Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, М. А. Королёв, Аргумент дзета-функции Римана, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 3, 41–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1429>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 10:45:16

УДК 511

АРГУМЕНТ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

А. А. КАРАЦУБА, М. А. КОРОЛЁВ

В статье дается обзор основных результатов, касающихся поведения аргумента дзета-функции Римана на критической прямой.

Библиография: 43 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	41
Глава I. Функция $S(t)$ и формула Римана–Мангольдта	43
§ 1. Определение функций $S(t)$, $S_1(t)$, $N(T)$ и $N(\sigma, T)$	43
§ 2. Формула Римана–Мангольдта	44
§ 3. Простейшие свойства $S(t)$	45
Замечания	48
Глава II. Формулы А. Сельберга	48
§ 1. Приближение функций $S(t)$ и $S_1(t)$ отрезками рядов Дирихле	49
§ 2. Несобственный интеграл, содержащий функцию $S(t)$	68
Замечания	72
Глава III. Рост функций $ S(t) $ и $ S_1(t) $	73
§ 1. Верхние оценки $ S(t) $ и $ S_1(t) $. Следствия гипотез Римана и Линделёфа	73
§ 2. Омега-теоремы	78
Замечания	91
Приложение	92
Список литературы	94

Введение

В теории дзета-функции Римана $\zeta(s)$ существует три больших направления исследований, в числе которых: 1) нули $\zeta(s)$ в критической полосе ($0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$) и на критической прямой ($\operatorname{Re} s = 1/2$), 2) порядок роста $|\zeta(s)|$ в критической полосе и на критической прямой и 3) поведение аргумента $\zeta(s)$ на критической прямой.

Первые два направления тесно связаны с рядом центральных проблем теории простых чисел и достаточно хорошо изучены (см. обзоры [1], [2] и библиографии в конце

каждого из них). Третье направление изучено меньше, хотя и представляет большой интерес как чисто теоретико-функциональное свойство $\zeta(s)$, а также в силу формулы Римана–Мангольда, служащей полезным инструментом для приближенного вычисления комплексных нулей дзета-функции.

В предлагаемой работе авторы предпринимают попытку восполнить этот пробел и дать систематическое изложение теории функции

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right).$$

Обзор состоит из трех глав. В первой главе дается определение функции $S(t)$ и приводится доказательство формулы Римана–Мангольда, которая позволяет исследовать простейшие свойства $S(t)$. Во второй главе излагаются классические формулы А. Сельберга, дающие точные и приближенные выражения для $S(t)$ и связанных с ней функций. Третья глава посвящена изучению порядка роста $S(t)$ и ее первообразной $S_1(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. В ней наряду с безусловными результатами помещены утверждения, доказательства которых используют недоказанные в настоящее время гипотезы Линделёфа и Римана.

Каждая глава обзора имеет свою нумерацию определений, лемм и теорем, а также снабжена небольшим комментарием, содержащим ссылки на оригинальные работы. В приведенном списке литературы можно найти дополнительные сведения, касающиеся рассматриваемых в статье вопросов (см. [3]–[15]).

В работе используются следующие обозначения.

$C, c, c_1, c_2, \dots$ – абсолютные положительные постоянные, в разных соотношениях, вообще говоря, разные;

$\theta, \theta_1, \theta_2, \dots$ – комплексные числа, по модулю не превосходящие единицы и в разных соотношениях разные;

символами $p, p_1, p_2, \dots, q, q_1, q_2, \dots$ обозначаются простые числа;

постоянные в знаках O и $\ll$ – абсолютные, если не оговорено противное;

моментом степени α , $\alpha \geq 0$, функции $f(u)$, определенной на промежутке $a \leq u \leq b$, будем называть интеграл

$$\int_a^b |f(u)|^\alpha d\alpha;$$

если $\alpha = 2k$, где $k = 1, 2, \dots$, то соответствующие интегралы будем называть четными моментами f , а если α не является целым числом – дробными моментами f ;

интегралом в смысле главного значения от функции $g(u)$, имеющей особенности в точках $a_1, a_2, \dots, a_n$ промежутка $a < u < b$, конечного или бесконечного, будем называть предел при $\varepsilon \rightarrow +0$ величины

$$\left(\int_a^{a_1-\varepsilon} + \int_{a_1+\varepsilon}^{a_2-\varepsilon} + \dots + \int_{a_{n-1}+\varepsilon}^{a_n-\varepsilon} + \int_{a_n+\varepsilon}^b \right) g(u) du$$

и обозначать его

$$\text{v.p.} \int_a^b g(u) du;$$

(a, b) – наибольший общий делитель натуральных чисел a и b ;

$\mu(n)$ – функция Мёбиуса,

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ 0, & \text{если } n \text{ делится на квадрат простого числа;} \\ (-1)^r, & \text{если } n = p_1 \cdots p_r, \text{ где } p_1, \dots, p_r - \text{различные простые числа;} \end{cases}$$

$\Lambda(n)$ – функция Мангольда, равная $\ln p$, если $n = p^r$, p – простое, $r \geq 1$ – целое, и равная нулю в остальных случаях;

$[x]$ – целая часть x , т.е. наименьшее целое, не превосходящее x ; $\{x\}$ – дробная часть x , $\{x\} = x - [x]$;

E – постоянная Эйлера,

$$E = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N \right) = 0.5772146 \dots;$$

символами ρ обозначаются комплексные нули дзета-функции Римана, а символами β и γ – их вещественные и мнимые части (если не оговорено противное).

Запись “лемма $\alpha\Pi$ ” означает ссылку на лемму α приложения.

При необходимости в начале глав вводятся дополнительные обозначения.

Глава I.

Функция $S(t)$ и формула Римана–Мангольда

§ 1. Определение функций $S(t)$, $S_1(t)$, $N(T)$ и $N(\sigma, T)$

Дадим определение функции $S(t)$, ее первообразной $S_1(t)$ и классических в рассматриваемых вопросах функций $N(T)$, $N(\sigma, T)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для вещественного t , отличного от ординаты нуля $\zeta(s)$, положим

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right),$$

где $\arg \zeta(1/2 + it)$ получается непрерывным продолжением $\arg \zeta(s)$ вдоль ломаной линии, начинающейся в точке $s = 2$ ($\arg \zeta(2) = 0$), идущей к точке $s = 2 + it$ и затем к точке $s = 1/2 + it$. Если же t – мнимая часть нуля $\zeta(s)$, то

$$S(t) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{2} (S(t + \delta) + S(t - \delta)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. При положительном числе t функция $S_1(t)$ определяется равенством

$$S_1(t) = \int_0^t S(u) du.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для положительного T , отличного от мнимой части нуля $\zeta(s)$, символом $N(T)$ будем обозначать число нулей дзета-функции в прямоугольнике $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$. Если T совпадает с мнимой частью нуля $\zeta(s)$, то положим

$$N(T) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{2} (N(T + \delta) + N(T - \delta)) = \frac{1}{2} (N(T + 0) + N(T - 0)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. При положительном числе T и $\sigma > 0$ символом $N(\sigma, T)$ будем обозначать количество нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma < \operatorname{Re} s \leq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$.

В следующем параграфе устанавливается связь между функциями $S(T)$ и $N(T)$.

§2. Формула Римана–Мангольда

Утверждение теоремы этого параграфа носит название формулы Римана–Мангольда.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $T \geq 1$ справедливо равенство

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T) + \frac{1}{\pi} \delta(T),$$

где

$$\delta(T) = \frac{T}{4} \ln \left(1 + \frac{1}{4T^2} \right) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{2T} - \frac{T}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\varrho(u) du}{(u + 1/4)^2 + (T/2)^2},$$

а $\varrho(u) = 1/2 - \{u\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T не равно мнимой части нуля $\zeta(s)$. Поскольку комплексные нули дзета-функции совпадают с нулями целой функции

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

(см. леммы 1П и 2П), то в силу принципа аргумента (лемма 3П) величина $2\pi N(T)$ равна приращению аргумента $\xi(s)$ вдоль границы прямоугольника с вершинами в точках $2, 2 + iT, -1 + iT, -1$.

Так как $\xi(s)$ вещественна при вещественных s , то приращение аргумента $\xi(s)$ вдоль нижней стороны прямоугольника равно нулю.

Кроме того, из равенства $\xi(s) = \bar{\xi}(1 - \bar{s})$ (см. лемму 1П) следует, что приращение $\arg \xi(s)$ при изменении s от $s = 2$ к $s = 2 + iT$ и далее к $s = 1/2 + iT$ равно приращению, которое получает $\arg \xi(s)$ при движении s по симметричному контуру от $s = 1/2 + iT$ к $s = -1$ через точку $s = -1 + iT$. Следовательно,

$$N(T) = \frac{1}{\pi} \Delta_L \arg \xi(s),$$

где $\Delta_L \arg \xi(s)$ означает приращение $\arg \xi(s)$ вдоль ломаной L с концами в точках $s = 2$, $s = 2 + iT$ и $s = 1/2 + iT$. Пользуясь формулой Стирлинга для логарифма гамма-функции (лемма 4П) наряду с определением $S(T)$, находим:

$$\begin{aligned} N(T) &= \frac{1}{\pi} (\Delta_L \arg s(s-1) + \Delta_L \arg \pi^{-s/2} + \Delta_L \arg \Gamma(s/2) + \pi S(T)) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\pi - \frac{T}{2} \ln \pi + \operatorname{Im} \ln \Gamma \left(\frac{1}{4} + \frac{iT}{2} \right) + \pi S(T) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\pi - \frac{T}{2} \ln \pi + \frac{T}{4} \ln \left(\frac{T^2}{4} + \frac{1}{16} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2T} \right) - \frac{T}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{T}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\varrho(u) du}{(u + 1/4)^2 + (T/2)^2} + \pi S(T) \right) = L(T) + S(T) + \frac{1}{\pi} \delta(T), \end{aligned}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} L(T) &= \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8}, \\ \delta(T) &= \frac{T}{4} \ln \left(1 + \frac{1}{4T^2} \right) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{2T} - \frac{T}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\varrho(u) du}{(u + 1/4)^2 + (T/2)^2}, \end{aligned}$$

$$\varrho(u) = 1/2 - \{u\}.$$

Пусть теперь T совпадает с ординатой одного из нулей $\zeta(s)$. По доказанному выше, для достаточно малых h , $h > 0$,

$$N(T \pm h) = L(T \pm h) + S(T \pm h) + \pi^{-1} \delta(T \pm h).$$

Сложим эти равенства. Устремляя h к нулю и пользуясь непрерывностью функций $L(T)$ и $\delta(T)$, будем иметь:

$$\begin{aligned} N(T) &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{2} (N(T+h) + N(T-h)) \\ &= L(T) + \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{2} (S(T+h) + S(T-h)) + \pi^{-1} \delta(T) = L(T) + S(T) + \pi^{-1} \delta(T). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 3. Простейшие свойства $S(t)$

Следствием формулы Римана–Мангольда является приводимая ниже теорема 2.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. $S(t)$ – кусочно-гладкая функция с разрывами в точках, совпадающих с ординатами комплексных нулей $\zeta(s)$.
2. При переходе через точку разрыва $S(t)$ совершает скачок, равный сумме кратностей нулей $\zeta(s)$, имеющих эту точку своей ординатой.
3. На всяком промежутке непрерывности (γ, γ') , где γ, γ' – соседние ординаты нулей $\zeta(s)$, функция $S(t)$ является монотонно убывающей с производными

$$S'(t) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} + O(t^{-2}) \quad \text{и} \quad S''(t) = -\frac{1}{2\pi t} + O(t^{-3}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лишь последнее утверждение. Пусть $\gamma < t < \gamma'$. Тогда на всем интервале $N(t) \equiv N(\gamma + 0)$ – постоянная величина. Дифференцируя обе части формулы

$$S(t) = -\frac{t}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} + \frac{t}{2\pi} - \frac{7}{8} - \delta(t) + N(\gamma + 0),$$

находим:

$$S'(t) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} - \delta'(t), \quad S''(t) = -\frac{1}{2\pi t} - \delta''(t).$$

Перепишем $\delta(t)$ в виде суммы

$$\frac{t}{4} \ln \left(1 + \frac{1}{4t^2} \right) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{2t} - \frac{t}{2} j,$$

где

$$j = j(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\varrho(u) du}{(u + 1/4)^2 + (t/2)^2}.$$

Два первых слагаемых в формуле для $\delta(t)$ разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды по нечетным степеням t^{-1} , так что их вклад в $\delta^{(k)}(t)$ равен $O(t^{-k-2})$, $k = 0, 1, 2$. Осталось показать, что для тех же k $j^{(k)}(t) = O(t^{-k-2})$. Интегрируя по частям, представим j в виде

