 3.1.6 и 3.1.7 для полугрупп и группоидов частичных преобразований графов (см. также работы В. А. Молчанова [61] и Ю. М. Важенина [124]).

3.2. Симметрические полугруппы и группы. Особняком стоит вопрос о полугруппах преобразований тривиальных графов $\langle A; \alpha \rangle$, где $\alpha = A \times A$, т.е. о полных симметрических полугруппах $\text{Syms } A$ на множествах A , а также о симметрических группах $\text{Sym } A$. Здесь получены окончательные ответы для этих полугрупп и групп на все основные рассматриваемые выше вопросы.

Прежде всего заметим, что достаточно очевидным образом (см. [118]) в элементарной теории полугруппы $\text{Syms } A$ интерпретируется полная логика второго порядка на множестве A (логика, допускающая навешивание кванторов $\forall$ и $\exists$ по произвольным предикатам на множестве A). Тем самым, отношение $\text{Syms } A \equiv \text{Syms } B$ равносильно совпадению теорий множеств A и B в полной логике второго порядка (отношению $A \equiv_2 B$).

Иная ситуация складывается при рассмотрении симметрических групп $\text{Sym } A$. Заметим, что при доказательстве неразрешимости элементарной теории класса всех конечных симметрических групп в работе Ю. Л. Ершова [30] была построена интерпретация двухосновной модели $\langle A; \text{Sym } A, \circ \rangle$ в симметрической группе $\text{Sym } A$, здесь отношение $\circ(a, b, c)$ имеет место тогда и только тогда, когда $c \in \text{Sym } A$, $a, b \in A$ и $c(a) = b$. На основе этого ряд частных результатов об элементарной определимости групп вида $\text{Sym } A$ в классе всех полных симметрических групп был получен в работах Р. Маккензи [59] и А. Г. Пинуса [71]. Окончательное решение этой, а вместе с тем и всех иных проблем, связанных с элементарными теориями симметрических групп, был дан в работе С. Шелаха [96].

Пусть $\Omega = (2^{\aleph_0})^+$. Для любого ординала α существует единственное его представление в виде

$$\alpha = \Omega^w \alpha_w + \cdots + \Omega^n \alpha_{[n]} + \cdots + \Omega \alpha_{[1]} + \alpha_{[n]},$$

где $\alpha_{[i]} < \Omega$. Пусть

$$\alpha[n] = \Omega^w \alpha_w + \cdots + \Omega^{n+1} \alpha_{[n+1]}, \quad \alpha^{[n]} = \begin{cases} 1 + cf\alpha[1], & \text{если } cf\alpha[n] < \Omega, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Через U_α обозначим множество мощности $\min\{2^{\aleph_0}, \aleph_\alpha\}$, а через M_α – многоосновную модель $\langle U_\alpha, \alpha_{[0]}, \alpha_{[1]}, \dots, \alpha^{[0]}, \alpha^{[1]}, \dots; < \rangle$, где множества $U_\alpha, \alpha_{[i]}, \alpha^{[j]}$ предполагаются дизъюнктными, а предикат $<$ интерпретируется как обычный порядок на ординалах $\alpha_{[i]}, \alpha^{[j]}$ (т.е. на совокупностях меньших ординалов).

ТЕОРЕМА 3.2.1 (С. Шелах [96]). *Для любых кардиналов $\aleph_\alpha$ и $\aleph_\beta$ следующие условия эквивалентны:*

- а) $\text{Sym}(\aleph_\alpha) \equiv \text{Sym}(\aleph_\beta)$;
- б) $M_\alpha \equiv_2 M_\beta$.

В заключение раздела приведем ряд известных результатов о теориях симметрических полугрупп и групп в иных элементарных и неэлементарных языках.

ТЕОРЕМА 3.2.2 (В. В. Маевский [58]). *Границы разрешимости любой бесконечной симметрической полугруппы и класса всех бесконечных симметрических полугрупп в иерархии SA равны $\{\forall\exists, \exists\forall, \forall\neg\forall, \exists\neg\wedge\}$.*

ТЕОРЕМА 3.2.3 (В. В. Маевский [57]). *Для любой бесконечной симметрической группы и для класса всех бесконечных симметрических групп теории $\forall\neg\forall$, $\exists\neg\wedge$ являются критическими в иерархии SA , а теории $\forall\exists\forall$ и $\exists\forall\exists$ являются неразрешимыми.*

ТЕОРЕМА 3.2.4 (Ю. В. Нагребечкая [63]). *Для любой бесконечной симметрической группы и класса всех бесконечных симметрических групп $\exists\forall \wedge \forall$ -теория разрешима.*

Отметим также доказанную в работе [72] элиминированность кванторов Q_0 (“существует бесконечно много”) и Q_1 (“существует несчетно много”) в элементарном языке на классе симметрических групп.

§ 4. Производные структуры булевых алгебр

4.1. Группы автоморфизмов булевых алгебр. Хорошо известна тесная связь теории булевых алгебр с теорией множеств. Тем самым, не вызывает удивления, что, в отличие от приведенных ранее результатов об элементарных теориях производных структур для групп, колец, графов и т. д., доказательство ряда подобных результатов для булевых алгебр использует такие известные теоретико-множественные предположения, как $V = L$, $\diamond_{\aleph_1}$ и прочие. Исследование групп автоморфизмов булевых алгебр представляет традиционный интерес. Среди результатов по элементарным теориям групп автоморфизмов булевых алгебр прежде всего укажем на своего рода теорему Левенгейма–Сколема.

ТЕОРЕМА 4.1.1 ($\diamond_{\aleph_1}$) (М. Рубин, С. Шелах [93]). *Для любой бесконечной булевой алгебры $\mathfrak{B}$ существует булева алгебра $\mathfrak{B}_1$ такая, что $|\text{Aut } \mathfrak{B}_1| \leq |\mathfrak{B}_1| = \aleph_1$ и $\text{Aut } \mathfrak{B}_1 \equiv \text{Aut } \mathfrak{B}$.*

На самом деле в этой теореме доказано даже большее: элементарно эквивалентны соответствующие двухосновные алгебраические системы, состоящие из булевой алгебры и группы ее автоморфизмов с операцией действия автоморфизма на булеву алгебру.

Заметим, что этот результат не может быть усилен с заменой кардинала $\aleph_1$ на кардинал $\aleph_0$. К примеру, в работе М. Рубина [92] построены элементарные формулы φ_1 и φ_2 групповой сигнатуры такие, что:

- 1) для любой атомной булевой алгебры $\mathfrak{B}$ условия “ $\text{Aut } \mathfrak{B} \models \varphi_1$ ” и “ $\mathfrak{B}$ – счетна” эквивалентны;
- 2) для любой безатомной булевой алгебры $\mathfrak{B}$ условия “ $\text{Aut } \mathfrak{B} \models \varphi_2$ ” и “ $\mathfrak{B}$ – счетна” эквивалентны.

Таким образом, Aut-число Левенгейма для многообразия булевых алгебр равно $\aleph_1$ (в предположении $\diamond_{\aleph_1}$).

Этот результат естественным образом инициирует интерес к вопросам определенности счетных булевых алгебр элементарными свойствами их групп автоморфизмов. При решении последнего, столь же естественным образом, возникает ряд ограничений. К примеру, так как для безатомной булевой алгебры $\mathfrak{B}$ и булевой алгебры $\mathfrak{B}_1$, получаемой добавлением к $\mathfrak{B}$ одного атома, имеет место изоморфизм $\text{Aut } \mathfrak{B} \cong \text{Aut } \mathfrak{B}_1$, то в вопросе определенности счетной булевой алгебры элементарными свойствами ее группы автоморфизмов возникает естественное ограничение $|\text{At}(\mathfrak{B})| \neq 1$. Здесь $\text{At}(\mathfrak{B})$ – совокупность атомов булевой алгебры $\mathfrak{B}$.

Пусть $\mathfrak{C}$ – класс счетных булевых алгебр $\mathfrak{B}$ таких, что $|\text{At}(\mathfrak{B})| \neq 1$. Тогда имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1.2 (М. Рубин [92]). *Для любых счетных булевых алгебр $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ из класса $\mathfrak{C}$ элементарная эквивалентность $\text{Aut } \mathfrak{B}_1 \equiv \text{Aut } \mathfrak{B}_2$ влечет элементарную эквивалентность $\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{B}_2$.*

Более того, для любой полной элементарной теории T булевых алгебр существует элементарная формула φ_T групповой сигнатуры такая, что для любой счетной булевой алгебры $\mathfrak{B}$ из класса $\mathfrak{C}$ условия $\mathfrak{B} \models T$ и $\text{Aut } \mathfrak{B} \models \varphi_T$ эквивалентны. Иначе говоря, это утверждение имеет место для любого типа элементарной теории T , отличного от $\langle 1, 1, 1 \rangle$, и любой счетной булевой алгебры $\mathfrak{B}$.

Как и ранее, через $\equiv_2$ обозначим отношение эквивалентности алгебраических систем (совпадение их теорий) в полной логике второго порядка – в логике, допускающей навешивание кванторов $\forall$ и $\exists$ по произвольным предикатам на основном множестве системы.