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\sigma(u)}{(u + 1/4)^2 + (t/2)^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(u)(u + 1/4) du}{((u + 1/4)^2 + (t/2)^2)^2}, \quad \sigma(u) = \int_0^u \varrho(z) dz.$$

Пользуясь неравенством $0 \leq \sigma(u) \leq 1/8$, приходим к оценкам:

$$\begin{aligned} |j(t)| &\leq \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{(u + 1/4) du}{((u + 1/4)^2 + (t/2)^2)^2} \ll \int_0^t u t^{-4} du + \int_t^{+\infty} u^{-3} du \ll t^{-2}, \\ |j'(t)| &= 8 \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(u)(u + 1/4)^2 du}{((u + 1/4)^2 + (t/2)^2)^3} \ll \int_0^t u^2 t^{-6} du + \int_t^{+\infty} u^{-4} du \ll t^{-3}, \\ |j''(t)| &= 64 \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(u)(u + 1/4)^3 du}{((u + 1/4)^2 + (t/2)^2)^4} \ll \int_0^t u^3 t^{-8} du + \int_t^{+\infty} u^{-5} du \ll t^{-4}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \delta'(t) &= -\frac{1}{2} (j(t) + t j'(t)) + O(t^{-2}) = O(t^{-2}), \\ \delta''(t) &= -\frac{1}{2} (2j'(t) + t j''(t)) + O(t^{-3}) = O(t^{-3}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Соотношения

$$S(t) = O(\ln t), \quad S_1(t) = O(\ln t), \quad S(t) = \Omega_{\pm} \left(\left(\frac{\ln t}{\ln \ln t} \right)^{1/3} \right), \quad t \rightarrow +\infty,$$

доказательства которых будут даны в следующих главах, указывают на то, что $S(t)$ является сильно осциллирующей функцией. Естественно возник вопрос об изучении количества точек, в которых $S(t)$ меняет знак и которые попадают в заданный промежуток вещественной оси.

Пусть $M(T)$ – число таких точек t с условием $0 < t \leq T$. Вычисления значений $M(T)$ при малых T дают:

$$\begin{aligned} M(50) &= 21, & M(100) &= 60, & M(150) &= 106, \\ M(200) &= 160, & M(250) &= 217, & M(295) &= 270. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. $M(T) \rightarrow +\infty$ при $T \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma_n, n = 1, 2, \dots$, – положительные ординаты нулей $\zeta(s)$, занумерованные в порядке возрастания, и пусть $\gamma_n < t < \gamma_{n+1}$. Приближим $S(t)$ линейной функцией

$$l(t) = \frac{S(\gamma_{n+1} - 0) - S(\gamma_n + 0)}{\gamma_{n+1} - \gamma_n}(t - \gamma_n) + S(\gamma_n + 0),$$

принимавшей на концах интервала значения $S(\gamma_n + 0)$ и $S(\gamma_{n+1} - 0)$. Точность такого приближения оценивается с помощью формулы Тейлора и утверждения п. 3 предыдущей теоремы:

$$|S(t) - l(t)| \leq (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^2 \sup_{\gamma_n < t < \gamma_{n+1}} |S''(t)| = O\left(\frac{(\gamma_{n+1} - \gamma_n)^2}{\gamma_n}\right).$$

Из приведенных соотношений следует равенство

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_n}^{\gamma_{n+1}} S(t) dt &= \int_{\gamma_n}^{\gamma_{n+1}} l(t) dt + O\left(\frac{(\gamma_{n+1} - \gamma_n)^3}{\gamma_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\gamma_{n+1} - \gamma_n)(S(\gamma_{n+1} - 0) + S(\gamma_n + 0)) + O\left(\frac{(\gamma_{n+1} - \gamma_n)^3}{\gamma_n}\right). \end{aligned}$$

Если теперь предположить, что при $t \geq \gamma_{n_0-1}$ функция $S(t)$ принимает только положительные значения, то мы придем к неравенствам $S(\gamma_n - 0) > 0, S(\gamma_{n+1} - 0) > 0$, которые справедливы при всех $n \geq n_0$. Так как в точке разрыва γ_n функция $S(t)$ совершает скачок на величину, не меньшую 1, то

$$S(\gamma_n + 0) \geq S(\gamma_n - 0) + 1 > 1.$$

Поэтому при всех $n \geq n_0$

$$\int_{\gamma_n}^{\gamma_{n+1}} S(t) dt \geq \frac{1}{2}(\gamma_{n+1} - \gamma_n)(1 + o(1)) + O\left(\frac{(\gamma_{n+1} - \gamma_n)^3}{\gamma_n}\right) > \frac{1}{3}(\gamma_{n+1} - \gamma_n).$$

Беря $N > n_0$ и складывая полученные неравенства с $n = n_0, n_0 + 1, \dots, N - 1$, мы придем к соотношению

$$\int_{\gamma_{n_0}}^{\gamma_N} S(t) dt \geq \frac{1}{3}(\gamma_N - \gamma_{n_0}).$$

Предположение об отрицательности $S(t)$ при больших t приводит к неравенству

$$\int_{\gamma_{n_0}}^{\gamma_N} S(t) dt \leq -\frac{1}{3}(\gamma_N - \gamma_{n_0}).$$

При больших N это и предыдущее неравенства противоречат оценке

$$\int_0^t S(u) du = O(\ln t)$$

(см. теорему 2 гл. III). Следовательно, $S(t)$ меняет знак бесконечно много раз. Теорема доказана.

Замечания

В некоторых работах функции $S(T)$ и $N(T)$ определяют в точках разрыва как пределы величин $S(T + \delta)$ и $N(T + \delta)$ при $\delta \rightarrow +0$.

Асимптотическая формула для $N(T)$ была впервые доказана Б. Риманом [16]. Различные способы оценки остаточного члена в этой формуле (т.е. фактически оценка $|S(T)|$) были предложены фон Мангольдтом в 1905 г. (см. [17]) и Р. Бэклундом [18] в 1914 г. (см. также [2; с. 89–90]).

Теорема 3 доказана в 1913 г. Г. Бором и Э. Ландау [17] (см. также [19], [20; с. 222]).

Задача определения правильного порядка роста $M(T)$ при растущем T до конца не решена. Современное состояние этого вопроса будет изложено в следующей статье авторов (см. также [21]–[26]).

Глава II. Формулы А. Сельберга

Одним из основных инструментов при исследовании аргумента дзета-функции Римана на критической прямой являются “явные” формулы Сельберга, которые приближают $S(t)$ и $S_1(t)$ отрезками рядов Дирихле специального вида.

Эти явные формулы позволяют находить асимптотики моментов $S(t)$, т.е. асимптотики интегралов

$$\int_T^{T+H} |S(t)|^a dt, \quad a > 0,$$

которые возникают в задачах о числе перемен знака $S(t)$ и о распределении значений величины $|S(t)|$ на отрезках вещественной прямой. Выводу формул Сельберга посвящен первый параграф главы.

Во втором параграфе изучаются несобственные интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) S(t+u) du.$$

Точные выражения для них лежат в основе доказательств омега-теорем для функции $S(t)$.

§ 1. Приближение функций $S(t)$ и $S_1(t)$ отрезками рядов Дирихле

ЛЕММА 1. Пусть m – целое, $m \geq 3$, t – вещественное число, $s = -(m+1/2)+it$. Тогда

$$\left| \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \right| < 3(\ln |s| + 3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любого натурального числа n выполняются неравенства

$$|n + s| \geq 1/2, \quad |n + s| \geq \max(n - |s|, |s| - n),$$

то, пользуясь формулой для логарифмической производной гамма-функции, будем иметь:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{s+n} \right) - \mathbf{E} - \frac{1}{s} \right| \\ &\leq \sum_{n \leq |s|-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{|s|-n} \right) + \left(\frac{2}{|s|-1} + \frac{2}{1/2} \right) + \sum_{n > |s|+1} \frac{|s|}{n(n-|s|)} + \mathbf{E} + \frac{1}{3} \\ &< 2(\ln |s| + 1) + 5 + \int_{|s|+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{u-|s|} - \frac{1}{u} \right) du + \mathbf{E} + \frac{1}{2} < 3(\ln |s| + 3). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Для вещественных σ и t , $|\sigma| \leq 2$, $|t| \geq 10$, $s = \sigma + it$, справедливо следующее равенство:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\varrho} \frac{1}{s - \varrho} + \theta \left(\frac{1}{2} \ln |t| + 3 \right),$$

где

$$\sum_{\varrho} (s - \varrho)^{-1} = \sum_{\operatorname{Im} \varrho > 0} ((s - \varrho)^{-1} + (s - \bar{\varrho})^{-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функцию Римана $\xi(s)$ в виде произведения Вейерштрасса по нулям дзета-функции (лемма 2П):

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = e^{Bs} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{s/\varrho}.$$

Логарифмируя, а затем дифференцируя это равенство, будем иметь:

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} + \frac{1}{s} \right) - \frac{1}{2} \ln \pi = B + \sum_{\varrho} \frac{1}{\varrho} + \sum_{\varrho} \frac{1}{s - \varrho},$$

где

$$\sum_{\varrho} \varrho^{-1} = \sum_{\operatorname{Im} \varrho > 0} (\varrho^{-1} + \bar{\varrho}^{-1}), \quad \sum_{\varrho} (s - \varrho)^{-1} = \sum_{\operatorname{Im} \varrho > 0} ((s - \varrho)^{-1} + (s - \bar{\varrho})^{-1}).$$

Возьмем в полученном соотношении последовательно $s = 0, s = 1$:

$$\frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = B, \quad \frac{\xi'(1)}{\xi(1)} = B + \sum_{\varrho} \frac{1}{\varrho} + \sum_{\varrho} \frac{1}{1-\varrho} = B + 2 \sum_{\varrho} \frac{1}{\varrho}.$$

Из функционального уравнения $\xi(s) = \xi(1-s)$ (лемма 1П) следует, что

$$\frac{\xi'(0)}{\xi(0)} + \frac{\xi'(1)}{\xi(1)} = 0, \quad \text{т.е.} \quad 2B + 2 \sum_{\varrho} \frac{1}{\varrho} = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_{\varrho} \frac{1}{s-\varrho} &= -\left(\frac{1}{2} \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} + \frac{1}{s}\right) + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \ln \pi \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}(\mathbf{E} + \ln \pi) + \frac{1}{1-s}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось оценить правую часть последнего равенства. По абсолютной величине она не превосходит

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq |t|} \left(\frac{1}{|t|} + \frac{1}{2n}\right) + \sum_{n > |t|} \frac{|s|}{(2n)^2} + \frac{1}{2}(\mathbf{E} + \ln \pi) + \frac{1}{|t|} \\ \leq 1 + \frac{1}{2}(\ln |t| + 1) + \frac{1}{4} \frac{|t| + 2}{|t| - 1} + \frac{1}{2}(\mathbf{E} + \ln \pi) + \frac{1}{|t|} < \frac{1}{2} \ln |t| + 3. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. При $|t| \rightarrow +\infty$ справедливо следующее соотношение: $S(t) = O(\ln |t|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $S(-t) = -S(t)$, то достаточно рассмотреть случай $t \geq t_0 > 20$. Пусть сначала t отлично от мнимой части нуля дзета-функции, $s = \sigma + it$, $1/2 \leq \sigma \leq 2$. Согласно предыдущей лемме,

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} &= \sum_{\varrho} \frac{1}{s-\varrho} - \sum_{\varrho} \frac{1}{2+it-\varrho} + \theta(\ln t + 6) \\ &= \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{s-\varrho} - \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{2+it-\varrho} \\ &\quad + \sum_{|t-\gamma| > 1} \frac{2-\sigma}{(\sigma-\beta+i(t-\gamma))(2-\beta+i(t-\gamma))} + O(\ln t). \end{aligned}$$

Из простейших теорем о нулях $\zeta(s)$ (см. [2; с. 88]) следует, что число слагаемых в первых двух суммах есть $O(\ln t)$. Так как $|2+it-\varrho| \geq 2-\beta \geq 1$, то вторая сумма равна $O(\ln t)$. Последняя, третья сумма по модулю не превосходит величины

$$\sum_{|t-\gamma| > 1} \frac{1}{(t-\gamma)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{n < |t-\gamma| \leq n+1} \frac{1}{(t-\gamma)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} O\left(\frac{\ln(t+n)}{n^2}\right) = O(\ln t).$$

Таким образом,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{s-\varrho} + \frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} + O(\ln t) = \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{s-\varrho} + O(\ln t).$$

Интегрируя это равенство по отрезку, соединяющему точки $2+it$ и $1/2+it$, будем иметь:

$$\ln \zeta(1/2+it) - \ln \zeta(2+it) = \sum_{|t-\gamma| \leq 1} (\ln(1/2+it-\varrho) - \ln(2+it-\varrho)) + O(\ln t).$$

Отделив в получившемся соотношении мнимую часть, мы заключаем, что приращение аргумента $\zeta(s)$ вдоль отрезка интегрирования равно $O(\ln t)$. Поскольку при перемещении s по прямой от точки $s=2$ к точке $s=2+it$ $\arg \zeta(s)$ получает приращение, равное

$$\operatorname{Im}(\ln \zeta(2+it) - \ln \zeta(2)) = - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{\sin(t \ln n)}{n^2} = O(1),$$

а величина $\pi S(t)$ есть сумма этих двух приращений, то $S(t) = O(\ln t)$.