ТЕОРЕМА 4.1.3 (М. Рубин [92]). *Для любых счетных булевых алгебр $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$, обладающих максимальными атомными элементами и таких, что $|\text{At}(\mathfrak{B}_i)| \neq 1$, условия $\text{Aut } \mathfrak{B}_1 \equiv \text{Aut } \mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_1 \equiv_2 \mathfrak{B}_2$ равносильны.*

Заметим, что, тем самым, в частности, для любых подобных булевых алгебр $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ имеют место импликации:

$$\begin{aligned} \text{Aut } \mathfrak{B}_1 \equiv \text{Aut } \mathfrak{B}_2 &\Rightarrow \text{Sub } \mathfrak{B}_1 \equiv \text{Sub } \mathfrak{B}_2, \\ \text{Aut } \mathfrak{B}_1 \equiv \text{Aut } \mathfrak{B}_2 &\Rightarrow \text{Con } \mathfrak{B}_1 \equiv \text{Con } \mathfrak{B}_2, \\ \text{Aut } \mathfrak{B}_1 \equiv \text{Aut } \mathfrak{B}_2 &\Rightarrow \text{End } \mathfrak{B}_1 \equiv \text{End } \mathfrak{B}_2. \end{aligned}$$

В силу известного результата В. Марека [54], [55]: в предположении $V = L$ для любых счетных алгебраических систем $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ конечной сигнатуры из отношения $\mathfrak{A}_1 \equiv_2 \mathfrak{A}_2$ следует изоморфизм систем $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, из теоремы 4.1.3 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1.4 ($V = L$) (М. Рубин [92]). *Для любой счетной булевой алгебры $\mathfrak{B}_1$, обладающей максимальным атомным элементом и такой, что $|\text{At}(\mathfrak{B}_1)| \neq 1$, и любой счетной булевой алгебры $\mathfrak{B}_2$ такой, что $|\text{At}(\mathfrak{B}_2)| \neq 1$, элементарная эквивалентность $\text{Aut } \mathfrak{B}_1 \equiv \text{Aut } \mathfrak{B}_2$ влечет изоморфизм алгебр $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$.*

Без ограничения на принадлежность булевых алгебр классу $\mathfrak{C}$ имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1.5 ($V = L$) (М. Рубин [92]). *Для любых счетных булевых алгебр $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ элементарная эквивалентность $\text{Aut } \mathfrak{B}_1 \equiv \text{Aut } \mathfrak{B}_2$ влечет изоморфизм $\text{Aut } \mathfrak{B}_1 \cong \text{Aut } \mathfrak{B}_2$.*

Большая часть этих результатов доказывается путем элементарной интерпретации в группе $\text{Aut } \mathfrak{B}$ двухосновной алгебраической системы $\langle \mathfrak{B}, \text{Aut } \mathfrak{B}; \circ, \dots \rangle$, состоящей из булевой алгебры $\mathfrak{B}$ и ее группы автоморфизмов $\text{Aut } \mathfrak{B}$ с операцией $\circ$ действия автоморфизмов на булеву алгебру ($\circ(g, a) = b \Leftrightarrow g \in \text{Aut } \mathfrak{B}, a, b \in \mathfrak{B} \text{ и } g(a) = b$) и с некоторыми дополнительными предикатами.

Пусть $\mathfrak{C}_2$ – класс всех насыщенных булевых алгебр, $\mathfrak{C}_3$ – класс 1-гомеогенных, ω -насыщенных булевых алгебр $\mathfrak{B}$ таких, что $|At(\mathfrak{B}^{(n)})| \neq 1$. Напомним, что булева алгебра $\mathfrak{B}$ 1-гомеогенна тогда и только тогда, когда ее элементы, имеющие один и тот же элементарный тип, переводятся друг в друга каким-либо автоморфизмом алгебры $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{B}^{(n)}$ – это n -я производная Ершова–Тарского булевой алгебры $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2 \cup \mathfrak{C}_3$.

Среди других результатов об элементарных теориях групп автоморфизмов булевых алгебр отметим следующий.

ТЕОРЕМА 4.1.6 (М. Рубин [91]). *Для любых булевых алгебр $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ из класса $\mathfrak{C}_1$ элементарная эквивалентность $\text{Aut } \mathfrak{B}_1 \equiv \text{Aut } \mathfrak{B}_2$ влечет элементарную эквивалентность двухосновных систем $\langle \mathfrak{B}_1, \text{Aut } \mathfrak{B}_1, \circ \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}_2, \text{Aut } \mathfrak{B}_2, \circ \rangle$.*

Ограничения в условиях приведенных выше теорем классами $\mathfrak{C}_1$ и счетных булевых алгебр весьма существенны. Действительно, как хорошо известно [20], в предположении обобщенной континуум-гипотезы существуют эндожесткие (т.е. не имеющие нетривиальных инъективных эндоморфизмов) k -плотные булевы алгебры $\mathfrak{B}$ любой несчетной мощности k . Тем самым, для любой булевой алгебры $\mathfrak{A}$ имеет место $\text{Aut } \mathfrak{A} \cong \text{Aut } \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$. То есть Aut -число Ханфа для многообразия булевых алгебр равно $\aleph_0$ (в предположении обобщенной континуум-гипотезы).

Отметим, что фактически не проводилось изучение теорий групп автоморфизмов булевых алгебр в иных, отличных от элементарного $\mathcal{L}$, языках.

Среди открытых вопросов, связанных с элементарными теориями групп автоморфизмов булевых алгебр, укажем на следующий:

нахождение классификации свободных булевых алгебр на основе элементарной эквивалентности их групп автоморфизмов (см. §6).

Из известного результата Ю. Л. Ершова [30] о наследственной неразрешимости элементарной теории класса всех конечных симметрических групп очевидным образом вытекает следующий критерий разрешимости элементарных теорий групп автоморфизмов булевых алгебр:

для любой булевой алгебры $\mathfrak{B}$ элементарная теория группы $\text{Aut } \mathfrak{B}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$, где $\mathfrak{B}_1$ – конечная, а $\mathfrak{B}_2$ – безатомная эндожесткая булева алгебра.

В связи с этим, отметим и результат В. И. Мартыянова [56] о неразрешимости элементарной теории класса всех булевых алгебр в сигнатуре $\sigma = \langle \wedge, \vee, \neg, 0, 1, f \rangle$, где одноместная функция f интерпретируется произвольным автоморфизмом булевой алгебры.

4.2. Решетки конгруэнций и подалгебр булевых алгебр. Как хорошо известно, решетки конгруэнций булевых алгебр изоморфны решеткам их идеалов (фильтров). Главные идеалы выделяются в решетке идеалов булевых алгебр свойством “иметь дополнение”. Тем самым, в решетке $\text{Con } \mathfrak{B}$ любой булевой алгебры $\mathfrak{B}$ диофантовыми формулами интерпретируется двухосновная алгебраическая система $\langle \mathfrak{B}, \text{Con } \mathfrak{B}, \in \rangle$, состоящая из булевой алгебры $\mathfrak{B}$, решетки $\text{Con } \mathfrak{B}$ и отношения $\in$ такого, что $\in(a, b, c)$ имеет место тогда и только тогда, когда $a, b \in \mathfrak{B}$, $c \in \text{Con } \mathfrak{B}$ и $\langle a, b \rangle \in c$. Таким образом, в частности, для любых булевых алгебр имеет место импликация $\text{Con } \mathfrak{B}_1 \equiv \text{Con } \mathfrak{B}_2 \Rightarrow \mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{B}_2$.

Хорошо известны следующие результаты М. Рабина [87] и Л. Хайндорфа [42] по вопросу разрешимости теорий второго порядка булевых алгебр с кванторами по идеалам. Мы сформулируем здесь эти результаты как результаты об элементарных теориях решеток конгруэнций булевых алгебр (что в силу замеченного выше равносильно).

ТЕОРЕМА 4.2.1 (М. Рабин [87]). *Элементарная теория класса решеток $\{\text{Con } \mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ — счетная либо конечная булева алгебра}\}$ разрешима.*

ТЕОРЕМА 4.2.2 (Л. Хайндорф [42]). *Элементарная теория каждого из следующих классов решеток неразрешима:*

- $\{\text{Con } \mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ — несчетная булева алгебра}\},$
- $\{\text{Con } \mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ — произвольная булева алгебра}\},$
- $\{\text{Con } \mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ — суператомная булева алгебра}\}.$

В работе [85] построена элементарная интерпретация двухосновной алгебраической системы $\langle \mathfrak{B}, \text{Sub } \mathfrak{B}, \in \rangle$ в решетке $\text{Sub } \mathfrak{B}$ для любой атомной булевой алгебры $\mathfrak{B}$. Здесь система $\langle \mathfrak{B}, \text{Sub } \mathfrak{B}, \in \rangle$ состоит из булевой алгебры $\mathfrak{B}$, решетки $\text{Sub } \mathfrak{B}$ ее подалгебр, а отношение $\in(a, b)$ имеет место тогда и только тогда, когда $a \in \mathfrak{B}$, $b \in \text{Sub } \mathfrak{B}$ и $a \in b$. В силу этого и известного результата М. Рубина [90] о неразрешимости элементарной теории класса булевых пар $\langle \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \rangle$ (булева алгебра $\mathfrak{B}_1$ с выделенной подалгеброй $\mathfrak{B}_2$) для атомных булевых алгебр $\mathfrak{B}_1$ имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2.3 (С. Баррис, Г. П. Санкапанавар [26]). *Элементарные теории следующих классов решеток неразрешимы:*

- $\{\text{Sub } \mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ — произвольная булева алгебра}\},$
- $\{\text{Sub } \mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ — атомная булева алгебра}\},$
- $\{\text{Sub } \mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ — безатомная булева алгебра}\}.$

На самом деле, имеет место более сильный результат.

ТЕОРЕМА 4.2.4 (А. Г. Пинус, З. А. Дулатова [82]). *Для класса решеток $\{\text{Sub } \mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ — произвольная булева алгебра}\}$ $\forall \exists \forall \exists \forall \exists \forall \theta$ -теория неразрешима, а $\forall \theta$ -теория разрешима. Для класса решеток конечных подалгебр произвольных булевых алгебр $\forall \exists \forall \exists \forall \theta$ -теория неразрешима.*

Среди открытых вопросов, связанных с элементарными теориями решеток конгруэнций и подалгебр булевых алгебр, остаются не разработанными вопросы нахождения границ разрешимости классов решеток $\{\text{Con } \mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ — произвольная булева алгебра}\}$, $\{\text{Sub } \mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ — произвольная булева алгебра}\}$ в различных иерархиях языков логики первого порядка.

Отметим также вопрос описания пар булевых алгебр $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$, удовлетворяющих импликации $\text{Sub } \mathfrak{B}_1 \equiv \text{Sub } \mathfrak{B}_2 \Rightarrow \mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{B}_2$; выше было отмечено, что импликация имеет место для любых атомных булевых алгебр.

В заключение заметим, что с помощью булевых конструкций (булевых степеней и булевых произведений) целый ряд перечисленных выше результатов, по вопросам разрешимости теорий, может быть перенесен со случая булевых алгебр на случай дискриминаторных или даже произвольных конгруэнц-дистрибутивных многообразий.

ТЕОРЕМА 4.2.5 (А. Г. Пинус [76]). 1) *Для любого нетривиального дискриминаторного многообразия V $\forall \exists \forall \exists \forall \exists \forall \theta$ -теория класса решеток $\{\text{Sub } \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in V\}$ неразрешима.*

2) *Для любого дискриминаторного многообразия V $\forall \theta$ -теория класса решеток $\{\text{Sub } \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in V\}$ разрешима.*

3) *Для любого нетривиального конгруэнц-дистрибутивного многообразия V элементарная теория класса решеток $\{\text{Con } \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in V\}$ неразрешима.*

4) *Для любого конечно порожденного дискриминаторного многообразия V элементарная теория класса решеток $\{\text{Con } \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} - \text{счетная } V\text{-алгебра}\}$ разрешима.*

Близкие вопросы рассматриваются в работе Л. Хайндорфа [41].

§ 5. Производные структуры свободных алгебр

Единственным инвариантом бесконечно порожденных свободных алгебр $\mathcal{F}_V(k)$ данного многообразия V является мощность k свободных порождающих. При этом все подобные алгебры $\mathcal{F}_V(k)$, независимо от кардинала k , имеют одинаковое локальное строение, в силу чего все они элементарно эквивалентны между собой (неразличимы на языке логики первого порядка). Совершенно иная ситуация складывается при изучении производных структур свободных алгебр $\mathcal{F}_V(k)$, в частности, полугрупп их эндоморфизмов $\text{End } \mathcal{F}_V(k)$, решеток их конгруэнций $\text{Con } \mathcal{F}_V(k)$, решеток их подалгебр $\text{Sub } \mathcal{F}_V(k)$, групп их автоморфизмов $\text{Aut } \mathcal{F}_V(k)$. Отношение элементарной эквивалентности для каждой пары этих производных структур свободных алгебр индуцирует некоторое отношение эквивалентности на классе всех бесконечных кардиналов:

$$\begin{aligned} k \equiv_{\text{End}}^V \lambda &\Leftrightarrow \text{End } \mathcal{F}_V(k) \equiv \text{End } \mathcal{F}_V(\lambda), \\ k \equiv_{\text{Con}}^V \lambda &\Leftrightarrow \text{Con } \mathcal{F}_V(k) \equiv \text{Con } \mathcal{F}_V(\lambda), \\ k \equiv_{\text{Sub}}^V \lambda &\Leftrightarrow \text{Sub } \mathcal{F}_V(k) \equiv \text{Sub } \mathcal{F}_V(\lambda), \\ k \equiv_{\text{Aut}}^V \lambda &\Leftrightarrow \text{Aut } \mathcal{F}_V(k) \equiv \text{Aut } \mathcal{F}_V(\lambda). \end{aligned}$$

Мы ограничимся здесь рассмотрением лишь конечно базлируемых многообразий V конечной сигнатуры, с тем чтобы для любого бесконечного кардинала k V -свободная k -порожденная алгебра $\mathcal{F}_V(k)$ могла быть определена на множестве k формулами логики второго порядка. Тем самым, при рассмотрении лишь конечно базлируемых многообразий конечной сигнатуры данные отношения эквивалентности на классе бесконечных кардиналов сводятся к совпадению совокупностей истинных на кардиналах k и λ формул логики второго порядка некоторого фиксированного вида.

Классификация некоторых фрагментов логики второго порядка получена в работе С. Шелаха [95] (см. также [2]) при изучении расширений логики первого порядка,

допускающих навешивание кванторов по предикатам P , удовлетворяющим той или иной фиксированной формуле ϕ логики первого порядка сигнатуры $\langle P \rangle$. При этом в работе [95] доказано, что выразительные возможности любой подобной логики (зависящей от выбора формулы ϕ) совпадают с выразительными возможностями одной из следующих четырех логик данного типа:

- 1) логики первого порядка – УИП;
- 2) монадической логики – логики второго порядка с кванторами по произвольным одноместным предикатам – Mon;
- 3) симметрической логики – логики второго порядка с кванторами по двухместным предикатам, соответствующим произвольным перестановкам на основном множестве, – Sym;
- 4) полной логики второго порядка – логике второго порядка с кванторами по произвольным предикатам на основном множестве – 2ИП.

Заметим, что совпадение теорий бесконечных кардиналов в первых двух из перечисленных логик индуцирует на совокупности всех бесконечных кардиналов одно и то же отношение ∇ (истинное на любой паре бесконечных кардиналов). Совпадение теорий бесконечных кардиналов в логике Sym индуцирует на классе всех бесконечных кардиналов отношение эквивалентности $\equiv_p$, совпадающее с отношением элементарной эквивалентности соответствующих симметрических групп и описанное в теореме 3.2.1. Наконец, как и ранее, через $\equiv_2$ будем обозначать отношение эквивалентности на классе всех бесконечных кардиналов, индуцированное совпадением теорий этих кардиналов в логике 2ИП.

В силу замеченного выше ограничение рассмотрением лишь конечно базисуемых многообразий V конечной сигнатуры влечет справедливость следующей импликации:

$$k \equiv_2 \lambda \Rightarrow k \equiv_{\text{End}}^V \lambda \ \& \ k \equiv_{\text{Sub}}^V \lambda \ \& \ k \equiv_{\text{Aut}}^V \lambda \ \& \ k \equiv_{\text{Con}}^V \lambda.$$

Во всех известных к настоящему времени случаях для любого конечно базисуемого многообразия V конечной сигнатуры отношения $\equiv_{\text{End}}^V, \equiv_{\text{Con}}^V, \equiv_{\text{Aut}}^V, \equiv_{\text{Sub}}^V$ совпадают с одним из отношений $\nabla, \equiv_p$ либо $\equiv_2$.

Вопрос об элементарной эквивалентности полугрупп эндоморфизмов свободных алгебр решен в работе С. Шелаха (для рассматриваемых многообразий – конечно базисуемых, конечной сигнатуры и кардиналов – бесконечных).

ТЕОРЕМА 5.1 (С. Шелах [99]). *Отношение $\equiv_{\text{End}}^V$ совпадает с отношением $\equiv_2$.*

В качестве примера ситуации с отношениями $\equiv_{\text{Sub}}^V, \equiv_{\text{Aut}}^V, \equiv_{\text{Con}}^V$ рассмотрим случай многообразий множеств (алгебр пустой сигнатуры). В этом случае:

$\text{Sub } \mathcal{F}_V(k) = P(k)$ – решетка подмножеств кардинала k ;

$\text{Aut } \mathcal{F}_V(k) = \text{Sym}(k)$ – симметрическая группа на кардинале k ;

$\text{Con } \mathcal{F}_V(k) = \text{Part}(k)$ – решетка разбиений кардинала k .

А. Тарским [108] была доказана элементарная эквивалентность любых бесконечных атомных булевых алгебр. По поводу элементарной эквивалентности симметрических групп см. теорему 3.2.1.

А. Г. Пинусом [75] доказана элементарная интерпретируемость полной логики второго порядка 2ИП на кардинале k в решетке $\text{Part}(k)$. В силу этих результатов имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.2 (А. Тарский [108], Ю. Л. Ершов [30], С. Шелах [96], А. Г. Пинус [75]). Для многообразия V множество отношение $\equiv_{\text{Sub}}^V$ совпадает с отношением ∇ , отношение $\equiv_{\text{Aut}}^V$ – с отношением $\equiv_p$, отношение $\equiv_{\text{Con}}^V$ – с отношением $\equiv_2$.