Если t равно мнимой части нуля $\zeta(s)$, то, по доказанному выше, при достаточно малых положительных h справедливы неравенства:

$$|S(t+h)| \leq C \ln(t+h), \quad |S(t-h)| \leq C \ln(t-h),$$

где C – абсолютная постоянная, $C > 0$. Устремляя h к нулю, находим:

$$|S(t)| \leq \frac{1}{2}(|S(t+0)| + |S(t-0)|) \leq C \ln t.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Справедливо следующее соотношение:*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Значение постоянной C в неравенстве $|S(t)| \leq C \ln t$ будет уточнено в третьей главе.

ЛЕММА 4. *Для любого вещественного t , $t \neq 0$, справедлива следующая формула:*

$$\pi S(t) = - \int_{1/2}^{+\infty} \operatorname{Im} \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} d\sigma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим несобственный интеграл из условия леммы символом $F(t)$.

Пусть t отлично от ординаты нуля $\zeta(s)$. Тогда величина $\pi S(t)$ равна сумме приращений мнимой части $\ln \zeta(s)$ вдоль отрезков, соединяющих точки $2, 2+it$ и $1/2+it$, т.е. сумме

$$\operatorname{Im}(\ln \zeta(2+it) - \ln \zeta(2)) + \operatorname{Im} \int_{2+it}^{1/2+it} d \ln \zeta(s).$$

Разлагая на прямой $\operatorname{Re} s = 2$ $\ln \zeta(s)$ в ряд Дирихле, получим:

$$\begin{aligned} \pi S(t) &= - \int_{1/2}^2 \operatorname{Im} \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} d\sigma + \operatorname{Im} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{1}{n^{2+it}} \\ &= - \int_{1/2}^2 \operatorname{Im} \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} d\sigma + \operatorname{Im} \sum_{n=2}^{+\infty} \int_2^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}} d\sigma \\ &= - \int_{1/2}^2 \operatorname{Im} \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} d\sigma - \int_2^{+\infty} \operatorname{Im} \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} d\sigma = F(t). \end{aligned}$$

Пусть теперь t совпадает с ординатой одного из нулей $\zeta(s)$. Покажем, что

$$F(t) = \frac{1}{2}(F(t+0) + F(t-0)).$$

Пусть $\varrho_1, \dots, \varrho_k$ — все различные нули $\zeta(s)$ на луче $\operatorname{Im} s = t$, $\operatorname{Re} s \geq 1/2$, и пусть $m_1, \dots, m_k$ — их кратности. Тогда

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\nu=1}^k \frac{m_\nu}{s - \varrho_\nu} + f(s),$$

где функция f аналитична в некоторой окрестности отрезка с концами в точках $1/2+it$ и $2+it$. Рассмотрим разность

$$d(t) = F(t) - \frac{1}{2}(F(t+0) + F(t-0)).$$

Пользуясь определением $F(t)$, будем иметь:

$$\begin{aligned} d(t) &= \lim_{h \rightarrow +0} \left(F(t) - \frac{1}{2}(F(t+h) + F(t-h)) \right) \\ &= - \lim_{h \rightarrow +0} \int_{1/2}^{+\infty} \operatorname{Im} \left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta'(\sigma+i(t+h))}{\zeta(\sigma+i(t+h))} + \frac{\zeta'(\sigma+i(t-h))}{\zeta(\sigma+i(t-h))} \right) \right) \right) d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \lim_{h \rightarrow +0} \int_{1/2}^2 \operatorname{Im} \sum_{\nu=1}^k m_{\nu} \left(\frac{1}{\sigma - \beta_{\nu}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma - \beta_{\nu} + ih} + \frac{1}{\sigma - \beta_{\nu} - ih} \right) \right) d\sigma \\
 &\quad - \lim_{h \rightarrow +0} \int_{1/2}^2 \operatorname{Im} \left(f(\sigma + it) - \frac{1}{2} (f(\sigma + i(t+h)) + f(\sigma + i(t-h))) \right) d\sigma \\
 &\quad - \lim_{h \rightarrow +0} \int_2^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}} \left(\frac{n^{ih} + n^{-ih}}{2} - 1 \right) d\sigma \\
 &= \lim_{h \rightarrow +0} \int_{1/2}^2 \sum_{\nu=1}^k \frac{m_{\nu}}{2} \left(\frac{-h}{(\sigma - \beta_{\nu})^2 + h^2} + \frac{h}{(\sigma - \beta_{\nu})^2 + h^2} \right) d\sigma \\
 &\quad - \lim_{h \rightarrow +0} \int_{1/2}^2 O(h^2) d\sigma + \lim_{h \rightarrow +0} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{2+it}} (1 - \cos(h \ln n)) \\
 &= 2 \lim_{h \rightarrow +0} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n) \sin^2 \left(\frac{h}{2} \ln n \right)}{n^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $x \geq 2$, n – натуральное число. Определим функцию $\Lambda_x(n)$ равенствами:

$$\Lambda_x(n) = \begin{cases} \Lambda(n), & \text{если } 1 \leq n \leq x, \\ \Lambda(n) \frac{\ln^2(x^3/n) - 2 \ln^2(x^2/n)}{2 \ln^2 x}, & \text{если } x < n \leq x^2, \\ \Lambda(n) \frac{\ln^2(x^3/n)}{2 \ln^2 x}, & \text{если } x^2 < n \leq x^3. \end{cases}$$

ЛЕММА 5. Пусть $x \geq 10$, $s = \sigma + it$, $\operatorname{Re} s > 0$, $s \neq 1$, $\zeta(s) \neq 0$. Тогда справедлива формула:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^s} \\
 &+ \frac{1}{\ln^2 x} \left(\frac{x^{1-s}(1 - x^{1-s})^2}{(1-s)^3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{-(2n+s)}(1 - x^{-(2n+s)})^2}{(2n+s)^3} - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho-s}(1 - x^{\varrho-s})^2}{(\varrho-s)^3} \right).
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m – целое, $m \geq 2|t| + 10$, $T_m = 2m + 1$. Пользуясь следствием леммы 3, выберем число T'_m так, чтобы выполнялись неравенства $4m + 2 \leq T'_m < 4m + 3$ и для некоторой постоянной c ордината любого комплексного нуля $\zeta(s)$ отстояла от T'_m не меньше чем на $c(\ln T_m)^{-1}$. Положим $\alpha = \sigma + 2$ и обозначим буквой Γ границу прямоугольника с вершинами в точках $\alpha \pm iT'_m$, $-T_m \pm iT'_m$, обходимую против часовой стрелки. Наконец, обозначим символом I следующий интеграл по контуру Γ :

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{x^{z-s}(1 - x^{z-s})^2}{(z-s)^3} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} dz.$$

Подынтегральная функция не имеет особенностей внутри и на границе рассматриваемого прямоугольника, за исключением полюсов в точках $z = s$ с вычетом $\zeta'(s)(\ln x)^2/\zeta(s)$, $z = 1$ с вычетом $-x^{1-s}(1-x^{1-s})^2/(1-s)^3$, $z = \varrho = \beta + i\gamma$ (комплексные нули $\zeta(z)$ с $|\gamma| < T'_m$) с вычетами $x^{\varrho-s}(1-x^{\varrho-s})^2/(\varrho-s)^3$ и $z = -2n$ (вещественные нули $\zeta(z)$ с $n = 1, 2, \dots, m$) с вычетами $x^{-(2n+s)}(1-x^{-(2n+s)})^2/(2n+s)^3$. По теореме Коши интеграл I равен сумме этих вычетов. С другой стороны, $I = \sum_{k=1}^4 I_k$, где I_k , $k = 1, 2, 3, 4$, — интегралы по сторонам контура Γ .

Интегралы I_2 и I_4 по верхней и нижней сторонам прямоугольника оцениваются одинаково. Опеним, например, I_2 . Для этого представим его суммой

$$I'_2 + I''_2 = - \left(\int_{-T_m + iT'_m}^{1/2 + iT'_m} + \int_{1/2 + iT'_m}^{\alpha + iT'_m} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} |I'_2| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-T_m}^{1/2} \frac{x^{u-\sigma+i(T'_m-t)}(1-x^{u-\sigma+i(T'_m-t)})^2}{(u-\sigma+i(T'_m-t))^3} \frac{\zeta'(u+iT'_m)}{\zeta(u+iT'_m)} du \right| \\ &\leq \frac{x^{1/2-\sigma}(1+x^{1/2-\sigma})^2}{T_m^3} \int_{-T_m}^{1/2} \left| \frac{\zeta'(u+iT'_m)}{\zeta(u+iT'_m)} \right| du \leq \frac{4x^{3/2}}{T_m^3} \int_{-T_m}^{1/2} \left| \frac{\zeta'(u+iT'_m)}{\zeta(u+iT'_m)} \right| du. \end{aligned}$$

Чтобы оценить подынтегральное выражение, воспользуемся равенством

$$\frac{\zeta'(u+iT'_m)}{\zeta(u+iT'_m)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{u+iT'_m}{2} \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1-u-iT'_m}{2} \right) \right) - \frac{\zeta'(1-u-iT'_m)}{\zeta(1-u-iT'_m)} + \ln \pi,$$

которое следует из функционального уравнения для ξ -функции. Заметим, что для рассматриваемых значений u

$$\begin{aligned} \left| \arg \left(\frac{u+iT'_m}{2} \right) \right| &\leq \pi - \arctg \frac{T'_m}{T_m} \leq \pi - \arctg 2 \leq \frac{3}{4}\pi, \\ \left| \arg \left(\frac{1-u-iT'_m}{2} \right) \right| &\leq \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{2T'_m} \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Так как для комплексных z с условием $|\arg z| \leq 3\pi/4$ справедлива асимптотика

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \ln z + O(|z|^{-1}),$$

то первые два слагаемых в выражении для $(\zeta'/\zeta)(u+iT'_m)$ являются величинами порядка $\ln T_m$. Полагая для краткости $w = 1-u-iT'_m$ (так что $\operatorname{Re} w \geq 1/2$) и замечая, что при $1/2 \leq \operatorname{Re} w \leq 2$

$$\frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)} = \sum_{|\gamma+T'_m| \leq 1} (w-\varrho)^{-1} + O(\ln T_m) = \sum_{|\gamma+T'_m| \leq 1} O(\ln T_m) + O(\ln T_m) = O(\ln^2 T_m),$$

а при $\operatorname{Re} w \geq 2$ ($\zeta'/\zeta(w) = O(1)$), убеждаемся, что вклад от двух последних слагаемых в равенстве для логарифмической производной дзеты есть $O(\ln^2 T_m)$. Таким образом,

$$I_2' = O\left(\frac{x^{3/2}}{T_m^3} T_m \ln^2 T_m\right) = O\left(\frac{x^{3/2}}{T_m}\right).$$

Для оценки I_2'' достаточно воспользоваться равенством

$$\frac{\zeta'(u + iT_m')}{\zeta(u + iT_m')} = \sum_{|\gamma - T_m'| \leq 1} (u + iT_m' - \varrho)^{-1} + O(\ln T_m) = O(\ln^2 T_m).$$

Таким образом находим:

$$I_2'' = O\left(\frac{x^{3/2}}{T_m^3} \ln^2 T_m\right) = O\left(\frac{x^{3/2}}{T_m}\right), \quad I_2, I_4 = O\left(\frac{x^{3/2}}{T_m}\right).$$

Для того чтобы оценить интеграл I_3 по левой стороне контура, положим $z = -T_m + iu$ и снова воспользуемся функциональным уравнением для $\xi(s)$:

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \frac{4x^{-(2m+1+\sigma)}}{T_m^3} \int_{-T_m'}^{T_m'} \left| \frac{\zeta'(-T_m + iu)}{\zeta(-T_m + iu)} \right| du \\ &\leq \frac{x^{-2m}}{T_m^3} \int_{-T_m'}^{T_m'} \left(\left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{-T_m' + iu}{2} \right) \right| + \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1 + T_m' - iu}{2} \right) \right| \right) du \\ &\quad + \frac{x^{-2m}}{T_m^3} \int_{-T_m'}^{T_m'} \left(\left| \frac{\zeta'(1 + T_m - iu)}{\zeta(1 + T_m - iu)} \right| + \ln \pi \right) du. \end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{Re} \left(-\frac{T_m + iu}{2} \right) = -(m + 1/2)$, то по лемме 1 на отрезке $[-T_m', T_m']$ первое слагаемое есть $O(\ln T_m)$. Так как

$$\left| \arg \left(\frac{1 + T_m - iu}{2} \right) \right| \leq \frac{\pi}{2},$$

то второе слагаемое по порядку величины также не превосходит $\ln T_m$. Наконец, два последних слагаемых не превосходят абсолютной постоянной. Следовательно,

$$I_3 = O\left(\frac{x^{-2m}}{T_m^2} \ln T_m\right) = O\left(\frac{x^{-2m}}{T_m}\right).$$

Устремим теперь m к бесконечности. Тогда $I_2, I_3, I_4 \rightarrow 0$ и мы приходим к равенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+\infty} \frac{x^{z-s}(1-x^{z-s})^2}{(z-s)^3} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} dz &= \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ln^2 x - \frac{x^{1-s}(1-x^{1-s})^2}{(1-s)^3} \\ &\quad + \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho-s}(1-x^{\varrho-s})^2}{(\varrho-s)^3} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{-(2n+s)}(1-x^{-(2n+s)})^2}{(2n+s)^3}. \end{aligned}$$

На прямой интегрирования $\operatorname{Re} z = \alpha$ разложим $(\zeta'/\zeta)(z)$ в абсолютно сходящийся ряд Дирихле и поменяем местами порядки суммирования и интегрирования. Тогда левая часть последнего равенства примет вид

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+\infty} \frac{x^{z-s}(1-x^{z-s})^2}{(z-s)^3} \frac{dz}{n^{z-s}} \\
& = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+\infty} \left(\left(\frac{x}{n} \right)^w - 2 \left(\frac{x^2}{n} \right)^w + \left(\frac{x^3}{n} \right)^w \right) \frac{dw}{w^3} \\
& = - \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{x}{n} - \ln^2 \frac{x^2}{n} + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{x^3}{n} \right) \\
& \quad - \sum_{x < n \leq x^2} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{x^3}{n} - \ln^2 \frac{x^2}{n} \right) - \sum_{x^2 < n \leq x^3} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \frac{1}{2} \ln^2 \frac{x^3}{n} \\
& = - \ln^2 x \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^s}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $2 \leq x \leq t^2$. Положим

$$\sigma_{x,t} = \frac{1}{2} + 2 \max \left(\left| \beta - \frac{1}{2} \right|, \frac{1}{\ln x} \right),$$

где β пробегает вещественные части нулей $\varrho = \beta + i\gamma$ дзета-функции Римана, удовлетворяющие условию

$$|t - \gamma| \leq \frac{x^{3|\beta-1/2|}}{\ln x}.$$

Символом $r(x, t)$ будем обозначать сумму

$$\sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma_{x,t} + it}}.$$

ЛЕММА 6. При $2 \leq x \leq t^2$ справедливо неравенство:

$$\sum_{\varrho} \frac{1}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \leq \frac{5}{3} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \left(\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} + \frac{1}{2} \ln t + 3 \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в лемме 2 $s = \sigma_{x,t} + it$ и отделяя в получившемся равенстве вещественную часть, получим:

$$\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} = \sum_{\varrho} \frac{\sigma_{x,t} - \beta}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} + \theta \left(\frac{1}{2} \ln t + 3 \right).$$

Воспользовавшись симметрией комплексных нулей дзета-функции, преобразуем это соотношение к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} &= \frac{1}{2} \sum_{\varrho} \left(\frac{\sigma_{x,t} - \beta}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} + \frac{\sigma_{x,t} - 1 + \beta}{(\sigma_{x,t} - 1 + \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \right) \\ &\quad + \theta \left(\frac{1}{2} \ln t + 3 \right) \\ &= \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \sum_{\varrho} \frac{(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2})^2 - (\beta - \frac{1}{2})^2 + (t - \gamma)^2}{((\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2)((\sigma_{x,t} - 1 + \beta)^2 + (t - \gamma)^2)} \\ &\quad + \theta \left(\frac{1}{2} \ln t + 3 \right). \end{aligned}$$

Обозначим числитель дроби, стоящей под знаком суммы, символом $\varkappa(\varrho)$ и покажем, что

$$\varkappa(\varrho) \geq 0.3((\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (\sigma_{x,t} - 1 + \beta)^2 + 2(t - \gamma)^2).$$

Для этого рассмотрим два случая. Пусть сначала $|\beta - 1/2| \leq \frac{1}{2}(\sigma_{x,t} - 1/2)$. Тогда

$$\begin{aligned} \varkappa(\varrho) &\geq \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 + (t - \gamma)^2 \\ &= \frac{3}{5} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{20} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 + (t - \gamma)^2 \\ &\geq \frac{3}{5} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{5} \left(\beta - \frac{1}{2} \right)^2 + (t - \gamma)^2 \\ &= \frac{3}{10} (2\sigma_{x,t}^2 - 2\sigma_{x,t} + 2\beta^2 - 2\beta + 1) + (t - \gamma)^2 \\ &= \frac{3}{10} \left((\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (\sigma_{x,t} - 1 + \beta)^2 + \frac{10}{3}(t - \gamma)^2 \right) \\ &\geq 0.3((\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (\sigma_{x,t} - 1 + \beta)^2 + 2(t - \gamma)^2). \end{aligned}$$

Пусть теперь $|\beta - 1/2| > \frac{1}{2}(\sigma_{x,t} - 1/2)$, т.е. $\sigma_{x,t} < 1/2 + 2|\beta - 1/2|$. Из последнего неравенства и определения $\sigma_{x,t}$ следует, что

$$|t - \gamma| > \frac{x^{3|\beta - 1/2|}}{\ln x} > 3 \left| \beta - \frac{1}{2} \right|$$

и

$$(t - \gamma)^2 = \frac{2}{3}(t - \gamma)^2 + \frac{1}{3}(t - \gamma)^2 > \frac{2}{3}(t - \gamma)^2 + 3 \left(\beta - \frac{1}{2} \right)^2.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \varkappa(\varrho) &> \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \left(\beta - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2}{3}(t - \gamma)^2 \\ &\geq \frac{2}{3} \left(\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\beta - \frac{1}{2} \right)^2 + (t - \gamma)^2 \right) \\ &\geq 0.3 \left(2 \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \left(\beta - \frac{1}{2} \right)^2 + 2(t - \gamma)^2 \right) \\ &= 0.3((\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (\sigma_{x,t} - 1 + \beta)^2 + 2(t - \gamma)^2). \end{aligned}$$

Возвращаясь к равенству для $(\zeta'/\zeta)(\sigma_{x,t} + it)$, находим:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} \\
&= 0.3 \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \sum_{\varrho} \frac{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (\sigma_{x,t} - 1 + \beta)^2 + 2(t - \gamma)^2}{((\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2)((\sigma_{x,t} - 1 + \beta)^2 + (t - \gamma)^2)} \\
&\quad + \theta \left(\frac{1}{2} \ln t + 3 \right) \\
&= 0.3 \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} + \frac{1}{(\sigma_{x,t} - 1 + \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \right) \\
&\quad + \theta \left(\frac{1}{2} \ln t + 3 \right) \\
&= \frac{3}{5} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \sum_{\varrho} \frac{1}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} + \theta \left(\frac{1}{2} \ln t + 3 \right),
\end{aligned}$$

так что

$$\sum_{\varrho} \frac{1}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \leq \frac{5}{3} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \left(\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} + \frac{1}{2} \ln t + 3 \right).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $s = \sigma + it$, $10 \leq x \leq t^2$, $\sigma \geq \sigma_{x,t}$. Тогда

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^s} = \frac{13\theta}{3} x^{\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2}} \left(|r(x, t)| + \frac{1}{2} \ln t + 4 \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 5, левая часть последнего равенства может быть записана в виде $(R_1 + R_2 - R_3)(\ln x)^{-2}$, где

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{x^{1-s}(1 - x^{1-s})^2}{(1-s)^3}, \\
R_2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{-(2n+s)}(1 - x^{-(2n+s)})^2}{(2n+s)^3}, \\
R_3 &= \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho-s}(1 - x^{\varrho-s})^2}{(\varrho-s)^3}.
\end{aligned}$$

Сумма $R_1 + R_2$ по абсолютной величине не превосходит

$$\begin{aligned}
& t^{-3} \left(x^{1-\sigma}(1 - x^{1-\sigma})^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} x^{-(2n+\sigma)}(1 + x^{-(2n+\sigma)})^2 \right) \\
& < 2x^{-3/2} \left(x^{1-\sigma} + x^{3(1-\sigma)} + x^{-\sigma} \sum_{n=1}^{+\infty} x^{-2n} \right) \\
& = 2x^{\frac{1}{4} - \frac{\sigma}{2}} \left(x^{-\frac{3+\sigma}{2}} + x^{\frac{5}{2}(\frac{1}{2}-\sigma)} + \frac{x^{-\frac{7}{2}-\frac{\sigma}{2}}}{x^2 - 1} \right) \\
& < 2x^{\frac{1}{4} - \frac{\sigma}{2}} (x^{-2} + e^{-5} + x^{-3}) < 0.02x^{\frac{1}{4} - \frac{\sigma}{2}}.
\end{aligned}$$

Оценивая R_3 по модулю, будем иметь:

$$|R_3| \leq \sum_{\varrho} \varkappa_1(\varrho), \quad \text{где} \quad \varkappa_1(\varrho) = \varkappa_1(\beta + i\gamma) = \frac{x^{\beta-\sigma}(1+x^{\beta-\sigma})^2}{((\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2)^{3/2}}.$$

Покажем, что оценка суммы по нулям дзета-функции сводится к оценке суммы из предыдущей леммы. Для этого рассмотрим два случая.

Пусть сначала $\beta \leq \frac{1}{2}(\sigma_{x,t} + 1/2)$. Тогда

$$\beta - \sigma \leq \frac{1}{2}\left(\sigma_{x,t} + \frac{1}{2}\right) - \sigma = \left(\frac{1}{4} - \frac{\sigma}{2}\right) - \frac{1}{2}(\sigma - \sigma_{x,t}) \leq \frac{1}{4} - \frac{\sigma}{2}.$$

Кроме того, из условия $\sigma_{x,t} \geq 1/2 + 2(\ln x)^{-1}$ следует, что

$$\beta - \sigma \leq \frac{\sigma_{x,t}}{2} + \frac{1}{4} - \sigma_{x,t} \leq -\frac{1}{\ln x}.$$

В этом случае

$$\varkappa_1(\varrho) \leq \frac{x^{1/4-\sigma/2}(1+x^{-1/\ln x})^2}{(\sigma-\beta)((\sigma_{x,t}-\beta)^2 + (t-\gamma)^2)} \leq (1+e^{-1})^2 \frac{x^{1/4-\sigma/2} \ln x}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2 + (t-\gamma)^2}.$$

Пусть теперь $\beta > \frac{1}{2}(\sigma_{x,t} + 1/2)$. Тогда $\sigma_{x,t} < 1/2 + 2(\beta - 1/2)$. Из этого равенства и определения $\sigma_{x,t}$ заключаем, что

$$|t - \gamma| > \frac{x^{3|\beta-1/2|}}{\ln x} > 3\left|\beta - \frac{1}{2}\right|.$$

Поскольку $\sigma_{x,t} > 1/2$, то $\beta - 1/2 > \beta - \sigma_{x,t}$. Кроме того,

$$\beta - \frac{1}{2} = (\sigma_{x,t} - \beta) + 2\left(\beta - \frac{1}{2}\left(\sigma_{x,t} + \frac{1}{2}\right)\right) > \sigma_{x,t} - \beta.$$

Следовательно, $\beta - 1/2 > |\beta - \sigma_{x,t}|$ и $|t - \gamma| > 3(\beta - 1/2) > 3|\beta - \sigma_{x,t}|$. Поэтому

$$(t - \gamma)^2 = \frac{8}{9}(t - \gamma)^2 + \frac{1}{9}(t - \gamma)^2 > \frac{8}{9}(t - \gamma)^2 + (\beta - \sigma_{x,t})^2 \geq \frac{8}{9}((t - \gamma)^2 + (\beta - \sigma_{x,t})^2)$$