Таким образом, многообразие множеств в качестве тройки отношений $\langle \equiv_{\text{Sub}}^V, \equiv_{\text{Aut}}^V, \equiv_{\text{Con}}^V \rangle$ на классе всех бесконечных кардиналов реализует тройку отношений $\langle \nabla, \equiv_p, \equiv_2 \rangle$. (О близких результатах см. также работу [68].)

Столь же досконально изучена ситуация с отношениями $\equiv_{\text{Sub}}^V, \equiv_{\text{Aut}}^V$ и $\equiv_{\text{Con}}^V$ для многообразий векторных пространств, см. теоремы раздела 1.2:

ТЕОРЕМА 5.3 (О. В. Белеградек, В. Толстых [19]). Для многообразия V векторных пространств над любым фиксированным конечным полем (над полями $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и др.) имеет место равенство

$$\langle \equiv_{\text{Sub}}^V, \equiv_{\text{Aut}}^V, \equiv_{\text{Con}}^V \rangle = \langle \equiv_2, \equiv_2, \equiv_2 \rangle.$$

Этот результат позволяет получить частичную информацию об отношениях $\equiv_{\text{Con}}^V, \equiv_{\text{Sub}}^V$ для многообразий групп.

Для любого многообразия V через FV_{Sub} (FV_{Con}) обозначим класс решеток вида $\text{Sub } \mathcal{F}_V(k)$ ($\text{Con } \mathcal{F}_V(k)$) для любого бесконечного кардинала k .

Алгебру $\mathfrak{A}$ из класса $\mathfrak{K}$ назовем *конечно элементарно аксиоматизируемой в классе $\mathfrak{K}$* , если существует формула φ логики первого порядка такая, что для любой алгебры $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{K}$ условия $\mathfrak{B} \models \varphi$ и $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ равносильны. Кардинал k назовем *конечно аксиоматизируемым в логике второго порядка*, если существует формула φ полной логики второго порядка такая, что $\{k\} = \{\lambda - \text{кардинал} \mid \lambda \models \varphi\}$. Очевидным образом, вопрос об элементарной определимости решетки $\text{Sub } \mathcal{F}_V(k)$ ($\text{Con } \mathcal{F}_V(k)$) в классе FV_{Sub} (FV_{Con}) связан с вопросами описания отношения $\equiv_{\text{Sub}}^V$ ($\equiv_{\text{Con}}^V$): подобная определимость решетки $\text{Sub } \mathcal{F}_V(k)$ ($\text{Con } \mathcal{F}_V(k)$) в классе FV_{Sub} (FV_{Con}) влечет одноэлементность класса $\equiv_{\text{Sub}}^V$ - ($\equiv_{\text{Con}}^V$ -) эквивалентности для кардинала k .

ТЕОРЕМА 5.4 (А. Г. Пинус [81]). а) Для любого нетривиального многообразия V групп решетка $\text{Con } \mathcal{F}_V(k)$ конечно элементарно аксиоматизируема в классе решеток FV_{Con} тогда и только тогда, когда кардинал k конечно аксиоматизируем в полной логике второго порядка.

б) Для любого нетривиального многообразия V абелевых групп решетка $\text{Sub } \mathcal{F}_V(k)$ конечно элементарно аксиоматизируема в классе решеток FV_{Sub} тогда и только тогда, когда кардинал k конечно аксиоматизируем в полной логике второго порядка.

Отметим еще известные результаты относительно рассматриваемых эквивалентностей на классе бесконечных кардиналов, связанные с группами. (См. также работу [112].)

ТЕОРЕМА 5.5. а) (В. Толстых [110].) Для многообразия V всех групп отношение $\equiv_{\text{Aut}}^V$ совпадает с отношением $\equiv_2$.

б) (В. Толстых [113].) Для любого многообразия нильпотентных групп $\mathfrak{N}_c$ степени $c \geq 2$ отношение $\equiv_{\text{Aut}}^{\mathfrak{N}_c}$ совпадает с отношением $\equiv_2$.

в) (В. Толстых [114].) Для многообразия V всех абелевых групп отношения $\equiv_{\text{Aut}}^V$ и $\equiv_2$ совпадают.

Частично прояснена информация об эквивалентностях $\equiv_{\text{Sub}}^V, \equiv_{\text{Con}}^V$ для нетривиальных многообразий V унарных.

ТЕОРЕМА 5.6 (А.Г. Пинус [81]). *Для любого нетривиального многообразия V унарков:*

- а) *отношение $\equiv_{\text{Sub}}^V$ совпадает с отношением ∇ ;*
- б) *для любого бесконечного кардинала k решетка $\text{Con } \mathcal{F}_V(k)$ конечно элементарно аксиоматизируема в классе решеток FV_{Con} тогда и только тогда, когда кардинал k конечно аксиоматизируем в полной логике второго порядка.*

Вопрос об отношении $\equiv_{\text{Aut}}^V$ для многообразий V унарков (совпадение этого отношения с отношением $\equiv_p$) упирается в следующий открытый теоретико-групповой вопрос: верно ли, что для любой счетной группы G и любых бесконечных кардиналов k и λ элементарная эквивалентность групп $\text{Sym}(k)$ и $\text{Sym}(\lambda)$ влечет элементарную эквивалентность групп $G S \text{Sym}(k)$ и $G S \text{Sym}(\lambda)$? Здесь $G_1 S G_2$ – полное сплетение групп G_1 и G_2 .

Напомним, что многообразие V называется *нормальным*, если для любого нетривиального терма $t(\bar{x})$ сигнатуры этого многообразия и любой переменной y тождество $t(\bar{x}) = y$ не является истинным на V .

Многообразие V обладает *свойством исключения*, если для любого кардинала k и любого $\alpha \in k$ подмножество $\mathcal{F}_V(k) \setminus \{\alpha\}$ является подалгеброй алгебры $\mathcal{F}_V(k)$.

Многообразие V обладает *существенно двухместной функцией*, если существует сигнатурная функция $f(x, y)$ такая, что тождества $f(x, y) = f(x, z)$ и $f(y, x) = f(z, x)$ не являются истинными на V .

Многообразие V *идемпотентно*, если для любой сигнатурной функции $g(x_1, \dots, x_n)$ на V истинны тождества $g(x, \dots, x) = x$.

Многообразие V называется *2-конечным*, если конечна алгебра $\mathcal{F}_V(2)$.

Заметим, что, к примеру, свойством исключения обладает любое многообразие решеток, примерами многообразий со свойством исключения являются также любое многообразие директоидов, многообразие полурешеток, любое нормальное многообразие.

ТЕОРЕМА 5.7 (А.Г. Пинус, Г. Роуз [84]). *Для любого идемпотентного 2-конечного многообразия V со свойством исключения, обладающего существенно двухместной функцией, отношение $\equiv_{\text{Sub}}^V$ совпадает с отношением $\equiv_2$.*

Условия этой теоремы выполнены для многообразия полурешеток, любого многообразия решеток, коммутативных директоидов.

ТЕОРЕМА 5.8 (А.Г. Пинус, Г. Роуз [85]). *Для любого нормального многообразия V решетка $\text{Con } \mathcal{F}_V(k)$ конечно элементарно аксиоматизируема в классе решеток FV_{Con} тогда и только тогда, когда кардинал k конечно аксиоматизируем в полной логике второго порядка.*

Для ряда нормальных многообразий утверждение теоремы 5.8 может быть усилено.

Через $(*)$ обозначим следующее свойство многообразия V : понятие V -неразложимой конгруэнции и понятие главной конгруэнции на V -свободных алгебрах $\mathcal{F}_V(k)$ совпадают. В частности, свойством $(*)$ обладает многообразие всех полугрупп и многообразие всех коммутативных полугрупп.

ТЕОРЕМА 5.9 (А. Г. Пинус [81]). *Для любого нетривиального нормального многообразия V со свойством $(*)$ отношения $\equiv_{\text{Con}}^V$ и $\equiv_2$ совпадают.*

Тем самым, совпадают отношения $\equiv_{\text{Con}}^V$ и $\equiv_2$, в частности, для многообразий всех полугрупп, всех коммутативных полугрупп.

Аналогичная ситуация имеет место для многообразия V (всех коммутативных) полугрупп и отношения $\equiv_{\text{Sub}}^V$.

ТЕОРЕМА 5.10 (А. Г. Пинус [81]). *Для многообразия V всех (всех коммутативных) полугрупп отношение $\equiv_{\text{Sub}}^V$ совпадает с отношением $\equiv_2$.*

Заметим также, что, очевидным образом, отношения $\equiv_{\text{Aut}}^V$ и $\equiv_p$ совпадают для любого нормального многообразия V . Тем самым, полностью известна тройка отношений $\langle \equiv_{\text{Sub}}^V, \equiv_{\text{Aut}}^V, \equiv_{\text{Con}}^V \rangle = \langle \equiv_2, \equiv_p, \equiv_2 \rangle$ для многообразия V всех полугрупп (всех коммутативных полугрупп).

ТЕОРЕМА 5.11 (А. Г. Пинус [81]). *Для многообразия V полурешеток отношения $\equiv_{\text{Con}}^V$ и $\equiv_2$ совпадают.*

Таким образом, для многообразия V полурешеток тройка отношений $\langle \equiv_{\text{Sub}}^V, \equiv_{\text{Aut}}^V, \equiv_{\text{Con}}^V \rangle$ совпадает с тройкой $\langle \equiv_2, \equiv_p, \equiv_2 \rangle$.

Здесь равенство отношений $\equiv_{\text{Aut}}^V$ и $\equiv_p$ следует из того, что единственными $\wedge$ -неразложимыми элементами полурешетки $\mathcal{F}_V(k)$ являются ее свободные порождающие.

Напомним, что тождество $t_1 = t_2$ называется *регулярным*, если термы t_1 и t_2 зависят от одних и тех же переменных. Многообразие, аксиоматизируемое некоторой совокупностью регулярных тождеств, называется *регулярным*.

Из теоремы 5.11 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.12 (А. Г. Пинус [81]). *Для любого регулярного многообразия V решетка $\text{Con } \mathcal{F}_V(k)$ конечно элементарно аксиоматизируема в классе решеток FV_{Con} тогда и только тогда, когда кардинал k конечно аксиоматизируем в полной логике второго порядка.*

Суммируем приведенные выше факты, связанные со строением отношений $\equiv_{\text{Sub}}^V, \equiv_{\text{Aut}}^V, \equiv_{\text{Con}}^V$ для различных многообразий V в виде таблицы 1, в которой знак ? означает открытость данного вопроса.

Здесь символ $\equiv_2^*$, стоящий в столбце $\equiv_{\text{Con}}^V$ ($\equiv_{\text{Sub}}^V$) означает, что решетка $\text{Con } \mathcal{F}_V(k)$ ($\text{Sub } \mathcal{F}_V(k)$) конечно элементарно аксиоматизируема в классе FV_{Con} (FV_{Sub}) тогда и только тогда, когда кардинал k конечно аксиоматизируем в полной логике второго порядка.

В связи с приведенными результатами возникает целый ряд естественных вопросов. Прежде всего: нельзя ли усилить результаты, касающиеся аксиоматизируемости, до совпадения соответствующих отношений эквивалентности?

Совпадают ли отношения $\equiv_{\text{Con}}^V$ и $\equiv_2$ ($\equiv_{\text{Sub}}^V$ и $\equiv_2$) для любого конечно базлируемого многообразия V унаров, групп, всех нормальных многообразий, регулярных многообразий (многообразий групп)?

Как видно из представленной таблицы, все фигурирующие в качестве отношений $\equiv_{\text{Sub}}^V, \equiv_{\text{Aut}}^V, \equiv_{\text{Con}}^V$ отношения и претендующие на эту роль (исходя из элементарно определяемых производных структур свободных алгебр) суть отношения одного из видов: $\nabla, \equiv_p$ или $\equiv_2$. Представляет интерес ответ на вопрос: всегда ли это так? То есть верно ли, что для любого конечного базлируемого многообразия V конечной сигнатуры отношения $\equiv_{\text{Sub}}^V, \equiv_{\text{Aut}}^V$ и $\equiv_{\text{Con}}^V$ входят в совокупность $\{\nabla, \equiv_p, \equiv_2\}$?

Таблица 1

Многообразие V	$\equiv_{\text{Sub}}^V$	$\equiv_{\text{Aut}}^V$	$\equiv_{\text{Con}}^V$
1. Многообразие множеств	∇ Тарский	$\equiv_p$ Ершов	$\equiv_2$ Пинус
2. Многообразие векторных пространств над конечным полем	$\equiv_2$ Белеградек–Толстых	$\equiv_2$ Белеградек–Толстых	$\equiv_2$ Белеградек–Толстых
3. Многообразие унаров	∇ Пинус	?	$\equiv_2^*$ Пинус
4. Идемпотентные, симметричные многообразия со свойством исключения, 2-конечные и с существенно двухместной функцией (многообразия решеток, коммутативных директоидов, полурешеток)	$\equiv_2$ Пинус–Роуз	?	?
5. Нормальные многообразия	?	$\equiv_p$ очевидно	$\equiv_2^*$ Пинус–Роуз
6. Нормальные многообразия, для которых $\vee$ -неразложимые конгруэнции на свободной алгебре суть главные (в частности, многообразия всех полугрупп, всех коммутативных полугрупп)	?	$\equiv_p$ очевидно	$\equiv_2$ Пинус
7. Многообразие всех полугрупп (всех коммутативных полугрупп)	$\equiv_2$ Пинус	$\equiv_p$ очевидно	$\equiv_2$ Пинус
8. Многообразие полурешеток	$\equiv_2$ Пинус–Роуз	$\equiv_p$ очевидно	$\equiv_2$ Пинус
9. Регулярные многообразия	?	?	$\equiv_2^*$ Пинус
10. Многообразие всех групп	$\equiv_2^*$ Пинус	$\equiv_2$ Толстых	$\equiv_2^*$ Пинус
11. Любое нетривиальное многообразие групп	?	?	$\equiv_2^*$ Пинус
12. Любое нетривиальное многообразие абелевых групп	$\equiv_2^*$ Пинус	?	$\equiv_2^*$ Пинус
13. Многообразие всех абелевых групп	$\equiv_2^*$ Пинус	$\equiv_2$ Толстых	$\equiv_2^*$ Пинус
14. Любое многообразие всех нильпотентных групп степени ≥ 2	?	$\equiv_2$ Толстых	$\equiv_2^*$ Пинус

При этом важно отметить, что все доказательства известных равенств между отношениями $\equiv_{\text{Sub}}^V$, $\equiv_{\text{Aut}}^V$, $\equiv_{\text{Con}}^V$ и отношениями $\equiv_p$, $\equiv_2$ проходят путем интерпретации соответствующих логик второго порядка Sym , либо 2ИП на кардиналах k в элементарных теориях решеток $\text{Con } \mathcal{F}_V(k)$, $\text{Sub } \mathcal{F}_v(k)$, либо групп $\text{Aut } \mathcal{F}_V(k)$. Однако подобные интерпретации не могут иметь места для любых многообразий V . Действительно, хорошо известны результаты М. Рабина [87] о разрешимости теории второго порядка счетной свободной булевой алгебры с кванторами по фильтрам и Л. Хайндорфа [42] о неразрешимости подобной теории для несчетных свободных булевых алгебр (см. § 4). Тем самым, для многообразия BA булевых алгебр (так как двусосновная модель, состоящая из булевой алгебры и фильтров, как хорошо известно, элементарно интерпретируется в решетке фильтров соответствующей булевой алгебры) отношение $\equiv_{\text{Con}}^{BA}$ не совпадает с отношением ∇ . Но в то же время в силу результата М. Рабина

логики Sym и 2ИП на кардинале $\aleph_0$ не могут быть проинтерпретированы (в силу их неразрешимости) в элементарной теории решетки $\text{Con } \mathcal{F}_{BA}(\aleph_0)$.

Приведенная выше таблица индуцирует также следующий вопрос. Пусть $\langle \equiv^1, \equiv^2, \equiv^3 \rangle$ – произвольный набор из трех эквивалентностей на классе всех бесконечных кардиналов такой, что $\equiv^i \in \{\nabla, \equiv_p, \equiv_2\}$. Существует ли конечно базлируемое многообразие V конечной сигнатуры такое, что $\langle \equiv_{\text{Sub}}^V, \equiv_{\text{Aut}}^V, \equiv_{\text{Con}}^V \rangle = \langle \equiv^1, \equiv^2, \equiv^3 \rangle$?

При отрицательном ответе на эту проблему возникает вопрос описания троек эквивалентностей $\langle \equiv^1, \equiv^2, \equiv^3 \rangle$, где $\equiv^i \in \{\nabla, \equiv_p, \equiv_2\}$, реализуемых в качестве тройки $\langle \equiv_{\text{Sub}}^V, \equiv_{\text{Aut}}^V, \equiv_{\text{Con}}^V \rangle$ для конечно базлируемых многообразий V конечной сигнатуры.

Существует ли конечно базлируемое многообразие V конечной сигнатуры, для которого выполнено одно из следующих условий:

- а) отношение $\equiv_{\text{Sub}}^V$ совпадает с отношением $\equiv_p$;
- б) отношение $\equiv_{\text{Aut}}^V$ совпадает с отношением ∇ ;
- в) отношение $\equiv_{\text{Con}}^V$ совпадает с отношением $\equiv_p (\nabla)$?

Наконец, естественен интерес к описанию отношений $\equiv_{\text{Sub}}^V, \equiv_{\text{Aut}}^V, \equiv_{\text{Con}}^V$ для основных классических многообразий групп, колец, решеток, булевых алгебр, не попавших в приведенную выше таблицу, либо указанных в ней, но с открытым вопросом об описании соответствующих ему отношений.

В заключение приведем еще один результат, связанный с элементарной эквивалентностью производных структур свободных алгебр.

ТЕОРЕМА 5.13 (А. Г. Пинус [79]). Пусть V – многообразие дистрибутивных решеток и $\text{Con}' \mathcal{F}_V(k)$ есть частичная универсальная алгебра $\langle \text{Con } \mathcal{F}_V(k); \vee, \wedge, \circ \rangle$, где $\circ$ – частичная операция на $\text{Con } \mathcal{F}_V(k)$: $\theta_1 \circ \theta_2$ является произведением конгруэнций θ_1, θ_2 , если $\theta_1 \circ \theta_2$ есть конгруэнция на $\mathcal{F}_V(k)$ (если $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1 = \theta_1 \vee \theta_2$), и не определена в противном случае. В этом случае отношение $\text{Con}' \mathcal{F}_v(k) \equiv \text{Con}' \mathcal{F}_v(\lambda)$ имеет место тогда и только тогда, когда $k \equiv_2 \lambda$.