и

$$\begin{aligned} ((\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2)^{3/2} &\geq |t - \gamma|((\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2) \\ &> \frac{8}{9} \frac{x^{3(\beta-1/2)}}{\ln x} ((t - \gamma)^2 + (\beta - \sigma_{x,t})^2). \end{aligned}$$

Возвращаясь к оценке $\varkappa_1(\varrho)$, получим:

$$\varkappa_1(\varrho) < \frac{x^{\beta-\sigma}(1+x^{\beta-\sigma})^2}{\frac{8}{9}(\ln x)^{-1}((t - \gamma)^2 + (\beta - \sigma_{x,t})^2)} \leq \frac{9}{8} \ln x \frac{x^{-2\beta-\sigma+3/2}(1+x^{\beta-1/2})^2}{(t - \gamma)^2 + (\beta - \sigma_{x,t})^2}.$$

Числитель последней дроби не превосходит

$$x^{\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}} x^{\frac{5}{4}-\frac{\sigma}{2}-2\beta} (1+x^{\beta-\frac{1}{2}})^2 \leq x^{\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}} x^{1-2\beta} (1+x^{\beta-\frac{1}{2}})^2 \leq x^{\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}} (1+x^{\frac{1}{2}-\beta})^2.$$

Так как

$$\frac{1}{2} - \beta \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\sigma_{x,t} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \leq -\frac{1}{\ln x},$$

то

$$\kappa_1(\varrho) \leq \frac{9}{8} (1+e^{-1})^2 \frac{x^{\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}} \ln x}{(t-\gamma)^2 + (\beta - \sigma_{x,t})^2}.$$

Пользуясь оценкой предыдущей леммы, мы приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} + \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma+it}} &= \frac{2\theta}{\ln^2 x} x^{\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}} \left(\sum_{\varrho} \frac{\ln x}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t-\gamma)^2} + 0.01 \right) \\ &= \frac{2\theta x^{\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}}}{\ln^2 x} \left(\frac{5}{3} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^{-1} (\ln x) \left(\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t}+it)}{\zeta(\sigma_{x,t}+it)} + 0.5 \ln |t| + 3 \right) + 0.01 \right) \\ &= \frac{5\theta}{3} x^{\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}} \left(\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t}+it)}{\zeta(\sigma_{x,t}+it)} + 0.5 \ln |t| + 3.01 \right). \end{aligned}$$

Положим в нем $\sigma = \sigma_{x,t}$. После преобразований получим:

$$\frac{\zeta'(\sigma_{x,t}+it)}{\zeta(\sigma_{x,t}+it)} \left(1 - \frac{5\theta_1}{3} x^{\frac{1}{4}-\frac{\sigma_{x,t}}{2}} \right) = - \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma_{x,t}+it}} + \frac{5\theta_2}{3} x^{\frac{1}{4}-\frac{\sigma_{x,t}}{2}} \left(\frac{1}{2} \ln t + 3.01 \right).$$

Так как $1/4 - \sigma_{x,t}/2 \leq -(\ln x)^{-1}$, то

$$\frac{\zeta'(\sigma_{x,t}+it)}{\zeta(\sigma_{x,t}+it)} \left(1 - \frac{5\theta_3}{3e} \right) = -r(x,t) + \frac{5\theta_4}{3e} (0.5 \ln t + 3.01),$$

и

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t}+it)}{\zeta(\sigma_{x,t}+it)} \right| &\leq \left| \frac{\zeta'(\sigma_{x,t}+it)}{\zeta(\sigma_{x,t}+it)} \right| \leq \frac{1}{1-5e^{-1}/3} \left(|r(x,t)| + \frac{5}{3e} (0.5 \ln t + 3.01) \right) \\ &< 2.6|r(x,t)| + 1.6(0.5 \ln t + 3.01). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} + \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma+it}} &= \frac{5\theta_5}{3} x^{\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}} (2.6|r(x,t)| + 2.6(0.5 \ln t + 3.01)) \\ &= \frac{13\theta_6}{3} x^{\frac{1}{4}-\frac{\sigma}{2}} \left(|r(x,t)| + \frac{1}{2} \ln t + 4 \right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. При $10 < x \leq t^2$ справедливы неравенства:

$$\left| \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} \right| < 2.6|r(x, t)| + 1.6(0.5 \ln |t| + 3.01);$$

$$\sum_{\varrho} \frac{1}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} < \frac{13}{3} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \left(|r(x, t)| + \frac{1}{2} \ln |t| + 4 \right).$$

Доказательство первого неравенства получено выше. Второе неравенство есть следствие первого и леммы 6.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $e^{16} < x \leq t^2$. Тогда

$$S(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma_{x,t}}} \frac{\sin(t \ln n)}{\ln n} + 15\theta \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) (|r(x, t)| + \ln |t|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь формулой леммы 4, представим величину

$$\pi S(t) = -\operatorname{Im} \int_{1/2}^{+\infty} \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} d\sigma$$

в виде суммы $I_1 + I_2 + I_3$, в которой

$$I_1 = -\operatorname{Im} \int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty} \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} d\sigma,$$

$$I_2 = \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \operatorname{Im} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)},$$

$$I_3 = \operatorname{Im} \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \left(\frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} - \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right) d\sigma.$$

Согласно лемме 7 и следствию из нее,

$$I_1 = -\operatorname{Im} \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{it}} \int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty} n^{-\sigma} d\sigma + \frac{13\theta}{3} (|r(x, t)| + 0.5 \ln |t| + 4) \int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty} x^{\frac{1}{4} - \frac{\sigma}{2}} d\sigma$$

$$= -\sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma_{x,t}}} \frac{\sin(t \ln n)}{\ln n} + \frac{13\theta}{3e} (|r(x, t)| + 0.5 \ln |t| + 4) \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right),$$

$$|I_2| \leq \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \left| \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} \right| < \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) (2.6|r(x, t)| + 1.6(0.5 \ln t + 4)).$$

Далее, по лемме 2

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} - \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right)$$

$$= \operatorname{Im} \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{\sigma_{x,t} - \beta + i(t - \gamma)} - \frac{1}{\sigma - \beta + i(t - \gamma)} \right) + \theta(\ln |t| + 6)$$

$$= \sum_{\varrho} \frac{(t - \gamma)(\sigma_{x,t} + \sigma - 2\beta)(\sigma_{x,t} - \sigma)}{((\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2)((\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2)} + \theta(\ln |t| + 6),$$

так что

$$|I_3| \leq \sum_{\varrho} \frac{\sigma_{x,t} - 1/2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{|t - \gamma| |\sigma_{x,t} + \sigma - 2\beta| d\sigma}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} + \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) (\ln |t| + 6).$$

Если $|\beta - 1/2| \leq 0.5(\sigma_{x,t} - 1/2)$, то при $1/2 \leq \sigma \leq \sigma_{x,t}$ справедливо неравенство

$$|\sigma_{x,t} + \sigma - 2\beta| = \left| \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) - 2\left(\beta - \frac{1}{2}\right) \right| \leq 3\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right).$$

В этом случае интеграл по σ не превосходит

$$3\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t - \gamma| du}{u^2 + (t - \gamma)^2} = 3\pi\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right).$$

Если же $|\beta - 1/2| > 0.5(\sigma_{x,t} - 1/2)$, то

$$\begin{aligned} |t - \gamma| &> \frac{x^{3|\beta - 1/2|}}{\ln x} > 3\left|\beta - \frac{1}{2}\right|, \\ |\sigma_{x,t} + \sigma - 2\beta| &\leq \left|\sigma - \frac{1}{2}\right| + \left|\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right| + 2\left|\beta - \frac{1}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right| + 2\left|\beta - \frac{1}{2}\right| < 6\left|\beta - \frac{1}{2}\right| \end{aligned}$$

и рассматриваемый интеграл не превзойдет

$$\int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{|t - \gamma| 6|\beta - 1/2|}{(t - \gamma)^2} d\sigma \leq \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{6|\beta - 1/2|}{3|\beta - 1/2|} d\sigma = 2\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq 3\pi\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) \sum_{\varrho} \frac{\sigma_{x,t} - 1/2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} + \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) (\ln |t| + 6) \\ &< 3\pi\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) \frac{13}{3} (|r(x, t)| + 0.5 \ln |t| + 4) + \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) (\ln |t| + 6). \end{aligned}$$

Сложив полученные неравенства, будем иметь:

$$\left| S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma_{x,t}}} \frac{\sin(t \ln n)}{\ln n} \right| < \frac{1}{\pi} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) (c_1 |r(x, t)| + c_2 \ln |t| + c_3),$$

где

$$c_1 = \frac{13}{3e} + 2.6 + 13\pi, \quad c_2 = \frac{13}{6e} + 0.8 + \frac{13\pi}{2} + 1, \quad c_3 = \frac{52}{3e} + 6.4 + 52\pi + 6.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $c_1 < 15\pi$ и при $|t| > e^8$ имеем $c_2 \ln |t| + c_3 < 15\pi \ln |t|$. Теорема доказана.

ЛЕММА 8. *Имеет место формула:*

$$S_1(T) + \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{1/2}^{+\infty} \ln |\zeta(\sigma)| d\sigma - \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{1/2}^{+\infty} \ln |\zeta(\sigma + iT)| d\sigma = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $S_1(T)$ – четная функция, принимающая в точке $T = 0$ нулевое значение, то достаточно рассмотреть лишь случай $T > 0$. Пусть $A \geq 10$. Обозначим буквой Γ проходимый против часовой стрелки контур прямоугольника с вершинами в точках $1/2$, A , $A + iT$, $1/2 + iT$, в котором к каждому из нулей дзета-функции $\varrho = \beta + i\gamma$ с $\beta > 1/2$, $0 < \gamma < T$ от критической прямой проведен разрез, перпендикулярный мнимой оси. Если T совпадает с ординатой одного из нулей $\zeta(s)$, то верхнюю сторону прямоугольника Γ будем считать идущей вдоль нижнего берега разреза.

Так как функция $\ln \zeta(s)$ аналитична внутри построенного контура и имеет в точке $s = 1$ логарифмическую особенность с нулевым вычетом, то по теореме Коши имеем равенство:

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} \ln \zeta(s) ds = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^4 I_k + \sum_{\substack{\beta > 1/2 \\ 0 < \gamma < T}} I_{\varrho} \right) = 0,$$

где I_k , $k = 1, 2, 3, 4$, – интегралы по сторонам прямоугольника, а I_{ϱ} – интеграл вдоль разреза, проведенного к нулю $\varrho = \beta + i\gamma$. Поскольку при $\sigma \geq A$ и любом $t \geq 0$

$$|\ln \zeta(\sigma + it)| = \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} n^{-\sigma - it} \right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} n^{-\sigma} < 2^{1-\sigma}$$

и

$$\left| \int_0^t \ln \zeta(\sigma + it) d\sigma \right| = \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln^2 n} (n^{-it} - 1) n^{-\sigma} \right| < 3 \cdot 2^{-\sigma},$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I_1 &= \operatorname{Re} \left(\text{v.p.} \int_{1/2}^A \ln \zeta(\sigma) d\sigma \right) = \operatorname{Re} \left(\text{v.p.} \int_{1/2}^{+\infty} \ln \zeta(\sigma) d\sigma + \theta \int_A^{+\infty} 2^{1-\sigma} d\sigma \right) \\ &= \text{v.p.} \int_{1/2}^{+\infty} \ln |\zeta(\sigma)| d\sigma + 3\theta \cdot 2^{-A}, \\ |\operatorname{Re} I_2| &\leq |I_2| = \left| \int_0^T \ln \zeta(A + it) dt \right| < 3 \cdot 2^{-A} \end{aligned}$$

и

$$\operatorname{Re} I_3 = -\operatorname{Re} \left(\int_{1/2}^A \ln \zeta(\sigma + iT) d\sigma \right) = -\text{v.p.} \int_{1/2}^{+\infty} \ln |\zeta(\sigma + iT)| d\sigma + 3\theta \cdot 2^{-A}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I_4 &= -\operatorname{Re} \left(i \int_0^T \ln \zeta(1/2 + it) dt \right) \\ &= -\operatorname{Re} \int_0^T (-\pi S(t) + i \ln |\zeta(1/2 + it)|) dt = \pi S_1(T). \end{aligned}$$

Наконец, все интегралы I_ϱ являются чисто мнимыми. Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I_\varrho &= \operatorname{Re} \left(\int_{1/2}^\beta \ln \zeta(\sigma + i(\gamma + 0)) d\sigma - \int_{1/2}^\beta \ln \zeta(\sigma + i(\gamma - 0)) d\sigma \right) \\ &= \int_{1/2}^\beta (\ln |\zeta(\sigma + i(\gamma + 0))| - \ln |\zeta(\sigma + i(\gamma - 0))|) d\sigma \\ &= \int_{1/2}^\beta (\ln |\zeta(\sigma + i\gamma)| - \ln |\zeta(\sigma + i\gamma)|) d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\pi S_1(T) + \text{v.p.} \int_{1/2}^{+\infty} \ln |\zeta(\sigma)| d\sigma - \text{v.p.} \int_{1/2}^{+\infty} \ln |\zeta(\sigma + iT)| d\sigma + 9\theta \cdot 2^{-A} = 0.$$

Для обе части полученного равенства на π и устремляя A к бесконечности, мы приходим к утверждению леммы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $e^{16} < x \leq t^2$. Тогда

$$\begin{aligned} S_1(t) + \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{1/2}^{+\infty} \ln |\zeta(\sigma)| d\sigma &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma_{x,t}}} \frac{\cos(t \ln n)}{(\ln n)^2} \left(1 + \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \ln n \right) \\ &\quad + 5\theta \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 (|r(x, t)| + \ln t). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем левую часть равенства, пользуясь формулой леммы 8:

$$\begin{aligned} S_1(t) + \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{1/2}^{+\infty} \ln |\zeta(\sigma)| d\sigma &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{1/2}^{+\infty} \ln \zeta(\sigma + it) d\sigma \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{1/2}^{+\infty} \ln \zeta(\sigma + it) d \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= -\operatorname{Re} \left(\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{1/2}^{+\infty} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} d\sigma \right) \\ &= -(I_1 + I_2 + I_3), \end{aligned}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \text{v.p.} \int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} d\sigma, \\ I_2 &= \frac{1}{2\pi} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right)^2 \operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)}, \\ I_3 &= \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} - \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить первый интеграл, воспользуемся выражением для логарифмической производной дзета-функции, которое дается леммой 7:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{it}} \int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) n^{-\sigma} d\sigma \right) \\ &\quad + \frac{13\theta}{3\pi} (|r(x, t)| + 0.5 \ln t + 4) \int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) x^{-\frac{1}{2}(\sigma-1/2)} d\sigma. \end{aligned}$$

Так как $\sigma_{x,t} - 1/2 \geq 2(\ln x)^{-1}$ и при $u \geq 0$ $(1+u)e^{-u} \leq 1$, то

$$\begin{aligned} &\int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) x^{-\frac{1}{2}(\sigma-1/2)} d\sigma \\ &= \frac{4}{(\ln x)^2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \ln x \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \ln x \right) \\ &\leq \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma_{x,t}}} \frac{\cos(t \ln n)}{(\ln n)^2} \left(1 + \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \ln n \right) \\ &\quad + \frac{13\theta}{3\pi} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 (|r(x, t)| + 0.5 \ln |t| + 4). \end{aligned}$$

Оценивая I_2 , воспользуемся следствием леммы 7:

$$|I_2| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 \left| \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 (1.3|r(x, t)| + 0.4 \ln |t| + 2.5).$$

Рассмотрим теперь интеграл I_3 . Преобразуя подынтегральное выражение с помощью формулы леммы 2, получим:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{\pi} \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \sum_{\varrho} \left(\frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} - \frac{\sigma_{x,t} - \beta}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \right) d\sigma \\
&\quad + \frac{\theta}{2\pi} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 (\ln |t| + 6) \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{\varrho} \frac{1}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \\
&\quad \times \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{(\sigma - 1/2)(\sigma_{x,t} - \sigma)((\sigma_{x,t} - \beta)(\sigma - \beta) - (t - \gamma)^2)}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} d\sigma \\
&\quad + \frac{\theta}{2\pi} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 (\ln |t| + 6).
\end{aligned}$$

Обозначим интеграл по σ символом $\varkappa(\varrho)$ и покажем, что $\varkappa(\varrho) \leq 2(\sigma_{x,t} - 1/2)^2$. Для этого рассмотрим три случая. Пусть сначала $|\beta - 1/2| > \frac{1}{2}(\sigma_{x,t} - 1/2)$ или, что то же, $\sigma_{x,t} < 1/2 + 2|\beta - 1/2|$. В этом случае

$$|t - \gamma| > \frac{x^{3|\beta - 1/2|}}{\ln x} > 3 \left| \beta - \frac{1}{2} \right|$$

и для всех σ из промежутка $1/2 \leq \sigma \leq \sigma_{x,t}$

$$|\sigma - \beta| \leq \left| \sigma - \frac{1}{2} \right| + \left| \beta - \frac{1}{2} \right| \leq \left| \sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right| + \left| \beta - \frac{1}{2} \right| < 2 \left| \beta - \frac{1}{2} \right| + \left| \beta - \frac{1}{2} \right| < |t - \gamma|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
|\varkappa(\varrho)| &\leq \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{(\sigma - 1/2)(\sigma_{x,t} - \sigma)((t - \gamma)^2 + (t - \gamma)^2)}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} d\sigma \\
&< 2 \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{(t - \gamma)^2}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} d\sigma \\
&\leq 2 \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} d\sigma = 2 \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^3.
\end{aligned}$$

Пусть, далее, $\frac{1}{2}(1/2 - \sigma_{x,t}) \leq \beta - 1/2 \leq 0$. Тогда $\beta \leq 1/2$, $\sigma - \beta \geq \sigma - 1/2 \geq 0$,

$$0 \leq \sigma_{x,t} - \beta \leq \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) + \left| \beta - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{3}{2} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)$$

и

$$\begin{aligned}
|\varkappa(\varrho)| &\leq \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \left(\left(\sigma - \frac{1}{2} \right) (t - \gamma)^2 + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) (\sigma - \beta) (\sigma_{x,t} - \beta) \right) \frac{(\sigma_{x,t} - \beta) d\sigma}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \\
&\leq \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \left(\int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{(t - \gamma)^2 d\sigma}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{(\sigma - \beta)^2 d\sigma}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^3 + \frac{3}{2} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^3 = 2 \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^3.
\end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда $1/2 < \beta \leq \frac{1}{2}(\sigma_{x,t} + 1/2)$. Представляя $\varkappa(\varrho)$ в виде разности

$$\begin{aligned} & \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{(\sigma_{x,t} - \beta)(\sigma + \beta - \sigma_{x,t} - 1/2)(\sigma - \beta)^2 + (\sigma - 1/2)(\sigma_{x,t} - \sigma)(t - \gamma)^2}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} d\sigma \\ & - \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{(\sigma_{x,t} - \beta)^2(\beta - 1/2)(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} d\sigma \end{aligned}$$

и замечая, что $|\sigma_{x,t} - \beta| \leq \sigma_{x,t} - 1/2$, $|\sigma + \beta - \sigma_{x,t} - 1/2| \leq \sigma_{x,t} - 1/2$, получим:

$$\begin{aligned} |\varkappa(\varrho)| & \leq \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{(\sigma_{x,t} - 1/2)^2(\sigma - \beta)^2 + (\sigma_{x,t} - 1/2)^2(t - \gamma)^2}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} d\sigma \\ & + (\sigma_{x,t} - \beta)^2 \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{(\sigma - \beta) d\sigma}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \\ & \leq \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^3 + (\sigma_{x,t} - \beta)^2 \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2}{(\beta - 1/2)^2 + (t - \gamma)^2}. \end{aligned}$$

Так как $(\sigma_{x,t} - \beta)^2 \geq (\beta - 1/2)^2$, то дробь под знаком логарифма не превосходит

$$\left(\frac{\sigma_{x,t} - \beta}{\beta - 1/2} \right)^2$$

и поэтому

$$\begin{aligned} |\varkappa(\varrho)| & \leq \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^3 + (\sigma_{x,t} - \beta)^2 \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \ln \frac{\sigma_{x,t} - \beta}{\beta - 1/2} \\ & = \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^3 \left(1 + \frac{\beta - 1/2}{\sigma_{x,t} - 1/2} \ln \frac{\sigma_{x,t} - 1/2}{\beta - 1/2} \right) < 2 \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^3. \end{aligned}$$

Итак, в каждом из трех случаев $\varkappa(\varrho)$ по модулю не превосходит $2(\sigma_{x,t} - 1/2)^3$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |I_3| & \leq \frac{2}{\pi} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^3 \cdot \frac{13}{3} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^{-1} (|r(x, t)| + 0.5 \ln |t| + 4) \\ & = \frac{26}{3\pi} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 (|r(x, t)| + 0.5 \ln |t| + 4). \end{aligned}$$

Складывая полученные оценки, мы приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \left| S_1(t) + \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{1/2}^{+\infty} \ln |\zeta(\sigma)| d\sigma + \frac{1}{\pi} \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma_{x,t}}} \frac{\cos(t \ln n)}{(\ln n)^2} \left(1 + \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \ln n \right) \right| \\ & \leq \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 (c_1 |r(x, t)| + c_2 \ln |t| + c_3), \end{aligned}$$

где

$$c_1 = \frac{13}{3\pi} + \frac{1.3}{\pi} + \frac{26}{3\pi}, \quad c_2 = \frac{13}{6\pi} + \frac{0.4}{\pi} + \frac{13}{3\pi}, \quad c_3 = \frac{52}{3\pi} + \frac{2.5}{\pi} + \frac{104}{3\pi}.$$

Пользуясь тем, что $c_1 < 5$, $c_2 < 2.5$, $c_3 < 20$, и тем, что при $|t| \geq e^8$

$$\frac{1}{2} \ln |t| + 4 < \ln |t|,$$

мы приходим к неравенству, содержащемуся в утверждении теоремы. Теорема доказана.

§ 2. Несобственный интеграл, содержащий функцию $S(t)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $f(z)$ – функция, вещественная на вещественной прямой, аналитическая в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq 1$ и удовлетворяющая там условию $|f(z)| \leq c(|z| + 1)^{-(1+\alpha)}$, где c и α – положительные абсолютные постоянные. Для вещественного x символом $\hat{f}(x)$ обозначим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-ixu} du.$$

ЛЕММА 9. Для любого $n \geq 1$ справедливы соотношения:

$$1) \quad n^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-i) n^{-ix} dx = \hat{f}(\ln n), \quad 2) \quad |\hat{f}(\ln n)| \leq 2c\alpha^{-1} n^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ – граница прямоугольника с вершинами в точках $\pm R$, $\pm R - i$, $R > 1$, обходимая против часовой стрелки. По теореме Коши о вычетах,

$$I = \int_{\Gamma} f(z) n^{-iz} dz = 0.$$

Представим I в виде суммы $\sum_{k=1}^4 I_k$, в которой I_1 и I_2 – интегралы по верхней и нижней сторонам прямоугольника, а I_3 , I_4 – интегралы по его боковым сторонам. Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_{-R}^R f(x) e^{-ix \ln n} dx, \\ I_2 &= \int_{-R}^R f(x-i) e^{-i(x-i) \ln n} dx = n^{-1} \int_{-R}^R f(x-i) e^{-ix \ln n} dx, \\ |I_3|, |I_4| &\leq \left| \int_0^1 f(\pm R - iu) e^{-i(\pm R - iu) \ln n} du \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(\pm R - iu)| du \leq c(R+1)^{-(1+\alpha)}. \end{aligned}$$

Устремляя теперь в равенстве $I_2 = -(I_1 + I_3 + I_4)$ R к бесконечности, получим:

$$\begin{aligned} n^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-i) e^{-ix \ln n} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix \ln n} dx = \hat{f}(\ln n), \\ |\hat{f}(\ln n)| &\leq n^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-i)| dx \leq cn^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+|x|)^{1+\alpha}} = 2c\alpha^{-1} n^{-1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(z)$ – функция, вещественная на вещественной прямой, аналитическая в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq 1$ и удовлетворяющая там неравенству $|f(z)| \leq c(|z| + 1)^{-(1+\alpha)}$, $c > 0$, $\alpha > 0$. Тогда при любом t справедлива формула:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \ln \zeta\left(\frac{1}{2} + i(t+u)\right) du \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{n^{-it}}{\sqrt{n}} \widehat{f}(\ln n) + 2\pi \left(\sum_{\beta > 1/2} \int_0^{\beta-1/2} f(\gamma - t - i\xi) d\xi - \int_0^{1/2} f(-t - i\xi) d\xi \right), \end{aligned}$$

где в последней сумме суммирование ведется по всем комплексным нулям $\zeta(s)$, лежащим правее критической прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\psi(z) = f(i(1/2-z)-t)$ и возьмем $X \geq 2(|t|+10)$ так, чтобы ординаты всех нулей $\zeta(s)$ отстояли от X на расстояние, не меньшее $c(\ln X)^{-1}$, где c – некоторая положительная абсолютная постоянная. Такой выбор возможен в силу следствия леммы 3.