О близких к затронутым здесь вопросах см. также работу С. Шелаха [98].

§ 6. Производные структуры топологических пространств

В заключение коротко остановимся на результатах, связанных с приложением языка логики первого порядка для изучения топологических пространств. Значительная часть теории топологических пространств формализуется в рамках теории различных их производных структур, носящей чисто алгебраический характер. Наиболее часто в этой роли выступают алгебра замыканий $\mathfrak{A}(X)$, решетка замкнутых подмножеств $L(X)$, кольцо действительных непрерывных функций $C(X)$ топологического пространства X . Напомним, что $\mathfrak{A}(X) = \langle P(X); \cup, \cap, \neg, \emptyset, X, - \rangle$, где $\mathfrak{A}(X) = \langle P(X); \cup, \cap, \neg, \emptyset, X, \rangle$ – булева алгебра всех подмножеств множества X , а $-$ – одноместная операция на $P(X)$ замыкания (в пространстве X) подмножеств множества X . Решетка $L(X)$ и кольцо $C(X)$ определяются естественным образом. Заметим, что элементарная теория алгебры $\mathfrak{A}(X)$, очевидным образом, включает в себя элементарную теорию решетки $L(X)$. В работе [62] доказано, что для класса так называемых совершенно нормальных пространств элементарная эквивалентность их колец непрерывных функций влечет элементарную эквивалентность решеток их замкнутых подмножеств. Изучение элементарных теорий подобных алгебраических про-

изводных структур для топологических пространств начато в работе А. Гржегорчика [37], доказавшего неразрешимость элементарной теории класса $\mathfrak{A}(\mathfrak{Z}) = \{\mathfrak{A}(X) \mid X \text{ — произвольное топологическое пространство}\}$. Некоторая систематическая программа исследований элементарных теорий производных структур топологических пространств была предложена в работе [43]. Дальнейшее изучение элементарных теорий производных структур топологических пространств было, по большей части, связано с изучением элементарных теорий алгебраических производных при тех или иных ограничениях на класс рассматриваемых топологических пространств. Последнее, в частности, объяснимо тем, что абсолютно бесперспективны попытки построить элементарную классификацию производных структур для класса всех топологических пространств, ввиду столь же очевидной невозможности найти достаточно эффективную систему теоретико-множественных инвариантов отношения гомеоморфности для класса всех топологических пространств. Хотя для ряда частных случаев получены необходимые и достаточные условия элементарной эквивалентности производных структур произвольного пространства X производным структурам того или иного фиксированного топологического пространства. Так, в работе Ю. Гуревича и С. Шелаха [40] найдены необходимые и достаточные условия на топологическое пространство X , при которых алгебра $\mathfrak{A}(X)$ элементарно эквивалентна алгебре $\mathfrak{A}(Q)$, где Q — пространство рациональных чисел с порядковой топологией. Отметим также, что из результатов работы М. Рабина [87] вытекает утверждение следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6.1 (М. Рабин [87]). *Элементарная теория алгебры $\mathfrak{A}(\mathbb{Q})$ разрешима.*

Вообще, изучение элементарных теорий алгебр замыканий $\mathfrak{A}(X)$ топологических пространств X с порядковой топологией, индуцированной некоторым отношением плотного линейного порядка $\leq$ на множестве X , довольно часто равносильно исследованию монадической теории второго порядка линейно упорядоченного множества $\langle X; \leq \rangle$ (обе теории интерпретируются друг в друге). В частности, очевидным образом, это имеет место для упорядоченного множества $\mathbb{R}$ действительных чисел. В работе С. Шелаха [97] доказана неразрешимость монадической теории упорядоченного множества $\langle \mathbb{R}; \leq \rangle$, и, тем самым, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.2 (С. Шелах [97]). *В предположении континуум-гипотезы элементарная теория алгебры $\mathfrak{A}(\mathbb{R})$ неразрешима.*

В работах Ю. Гуревича [38], [39] утверждение этой теоремы перенесено на более широкий класс топологических пространств, включающий в себя, в частности, и канторовский дисконтинуум.

Отметим, что из уже упомянутых выше результатов М. Рабина вытекает контрастное к утверждению теоремы 6.2 утверждение.

ТЕОРЕМА 6.3 (М. Рабин [87]). *Элементарная теория решетки $L(\mathbb{R})$ разрешима.*

Другим дизъюнктным к классу топологических пространств, близких к пространствам $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$, но также довольно тщательно изученным, в рассматриваемом контексте, классом топологических пространств, является класс разреженных пространств. Напомним, что топологическое пространство X называется *разреженным*, если оно не содержит совершенных подпространств, т.е. если последовательная итерация взятия

производной Кантора–Бендиксона, начатая с пространства X , приводит к пустому множеству. При этом, в частности, доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 6.4 (Г. Херре, Д. Зеезе [44]). *В предположении существования слабо компактного кардинала элементарная теория класса алгебр замыканий T_2 -пространств с пустой второй производной неразрешима.*

ТЕОРЕМА 6.5 (А. Г. Пинус [74]). а) *Элементарная теория класса решеток замкнутых подмножеств T_1 -пространств с конечным числом предельных точек неразрешима.*

б) *Элементарная теория класса алгебр замыканий T_2 -пространств с конечным числом предельных точек разрешима.*

Заметим, что дополнительные (к ZFC) теоретико-множественные предположения в формулировках теорем 6.2, 6.4 возникают не случайно. Элементарные теории производных структур ряда топологических пространств не являются однозначно определенными в рамках теоретико-множественной аксиоматики ZFC. К примеру, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.6 (Г. Херре, Д. Зеезе [44]). *Существует элементарная формула φ сигнатуры алгебр замыкания, вложение, либо не вложение которой в элементарную теорию алгебры $\mathfrak{A}(X)$ не зависит от ZFC, здесь X – пространство, определенное на ординале $\omega_2 + 1$ порядковой топологией.*

В связи с отмеченной выше невозможностью построения элементарной классификации алгебраических производных структур для класса всех топологических пространств, естественно, возникает вопрос о доказательстве утверждений типа теоремы Левенгейма–Сколема для данного класса структур, а точнее, нахождение для данного класса структур чисел Левенгейма и Ханфа. Пусть $\mathfrak{A}(\mathfrak{S})$ ($L(\mathfrak{S})$, $C(\mathfrak{S})$) – класс всех алгебр замыканий (класс всех решеток замкнутых подмножеств, класс всех колец непрерывных функций соответственно) для произвольных топологических пространств.

ТЕОРЕМА 6.7 (А. Г. Пинус [73]). *Числа Левенгейма (числа Ханфа) для классов $\mathfrak{A}(\mathfrak{S})$ и $L(\mathfrak{S})$ совпадают с числом Левенгейма (числом Ханфа) полной логики второго порядка.*

Представляет интерес нахождение чисел Левенгейма и Ханфа для класса $C(\mathfrak{S})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Бэр. Линейная алгебра и проективная геометрия. М.: ИЛ, 1955.
- [2] J. T. Baldwin, S. Shelah. Second-order quantifiers and the complexity of theories // Notre Dame J. Formal Logic. 1985. V. 26. № 3. P. 229–303.
- [3] Б. Баясгалан. Разрешимость теорий производных структур полугрупп // Алгебраические системы и их многообразия. Свердловск: Урал. гос. ун-т им. А. М. Горького, 1988. С. 4–13.
- [4] Б. Баясгалан. Ограниченные теории некоторых классов квазиупорядоченных множеств // Исследования алгебраических систем. Свердловск: Урал. гос. ун-т им. А. М. Горького, 1989. С. 23–30.
- [5] Б. Баясгалан. Разрешимые теории производных структур полугрупп // Автореферат дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. Свердловск, 1991.
- [6] Б. Баясгалан. Разрешимость элементарных теорий решеток подполугрупп // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31. № 1. С. 27–33.

- [7] Б. Баясгалан, Ю. М. Важенин. О разрешимости теорий классов степеней полугрупп // Изв. вузов. Матем. 1988. № 11. С. 62–64.
- [8] С. I. Beidar, A. V. Mikhalev. On Mal'cev's theorem on elementary equivalence of linear groups // Contemp. Math. 1992. V. 131, Part 1. P. 29–35.
- [9] К. И. Бейдар, А. В. Михалев, Г. Е. Пунинский. Логические аспекты теории колец и модулей // Фундам. прикл. матем. 1995. Т. 1. № 1. С. 1–62.
- [10] O. V. Belegradek. On the Mal'cev correspondence between rings and groups // Proceedings of the 7th Easter Conference on Model Theory. Berlin, 1989. P. 43–57.
- [11] O. V. Belegradek. Groups elementarily equivalent to $UT_3(R)$ // Proceedings of the 8th Easter Conference on Model Theory. Berlin, 1990. P. 31–38. (Seminarberichte. V. 110.)
- [12] O. V. Belegradek. The Mal'cev correspondence revisited // Contemp. Math. 1992. V. 131, Part 1. P. 37–59.
- [13] О. В. Белеградек. Соответствие Мальцева и неразрешимость // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. № 4. С. 24–29.
- [14] О. В. Белеградек. Унитарные группы и неразрешимость // Изв. вузов. Матем. 1993. № 3. С. 19–22.
- [15] O. V. Belegradek. Some open problems in the model theory of unitriangular groups // Proceedings of the 10th Easter Conference on Model Theory. Berlin: Humboldt Univ., 1993. P. 9–13.
- [16] O. V. Belegradek. Quasi-unitriangular groups // J. Symbolic Logic. 1993. V. 58. № 1. P. 205–218.
- [17] O. V. Belegradek. The model theory of unitriangular groups // Ann. Pure Appl. Logic. 1994. V. 68. № 3. P. 225–261.
- [18] O. V. Belegradek. Model theory of unitriangular groups // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. (2). 1999. V. 195. P. 1–116.
- [19] O. V. Belegradek, V. Tolstykh. The logical complexity of theories associated with an infinite-dimensional vector space // Proceedings of the 9th Easter Conference on Model Theory. Berlin: Humboldt Univ., 1991. P. 12–34.
- [20] R. Bonnet. Very strongly rigid Boolean algebras continuum discrete set condition, countable anti-chain condition // Algebra Universalis. 1980. V. 11. № 3. P. 9–25.
- [21] Е. И. Бунина. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп // Фундам. прикл. матем. 1998. Т. 4. № 4. С. 1265–1278.
- [22] Е. И. Бунина. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами // УМН. 1998. Т. 53. № 2. С. 137–138.
- [23] Е. И. Бунина. Элементарная эквивалентность групп Шевалле // Труды седьмых математических чтений МГСУ. 2000. С. 120–124.
- [24] Е. И. Бунина. Элементарная эквивалентность групп Шевалле // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 157–158.
- [25] Е. И. Бунина, А. В. Михалев. Элементарная эквивалентность линейных и алгебраических групп // Фундам. прикл. матем. 2000. Т. 6. № 3. С. 707–722.
- [26] S. Burris, H. P. Sankappanavar. Lattice-theoretic decision problems in universal algebra // Algebra Universalis. 1975. V. 5. № 2. P. 163–177.
- [27] В. Г. Дурнев. Неразрешимость некоторых теорий групп $SL(n, \mathbb{Z})$ и $GL(n, \mathbb{Z})$ // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: Ярославский гос. университет, 1994. С. 61–68.
- [28] В. Г. Дурнев. Об элементарных теориях целочисленных линейных групп // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 5. С. 41–58.
- [29] Ж. Дьёдонне. Геометрия классических групп. М.: Мир, 1974.
- [30] Ю. Л. Ершов. Неразрешимость теорий симметрических и простых конечных групп // Докл. АН СССР. 1964. Т. 158. № 4. С. 777–779.
- [31] Ю. Л. Ершов. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
- [32] Ю. Л. Ершов, И. А. Лавров, А. Д. Тайманов, М. А. Тайцлин. Элементарные теории // УМН. 1965. Т. 20. № 4. С. 37–108.
- [33] Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. Математическая логика. М.: Наука, 1987.
- [34] Э. И. Фридман. Об универсальных теориях решеток подгрупп групп // Алгоритмические вопросы алгебраических систем и ЭВМ. Иркутск, 1979. С. 172–176.

- [35] И. З. Голубчик, А. М. Михалев. Изоморфизмы общей линейной группы над ассоциативными кольцами // Вестник Моск. ун-та. Сер. I матем. мех. 1983. №3. С. 61–72.
- [36] И. З. Голубчик, А. В. Михалев. Изоморфизмы унитарных групп над ассоциативными кольцами // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1983. Т. 132. С. 97–109.
- [37] A. Grzegorzczak. Undecidability of some topological theories // Fund. Math. 1951. V. 38. №1. P. 137–152.
- [38] Y. Gurevich. Monadic theory of order and topology. I // Israel J. Math. 1977. V. 27. №3–4. P. 299–319.
- [39] Y. Gurevich. Monadic theory of order and topology. II // Israel J. Math. 1979. V. 34. №1–2. P. 45–71.
- [40] Y. Gurevich, S. Shelah. Modest theory of short chains. II // J. Symbolic Logic. 1979. V. 44. №4. P. 491–502.
- [41] L. Heindorf. Comparing the expressive power of some languages for boolean algebras // Z. Math. Logik Grundlag. Math. 1981. V. 27. №5. P. 419–434.
- [42] L. Heindorf. Regular ideals and Boolean pairs // Z. Math. Logik Grundlag. Math. 1984. V. 30. №6. P. 547–560.
- [43] G. W. Henson, C. G. Jockusch, L. A. Rubel, G. Takeuti. First order topology // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.). 1977. V. 143. P. 5–40.
- [44] H. Herre, D. Seese. Concerning the monadic theory of the topology of well-ordering and scattered spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 1980. V. 28. №1–2. P. 1–6.
- [45] М. И. Каргаполов. Об элементарной теории структур подгрупп // Алгебра и логика. 1962. Т. 1. №3. С. 46–53.
- [46] Г. Т. Козлов. Неразрешимость элементарных теорий решеток подгрупп конечных абелевых p -групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9. №2. С. 167–171.
- [47] А. И. Кокорин. Связь элементарной и подгрупповой теорий абелевых групп // Тезисы IV Всесоюзной конференции по математической логике. Кишинев, 1976. С. 65.
- [48] А. И. Кокорин, А. Г. Пинус. Вопросы разрешимости расширенных теорий // УМН. 1978. Т. 33. №2. С. 49–84.
- [49] Ж. Лаллеман. Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985.
- [50] L. Lipshitz. The undecidability of the word problems for projective geometries and modular lattices // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 193. №1. P. 171–180.
- [51] Н. Г. Луковников, В. И. Мартыянов. Универсальные элементарно-подгрупповые теории абелевых групп // Алгоритмические вопросы алгебраических систем / Под ред. А. И. Кокорина. Иркутск, 1978. С. 42–57.
- [52] А. И. Мальцев. Об одном соответствии между кольцами и группами // Матем. сб. 1960. Т. 50. №3. С. 257–266.
- [53] А. И. Мальцев. Об элементарных свойствах линейных групп // Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск: Наука, 1961. С. 110–132.
- [54] W. Marek. Consistance d'une hypothèse de Fraïssé sur la définissabilité dans un langage du second ordre // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B. 1973. V. 276. P. A1147–A1150.
- [55] W. Marek. Sur la consistance d'une hypothèse de Fraïssé sur la définissabilité dans un langage du second ordre // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B. 1973. V. 276. P. A1169–A1172.
- [56] В. И. Мартыянов. О теории абелевых групп и булевых алгебр с автоморфизмами // IV Всесоюзная конференция по математической логике. Кишинев, 1976.
- [57] В. В. Маевский. Об ограниченных теориях бесконечных симметрических групп и полугрупп // Тезисы Международной конференции по алгебре, посвященной памяти А. И. Мальцева. Новосибирск, 1989. С. 73.
- [58] В. В. Маевский. Критические теории бесконечных симметрических полугрупп // Тезисы Всесоюзного симпозиума по теории полугрупп. Свердловск: Уральский гос. университет, 1988. С. 51.
- [59] R. McKenzie. On elementary types of symmetric groups // Algebra Universalis. 1971. V. 1. №1. P. 13–20.
- [60] Е. М. Могилянская. Решение проблемы Тамуры // Современный анализ и геометрия. Ленинград: Ленинградский гос. педагогический университет, 1972. С. 148–151.
- [61] V. A. Molchanov. Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. 1983. V. 27. №1. P. 155–199.