Пусть Γ – граница прямоугольника с вершинами $1/2 \pm iX$, $3/2 \pm iX$, в котором к каждому из нулей $\rho = \beta + i\gamma$, а также к точке $z = 1$ от критической прямой проведен горизонтальный разрез. Тогда $\ln \zeta(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны внутри Γ . Согласно теореме Коши о вычетах, имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} \psi(z) \ln \zeta(z) dz \\ &= \left(\int_{3/2-iX}^{3/2+iX} - \int_{1/2-iX}^{3/2+iX} - \int_{1/2-iX}^{1/2+iX} + \int_{1/2-iX}^{3/2-iX} \right) \psi(z) \ln \zeta(z) dz \\ &= I_1 - I_2 - I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Полагая в выражении для I_1 $z = 3/2 + ix$, находим:

$$\begin{aligned} I_1 &= i \int_{-X}^X f(x-t-i) \ln \zeta\left(\frac{3}{2} + ix\right) dx \\ &= i \left(\int_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{-X} - \int_X^{+\infty} \right) f(x-t-i) \ln \zeta\left(\frac{3}{2} + ix\right) dx. \end{aligned}$$

Поскольку при $|x| \geq X$ $|x-t| \geq 0.5|x|$ и $\ln \zeta(3/2 + ix) = O(1)$, то два последних интеграла по порядку не превосходят величины

$$\int_X^{+\infty} \frac{dx}{(1+0.5x)^{1+\alpha}} = O(X^{-\alpha}).$$

Для вычисления несобственного интеграла воспользуемся леммой 9:

$$\begin{aligned} I_1 &= i \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{1}{n\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t-i) n^{-ix} dx + O(X^{-\alpha}) \\ &= i \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{n^{-it}}{\sqrt{n}} \widehat{f}(\ln n) + O(X^{-\alpha}). \end{aligned}$$

Чтобы оценить интегралы I_2 и I_3 , заметим, что при $1/2 \leq \sigma_1 \leq 3/2$

$$\begin{aligned} |\ln \zeta(\sigma_1 + iX)| &= \left| \sum_{|\gamma-X| \leq 1} \ln(\sigma_1 - \beta + i(X - \gamma)) \right| + O(\ln X) \\ &= O((\ln X) \ln \ln X) = O(\ln^2 X) \end{aligned}$$

(см. [20; с. 116]). Поэтому

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{1/2}^{3/2} f(X - t + i(\sigma - \sigma_1)) \ln \zeta(\sigma_1 + iX) d\sigma_1 \right| \\ &= O\left(\ln^2 X \int_{1/2}^{3/2} |f(X - t + i(\sigma - \sigma_1))| d\sigma_1\right) = O(X^{-(1+\alpha)} \ln^2 X). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что $I_4 = O(X^{-(1+\alpha)} \ln^2 X)$. Вычислим теперь интеграл I_3 . Пусть γ является ординатой для k различных нулей $\varrho_1, \dots, \varrho_k$ с кратностями $m_1, \dots, m_k$, лежащих правее критической прямой, и пусть $\beta_1, \dots, \beta_k$ — их вещественные части, упорядоченные в порядке возрастания. Обозначим буквой L разрез, идущий от точки $1/2 + i\gamma$ к точке $\beta_k + i\gamma$, а символом $I(L)$ — интеграл по берегам этого разреза. Тогда

$$\begin{aligned} I(L) &= \int_L \psi(z) \ln \zeta(z) dz = \left(\int_{1/2+i(\gamma+0)}^{\beta_k+i(\gamma+0)} + \int_{\beta_k+i(\gamma-0)}^{1/2+i(\gamma-0)} \right) \psi(z) \ln \zeta(z) dz \\ &= \int_{1/2}^{\beta_k} (\psi(x + i(\gamma + 0)) \ln \zeta(x + i(\gamma + 0)) - \psi(x + i(\gamma - 0)) \ln \zeta(x + i(\gamma - 0))) dx \\ &= \int_{1/2}^{\beta_k} \psi(x + i\gamma) (\ln \zeta(x + i(\gamma + 0)) - \ln \zeta(x + i(\gamma - 0))) dx \\ &= \int_{1/2}^{\beta_k} \psi(x + i\gamma) (\ln |\zeta(x + i\gamma)| + i \arg \zeta(x + i(\gamma + 0)) \\ &\quad - \ln |\zeta(x + i\gamma)| - i \arg \zeta(x + i(\gamma - 0))) dx \\ &= i \int_{1/2}^{\beta_k} \psi(x + i\gamma) h(x) dx, \end{aligned}$$

где символом $h(x)$ обозначена разность

$$\arg \zeta(x + i(\gamma + 0)) - \arg \zeta(x + i(\gamma - 0)).$$

Для того чтобы вычислить последний интеграл, представим $\zeta(z)$ в виде произведения

$$(z - \varrho_1)^{m_1} \dots (z - \varrho_k)^{m_k} g(z),$$

где функция $g(z)$ не обращается в нуль в некоторой окрестности отрезка с концами в точках $1/2 + i\gamma$, $3/2 + i\gamma$. Тогда

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{\nu=1}^k m_{\nu} (\arg(x + i(\gamma + 0) - \beta_{\nu} - i\gamma) - \arg(x + i(\gamma - 0) - \beta_{\nu} - i\gamma)) \\ &\quad + \arg g(x + i(\gamma + 0)) - \arg g(x + i(\gamma - 0)) \\ &= \sum_{\nu=1}^k m_{\nu} (\arg(x - \beta_{\nu} + i \cdot 0) - \arg(x - \beta_{\nu} - i \cdot 0)). \end{aligned}$$

Поскольку разность $\arg(x - \beta_{\nu} + i \cdot 0) - \arg(x - \beta_{\nu} - i \cdot 0)$ равна 0, если $x > \beta_{\nu}$, равна π , если $x = \beta_{\nu}$, и равна 2π , если $x < \beta_{\nu}$, то при $\beta_{\nu} < x < \beta_{\nu+1}$

$$h(x) = 2\pi(m_{\nu+1} + m_{\nu+2} + \dots + m_k).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I(L) &= 2\pi i \left((m_1 + \dots + m_k) \int_{1/2}^{\beta_1} \psi(x + i\gamma) dx \right. \\ &\quad \left. + (m_2 + \dots + m_k) \int_{\beta_1}^{\beta_2} \psi(x + i\gamma) dx + \dots + m_k \int_{\beta_{k-1}}^{\beta_k} \psi(x + i\gamma) dx \right) \\ &= 2\pi i \sum_{\substack{\operatorname{Im} \varrho = \gamma \\ \beta = \operatorname{Re} \varrho > 1/2}} \int_{1/2}^{\beta} \psi(x + i\gamma) dx = 2\pi i \sum_{\substack{\operatorname{Im} \varrho = \gamma \\ \beta = \operatorname{Re} \varrho > 1/2}} \int_0^{\beta-1/2} f(\gamma - t - ix) dx. \end{aligned}$$

Если L — разрез, идущий к точке $z = 1$, то

$$I(L) = -2\pi i \int_0^{1/2} f(-t - ix) dx.$$

Таким образом, интеграл I_3 принимает вид:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{1/2-iX}^{1/2+iX} \psi(z) \ln \zeta(z) dz \\ &\quad - 2\pi i \left(\sum_{\substack{|\gamma| < X \\ \beta > 1/2}} \int_0^{\beta-1/2} f(\gamma - t - ix) dx - \int_0^{1/2} f(-t - ix) dx \right). \end{aligned}$$

В равенстве

$$I_1 = I_3 + O(X^{-\alpha}) + O(X^{-(1+\alpha)} \ln^2 X)$$

устремим X к бесконечности. Получим:

$$\begin{aligned} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \psi(z) \ln \zeta(z) dz &= i \int_{-\infty}^{+\infty} f(u - t) \ln \zeta(1/2 + iu) du \\ &= i \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{n^{-it}}{\sqrt{n}} \widehat{f}(\ln n) \\ &\quad + 2\pi i \left(\sum_{\beta > 1/2} \int_0^{\beta-1/2} f(\gamma - t - ix) dx - \int_0^{1/2} f(-t - ix) dx \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \ln \zeta(1/2 + i(t+u)) du &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{n^{-it}}{\sqrt{n}} \widehat{f}(\ln n) \\ &+ 2\pi \left(\sum_{\beta > 1/2} \int_0^{\beta-1/2} f(\gamma - t - ix) dx - \int_0^{1/2} f(-t - ix) dx \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. При тех же предположениях относительно функции f справедлива формула:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) S(t+u) du &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n} \ln n} \operatorname{Im}(n^{-it} \widehat{f}(\ln n)) \\ &+ 2 \left(\sum_{\beta > 1/2} \int_0^{\beta-1/2} \operatorname{Im} f(\gamma - t - ix) dx - \int_0^{1/2} \operatorname{Im} f(-t - ix) dx \right). \end{aligned}$$

Замечания

Теоремы 1 и 2 принадлежат А. Сельбергу. Им же введены функции $\Lambda_x(n)$ и $\sigma_{x,t}$. Приведенный здесь способ доказательства этих теорем (а также лемм 5, 6 и 7) содержится в работе [27]. Аналог тождества леммы 5, связывающего нули дзета-функции Римана с функцией Мангольдта, можно найти в [20; с. 359–360] и [28; с. 58–59].

Формула леммы 8 впервые получена Дж. Литтлвудом [29] в 1924 г. (см. также лемму 5П).

Частный случай формулы теоремы 3 использован А. Сельбергом в [27] при доказательстве омега-теорем для функции $S(t)$. Доказательство общей формулы содержится в работе К. Тсанга [30].

Другой вариант приближенной формулы для $S(t)$ предложен в 1987 г. Д. Голдстоном [31] и имеет вид:

$$\begin{aligned} S(t) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \frac{\sin(t \ln n)}{\ln n} f\left(\frac{\ln n}{\ln x}\right) \\ &- \frac{\sqrt{x}}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} \frac{x^{-it}}{((1/2 - it) \ln x)^2 - u^2} \frac{u du}{\operatorname{sh}(u)} + O(t^{-1} \ln^{-2} x), \end{aligned}$$

где $t \geq 1$, $t \neq \gamma$, $x \geq 4$, а $f(u) = \frac{\pi u}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi u}{2}\right)$.

Глава III. Рост функций $|S(t)|$ и $|S_1(t)|$

Одним из основных направлений исследований функции $S(t)$ является изучение величин

$$\inf_{0 < t \leq T} S(t) \quad \text{и} \quad \sup_{0 < t \leq T} S(t)$$

при $T \rightarrow +\infty$. Правильный порядок роста этих функций до сих пор не известен.

В первом параграфе настоящей главы даются верхние оценки величин $|S(t)|$ и $|S_1(t)|$, как безусловные, так и использующие гипотезы Римана и Линделёфа. Второй параграф посвящен доказательствам наиболее точных на сегодняшний день омега-теорем для функции $S(t)$.