- [62] Ф. А. Мурзин. Об элементарной эквивалентности колец непрерывных функций // Теория моделей и ее приложения. Алма-Ата: Казахский гос. университет, 1980. С. 72–74.
- [63] Ю. В. Нагребечкая. О границе разрешимости бесконечной симметрической группы // Изв. УрГУ. Матем. мех. 1999. № 14. С. 109–118.
- [64] Ю. В. Нагребечкая. О разрешимости теорий первого порядка групп и моноидов целочисленных матриц // Алгебра и логика. 2000. Т. 39. № 4. С. 480–504.
- [65] Ю. В. Нагребечкая. О граничной эквивалентности колец и матричных колец над ними // Алгебра и логика. 2000. Т. 39. № 6. С. 693–710.
- [66] Ю. В. Нагребечкая. О различимости ограниченных теорий целочисленных линейных групп // Труды международного семинара, посвященного 90-летию со дня рождения С. Н. Черникова. Екатеринбург: Уральский гос. университет, 2002. С. 180–183.
- [67] Ю. В. Нагребечкая. О границах разрешимости колец целочисленных матриц // Деп. в ВИНТИ. № 286, 2000.
- [68] C. Naturman, H. Rose. Elementary equivalent pairs of algebras associated with sets // Algebra Universalis. 1991. V. 28. № 3. P. 324–338.
- [69] А. Г. Пинус. Замечания к статье Ю. М. Важенина “Элементарные свойства полугрупп преобразований упорядоченных множеств” // Алгебра и логика. 1971. Т. 10. № 3. С. 327–328.
- [70] А. Г. Пинус. О теории выпуклых подмножеств // Сиб. матем. журн. 1972. Т. 13. № 1. С. 218–224.
- [71] A. G. Pinus. Elementary definability of symmetry groups // Algebra Universalis. 1973. V. 3. № 1. P. 59–66.
- [72] А. Г. Пинус. Элиминированность кванторов Q_0 и Q_1 на симметрических группах // Изв. вузов. Матем. 1979. № 12. С. 45–47.
- [73] А. Г. Пинус. Об элементарной эквивалентности топологических пространств // Сиб. матем. журн. 1979. Т. 20. № 2. С. 433–439.
- [74] А. Г. Пинус. Монадические теории разреженных топологических пространств и логики второго порядка // Алгоритмические вопросы алгебраических систем и ЭВМ. Иркутск: Изд-во ИрГУ, 1985. С. 50–59.
- [75] А. Г. Пинус. Элементарная эквивалентность решеток разбиений // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 29. № 3. С. 211–212.
- [76] А. Г. Пинус. Теории второго порядка конгруэнц-дистрибутивных многообразий // Алгебра и ее приложения. Иркутск: Иркутский гос. университет, 1994. С. 102–110.
- [77] А. Г. Пинус. Об элементарных теориях генерических мультиалгебр // Изв. вузов. Матем. 1999. № 4. С. 39–43.
- [78] А. Г. Пинус. Об определмости конечных алгебр производными структурами // Изв. вузов. Матем. 2001. № 4. С. 38–42.
- [79] А. Г. Пинус. Об элементарной эквивалентности производных структур свободных решеток // Изв. вузов. Матем. 2002. № 5. С. 44–47.
- [80] А. Г. Пинус. Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.
- [81] А. Г. Пинус. Элементарная эквивалентность производных структур свободных полугрупп, унаров, групп // Алгебра и логика. 2004. Т. 43. № 6. С. 731–748.
- [82] А. Г. Пинус, З. А. Дулатова. Ограниченные теории решеток подалгебр некоторых хорновых классов // Изв. вузов. Матем. 1986. № 11. С. 79–81.
- [83] A. G. Pinus, R. Sz. Madarász. On generic multi-algebras // Novi Sad J. Math. 1997. V. 27. № 2. P. 77–82.
- [84] А. Г. Пинус, Г. Роуз. Элементарная эквивалентность решеток подалгебр свободных алгебр // Алгебра и логика. 2000. Т. 39. № 5. С. 595–601.
- [85] A. G. Pinus, H. Rose. Second order equivalence of cardinals: an algebraic approach // Contributions to General Algebras 13. Klagenfurt: Heyn, 2001. P. 275–284.
- [86] Б. И. Плоткин. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966.
- [87] M. Rabin. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 141. № 1. P. 1–35.
- [88] В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков. Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 21. М.: ВИНТИ, 1983. С. 3–79.

- [89] B. Rose. The $\aleph_1$ -categoricity of strictly upper triangular matrix rings over algebraically closed fields // J. Symbolic Logic. 1978. V. 43. №2. P. 250–259.
- [90] M. Rubin. The theory of Boolean algebras with a distinguished subalgebras is undecidable // Ann. Sci. Univ. Clermont. 1976. № 60. Math. № 13. P. 129–134.
- [91] M. Rubin. On the automorphism groups of homogeneous and saturated boolean algebras // Algebra Universalis. 1979. V. 9. № 1. P. 54–86.
- [92] M. Rubin. On the automorphism groups of countable Boolean algebras // Israel J. Math. 1980. V. 35. № 1–2. P. 151–170.
- [93] M. Rubin, S. Shelah. On the elementary equivalence of automorphism groups of Boolean algebras; downward Skolem–Löwenheim theorem and compactness of related quantifiers // J. Symbolic Logic. 1980. V. 45. №2. P. 265–283.
- [94] S. Shelah. Every two elementarily equivalent models have isomorphic ultrapowers // Israel J. Math. 1971. V. 10. №2. P. 224–233.
- [95] S. Shelah. There are just four second-order quantifiers // Israel J. Math. 1973. V. 15. №2. P. 282–300.
- [96] S. Shelah. First order theory of permutation groups // Israel J. Math. 1973. V. 14. №1. P. 149–162; corrections: ibid. 1973. V. 15. №3. P. 437–441.
- [97] S. Shelah. The monadic theory of order // Ann. of Math. (2). 1975. V. 102. №3. P. 379–419.
- [98] S. Shelah. On what I do not understand (and have something to say), model theory // Math. Japon. 2000. V. 51. №2. P. 329–377.
- [99] S. Shelah. Interpreting set theory in the endomorphism semi-group of a free algebra or in a category // Ann. Sci. Univ. Clermont. 1976. № 60. Math. № 13. P. 1–29.
- [100] Л. Н. Шеврин. Об элементарных структурных свойствах полугрупп // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. №2. С. 305–308.
- [101] Л. Н. Шеврин. Элементарные структурные свойства полугрупп // Сиб. матем. журн. 1966. Т. 7. №3. С. 664–684.
- [102] Л. Н. Шеврин, А. Я. Овсянников. Полугруппы и их подполугрупповые решетки. Ч. 1: Полугруппы с некоторыми типами решеток подполугрупп и решеточные характеристики классов полугрупп. Свердловск: Уральский гос. университет, 1990.
- [103] А. М. Слободской. Универсальная теория группы $GL(3, \mathbb{Z})$ // Алгоритмические вопросы алгебраических систем и ЭВМ. Иркутск: Иркутский гос. университет, 1979. С. 200–217.
- [104] А. М. Слободской, Э. И. Фридман. Неразрешимые универсальные теории решеток подгрупп абелевых групп // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. №2. С. 227–234.
- [105] М. Судзуки. Строение группы и строение структуры ее подгрупп. М.: ИЛ, 1960.
- [106] Д. А. Супруненко. Группы матриц. М.: Наука, 1972.
- [107] М. А. Тайцлин. Об элементарных теориях решеток подгрупп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9. №4. С. 473–483.
- [108] A. Tarski. Arithmetical classes and types of Boolean algebras // Bull. Amer. Math. Soc. 1949. V. 55. №1. P. 64.
- [109] В. А. Толстых. О некоторых интерпретациях в общей линейной группе // Труды советско-французского colloquium по теории моделей. Караганда: КарГУ, 1990. С. 202–214.
- [110] V. Tolstykh. Set theory is interpretable in the automorphism group of an infinitely generated free group // J. London Math. Soc. (2). 2000. V. 62. №1. P. 16–26.
- [111] V. Tolstykh. Elementary equivalence of infinite-dimensional classical groups // Ann. Pure Appl. Logic. 2000. V. 105. №1. P. 103–156.
- [112] V. Tolstykh. The automorphism tower of a free group // J. London Math. Soc. (2). 2000. V. 61. №2. P. 423–440.
- [113] V. Tolstykh. On the logical strength of the automorphism groups of free nilpotent groups // Contemp. Math. 2002. V. 302. P. 113–120.
- [114] V. Tolstykh. What does the automorphism group of a free Abelian group A know about A // Contemp. Math. (to appear).
- [115] Ю. М. Важенин. Элементарные свойства полугрупп преобразований упорядоченных множеств // Алгебра и логика. 1970. Т. 9. №3. С. 281–301.
- [116] Ю. М. Важенин. Об элементарной определимости и элементарной характеризуемости классов рефлексивных графов // Изв. вузов. Матем. 1972. №7. С. 3–17.

- [117] Ю. М. Важенин. О глобальной надполугруппе симметрической полугруппы // Математические записки УрГУ. 1974. Т. 9. № 1. С. 3–10.
- [118] Ю. М. Важенин. Об элементарных теориях симметрических групп и полугрупп // Изв. вузов. Матем. 1974. № 1. С. 15–20.
- [119] Ю. М. Важенин. Об элементарных теориях структур подполугрупп // Тезисы III Всесоюзной конференции по математической логике. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1974. С. 24–25.
- [120] Ю. М. Важенин. Элементарные свойства полугрупп частичных преобразований рефлексивных графов // Матем. записки УрГУ. 1977. Т. 10. № 3. С. 3–19.
- [121] Ю. М. Важенин. Алгоритмические проблемы и иерархии языков первого порядка // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. № 4. С. 419–434.
- [122] Ю. М. Важенин. Алгоритмические проблемы и критические теории // УМН. 1987. Т. 42. № 3. С. 235–236.
- [123] Ю. М. Важенин. Критические теории // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 29. № 1. С. 23–31.
- [124] Ю. М. Важенин. Разрешимость теорий первого порядка классов полугрупп // Алгебраические системы и их многообразия. Свердловск: Урал. гос. ун-т им. А. М. Горького, 1988. С. 23–40.
- [125] Ю. М. Важенин, Е. В. Линецкий. Об элементарной теории решеток подполугрупп конечных полурешеток // Тезисы VII Всесоюзной конференции по математической логике. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984. С. 28.
- [126] Ю. М. Важенин, Ю. В. Нагребцкая. Критические теории групп и моноидов целочисленных матриц // Изв. вузов. Матем. 1998. № 7. С. 77–79.
- [127] Ю. М. Важенин, С. В. Сизый. Квазимногообразия эндоморфизмов // Изв. вузов. Матем. 1988. № 2. С. 66–67.
- [128] C. R. Videla. On the model theory of the ring $NT(n, R)$ // J. Pure Appl. Algebra. 1988. V. 55. № 3. P. 289–302.
- [129] W. Wheeler. Model theory of strictly upper triangular matrix rings // J. Symbolic Logic. 1980. V. 45. № 3. P. 455–463.