§ 1. Верхние оценки $|S(t)|$ и $|S_1(t)|$. Следствия гипотез Римана и Линделёфа

ТЕОРЕМА 1. *При $t \geq t_0 > 0$ справедливо неравенство $|S(t)| < 8 \ln t$. Если верна гипотеза Римана, то*

$$|S(t)| < 61 \frac{\ln t}{\ln \ln t}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в приближенной формуле Сельберга (теорема 1 гл. II) $x = \sqrt{\ln t}$. Поскольку $\Lambda_x(n) \leq \ln n$, то

$$\begin{aligned} |S(t)| &\leq 15 \left(\sum_{n \leq x^3} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\Lambda_x(n)}{\ln n} + \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{\sqrt{n}} + (\sigma_{x,t} - 0.5) \ln t \right) \\ &\leq 15 \left(\sum_{n \leq x^3} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} + (\sigma_{x,t} - 0.5) \ln t \right) \\ &\leq 15 (12x^{1.5} \ln x + (\sigma_{x,t} - 0.5) \ln t) < 15 (\sigma_{\sqrt{\ln t}, t} - 0.5) \ln t + (\ln t)^{0.8}. \end{aligned}$$

Так как $\sigma_{x,t} - 0.5 \leq 0.5$, то $|S(t)| < 7.5 \ln t + (\ln t)^{0.8} < 8 \ln t$. Если гипотеза Римана верна, то $\sigma_{x,t} - 0.5 = 2 \ln^{-1} x$, и

$$|S(t)| \leq \frac{60 \ln t}{\ln \ln t} + (\ln t)^{0.8} < \frac{61 \ln t}{\ln \ln t}.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *При $T > T_0 > 0$ имеет место следующая асимптотическая формула:*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + 8.9 \theta \ln T, \quad |\theta| < 1.$$

ТЕОРЕМА 2. *При $t \geq t_0 > 0$ выполняется неравенство $|S_1(t)| < 1.2 \ln t$. Если верна гипотеза Римана, то*

$$|S_1(t)| < 40 \frac{\ln t}{(\ln \ln t)^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положив в приближенной формуле Сельберга для $S_1(t)$ (теорема 2 гл. II) $x = \sqrt{\ln t}$, получим:

$$\begin{aligned} |S_1(t) + c| &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{2 \leq n \leq x^3} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{9}{8} \right) \sum_{2 \leq n \leq x^3} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{9}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{9}{4} (\sigma_{\sqrt{\ln t}, t} - 0.5)^2 \ln t \\ &\leq \frac{9}{4} (\sigma_{\sqrt{\ln t}, t} - 0.5)^2 \ln t + 3.5 (\ln t)^{3/4}, \end{aligned}$$

где $c = \pi^{-1} \int_{0.5}^{+\infty} \ln |\zeta(\sigma)| d\sigma$. Так как $\sigma_{x,t} - 0.5 \leq 0.5$, то

$$|S_1(t)| \leq \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{4} \ln t + 3.5 (\ln t)^{3/4} + |c| < 1.2 \ln t.$$

Если верна гипотеза Римана, то $\sigma_{x,t} - 0.5 = 2 \ln^{-1} x$ и

$$|S_1(t)| \leq \frac{9}{4} \frac{16 \ln t}{(\ln \ln t)^2} + 3.5 (\ln t)^{3/4} + |c| < 40 \frac{\ln t}{(\ln \ln t)^2}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Если гипотеза Линделёфа верна, то $S(t) = o(\ln t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε — сколь угодно малое фиксированное число, $\varepsilon > 0$. Если верна гипотеза Линделёфа, то при всех $t \geq t_0(\varepsilon) > 0$ и $\sigma > 0.5$ справедливо неравенство (см. [20; с. 323], [28; с. 154]):

$$|\zeta(\sigma + it)| \leq t^{\varepsilon^3}.$$

Предположим сначала, что t отлично от ординаты нуля $\zeta(s)$ и $t \geq t_0(\varepsilon)$. Величина $\pi S(t)$ равна сумме приращений $\arg \zeta(s)$ вдоль отрезков $(2, 2 + it)$ и $(2 + it, 0.5 + it)$. Приращение вдоль вертикального отрезка не превосходит

$$|\operatorname{Im}(\ln \zeta(2 + it) - \ln \zeta(2))| = \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{\sin(t \ln n)}{n^2} \right| \leq \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

Пусть $\operatorname{Re} \zeta(\sigma + it)$ меняет знак в точках $\sigma_1, \dots, \sigma_q$, $0.5 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_q \leq 2$. Эти точки разбивают горизонтальный отрезок изменения s на $\leq q + 1$ интервалов, в каждом из которых $\operatorname{Re} \zeta(\sigma + it)$ сохраняет знак. Приращение $\arg \zeta(\sigma + it)$ на каждом из этих интервалов не превосходит π . Следовательно,

$$|S(t)| \leq q + 1 + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) < q + \frac{3}{2}.$$

Оценим сверху величину q . Пусть $n(r)$ обозначает число нулей функции

$$f(s) = \frac{1}{2}(\zeta(s+2+it) + \zeta(s+2-it))$$

в круге $|s| \leq r$. Так как точки $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ являются вещественными нулями $f(s)$, то $q \leq n(1.5)$. Положим $R = 1.5 + \varepsilon^2$. Согласно формуле Иенсена (см. лемму 6П),

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{n(r)}{r} dr &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\varphi})| d\varphi - \ln |f(0)| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \frac{1}{2}(\zeta(2+it+Re^{i\varphi}) + \zeta(2-it+Re^{i\varphi})) \right| d\varphi \\ &\quad - \ln \left| 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(t \ln n)}{n^2} \right|. \end{aligned}$$

Если $|\pi - \varphi| > \arccos(3/(2R))$, то для $s = 2 \pm it + Re^{i\varphi}$ вещественная часть s больше или равна 0.5 и выражение под знаком абсолютной величины в последнем интеграле не превосходит $0.5 \cdot 2(t+R)^{\varepsilon^3} \leq 2t^{\varepsilon^3}$. Если $|\pi - \varphi| \leq \arccos(3/(2R))$, то

$$2 - R = 0.5 - \varepsilon^2 \leq \operatorname{Re} s \leq 0.5 \quad \text{и} \quad 0 \leq 0.5 - \operatorname{Re} s \leq \varepsilon^2.$$

Из функционального уравнения дзета-функции для рассматриваемых s получаем:

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &= \left| \pi^{s-1/2} \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}\right) \right| |\zeta(1-s)| \\ &= \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{0.5-\operatorname{Re} s} (1 + O(t^{-1})) |\zeta(1-s)| \leq 2t^{\varepsilon^2+\varepsilon^3} \leq 2t^{2\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{n(r)}{r} dr &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \arccos \frac{3}{2R} \cdot \ln(2t^{2\varepsilon^2}) + \ln(2t^{2\varepsilon^3}) - \ln\left(2 - \frac{\pi^2}{6}\right) \\ &< \frac{4\varepsilon}{2\pi} (2\varepsilon^2 \ln t + 1) + (\varepsilon^3 \ln t + 1) + 2 < 2\varepsilon^3 \ln t. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\int_0^R \frac{n(r)}{r} dr \geq \int_{1.5}^R \frac{n(r)}{r} dr \geq n(1.5) \int_{1.5}^R \frac{dr}{r} = n(1.5) \ln \frac{2R}{3} \geq \frac{\varepsilon^2}{3} q.$$

Таким образом, $q \leq 3\varepsilon^{-2} 2\varepsilon^3 \ln t = 6\varepsilon \ln t$ и

$$|S(t)| < 7\varepsilon \ln t.$$

Пусть теперь t совпадает с ординатой нуля $\zeta(s)$. Выберем h с условием $0 < h < \varepsilon$ так, чтобы интервал $(t, t+h)$ не содержал других ординат нулей $\zeta(s)$. По доказанному выше, $|S(t+h)| < 7\varepsilon \ln(t+h)$. Поскольку на $(t, t+h)$ $S(t)$ является гладкой функцией с производной $S'(t) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} + O(t^{-2})$, то

$$|S(t+h) - S(t)| = |S(t+h) - S(t+0)| \leq h \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} + O(t^{-2}) \right)$$

и

$$|S(t)| \leq |S(t+h)| + h \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} + O(t^{-2}) \right) < 8\varepsilon \ln t.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Если гипотеза Линделёфа верна, то $S_1(T) = o(\ln T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε — сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.1$. Покажем, что существуют $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$ и положительная абсолютная постоянная a такие, что при $T > T_0$

$$|S_1(T)| \leq a\varepsilon \ln T.$$

Согласно лемме 8 гл. II,

$$S_1(T) = \frac{1}{\pi} \int_{0.5}^{+\infty} \ln |\zeta(\sigma + iT)| d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_{0.5}^{+\infty} \ln |\zeta(\sigma)| d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{0.5}^2 \ln |\zeta(\sigma + iT)| d\sigma + O(1).$$

Положим $\delta = \varepsilon^2$ и представим последний интеграл суммой $I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int_{0.5}^{0.5+3\delta} \ln |\zeta(\sigma + iT)| d\sigma, \quad I_2 = \int_{0.5+3\delta}^2 \ln |\zeta(\sigma + iT)| d\sigma.$$

Интегрируя по σ равенство

$$\ln \zeta(s) = \sum_{|T-\gamma| \leq 1} \ln(s - \varrho) + O(\ln T)$$

и отделяя в получившемся выражении вещественную часть, получим:

$$I_1 = \sum_{|T-\gamma| \leq 1} \int_{0.5}^{0.5+3\delta} \ln |\zeta(\sigma + iT)| d\sigma + O(\delta \ln T).$$

Поскольку

$$\ln |s - \varrho| = \frac{1}{2} \ln((\sigma - \beta)^2 + (T - \gamma)^2) < \frac{1}{2} \ln(0.5^2 + 1) < 1,$$

то

$$I_1 < \sum_{|T-\gamma| \leq 1} 3\delta = O(\delta \ln T).$$

С другой стороны, так как $3\delta < e^{-1}$, то

$$\begin{aligned} I_1 &\geq \sum_{|T-\gamma| \leq 1} \int_{0.5}^{0.5+3\delta} \ln |\sigma - \beta| d\sigma \geq 2 \sum_{|T-\gamma| \leq 1} \int_{0.5}^{0.5+3\delta} \ln(0.5 + 3\delta - \sigma) d\sigma \\ &> - \sum_{|T-\gamma| \leq 1} 5\delta \ln \frac{1}{\delta} = -5\delta \ln \frac{1}{\delta} \cdot O(\ln T). \end{aligned}$$

Таким образом, $I_1 = O(\delta \ln(\delta^{-1}) \cdot \ln T) = O(\varepsilon \ln T)$. Чтобы оценить интеграл I_2 , положим

$$\varepsilon_1 = \exp\left(-\frac{2}{\varepsilon^2} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Если гипотеза Линделёфа верна, то найдется такое $T_1(\varepsilon)$, что при $T \geq T_1(\varepsilon) > 0$ справедливо неравенство:

$$N\left(\frac{1}{2} + \delta, T + \frac{3}{2}\right) - N\left(\frac{1}{2} + \delta, T - \frac{3}{2}\right) < \varepsilon_1 \ln T$$

(см. [20; с. 327–328]). Покажем, что на отрезке $0.5 + 3\delta \leq \sigma \leq 2$ величина $\ln \zeta(\sigma + iT)$ приближается суммой $O(\varepsilon_1 \ln T)$ слагаемых с точностью $O(\varepsilon \ln T)$. Пусть C , C_1 и C_2 – концентрические круги с центром в точке $2 + iT$ и радиусами $1.5 - \delta$, $1.5 - 2\delta$ и $1.5 - 3\delta$ соответственно. Положим

$$\psi(s) = \ln \zeta(s) - \sum' \ln(s - \varrho),$$

где штрих означает суммирование по всем нулям ϱ , лежащим внутри и на границе C . Так как круг C лежит правее прямой $\operatorname{Re} s = 1/2 + \delta$ и так как его радиус не превышает $3/2$, то из приведенной выше оценки разности $N\left(\frac{1}{2} + \delta, T + \frac{3}{2}\right) - N\left(\frac{1}{2} + \delta, T - \frac{3}{2}\right)$ следует, что сумма $\sum'$ содержит $O(\varepsilon_1 \ln T)$ слагаемых. Оценим сперва максимум $|\psi(s)|$ на границе круга C_1 . Для этого заметим, что

$$\psi(s) = - \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \ln(s - \varrho) - \sum' \ln(s - \varrho) + O(\ln t).$$

В это выражение для $\psi(s)$ входят слагаемые, отвечающие нулям ϱ из круга C , для которых $|t - \gamma| > 1$, а также нулям, удовлетворяющим условию $|t - \gamma| \leq 1$, но лежащим вне C . Пусть $\varrho = \beta + i\gamma$ – один из таких нулей. Тогда для произвольной точки $s = \sigma + it$, лежащей на границе C_1 , либо $|s - \varrho| \geq |t - \gamma| > 1$, и вместе с тем

$$|s - \varrho| \leq |\sigma - \beta| + |t - \gamma| \leq (1.5 - \delta) + 2(1.5 - \delta) < 4.5,$$

либо $|s - \varrho| \geq \delta$, и вместе с тем

$$|s - \varrho| \leq |\sigma - \beta| + |t - \gamma| \leq 2 + (1.5 - \delta) + 1 < 5.5,$$

так что $\ln |s - \varrho| = O(\ln \frac{1}{\delta})$. Следовательно, на границе круга C_1

$$|\psi(s)| = O\left(\left(\ln \frac{1}{\delta}\right) \ln T\right).$$

Пусть теперь C_3 – круг с центром в точке $2 + iT$ и радиусом $1/2$. Так как для всякой точки s , лежащей внутри и на границе C_3 ,

$$\ln \zeta(s) = O(1), \quad \ln(s - \varrho) = O(1) \quad \text{для каждого } \varrho \in C,$$

то максимум $|\psi(s)|$ на границе C_3 есть

$$O(1) + \sum' O(1) = O(\varepsilon_1 \ln T).$$

Обозначим буквой M максимум $|\psi(s)|$ на границе круга C_2 . По теореме Адамара о трех кругах (см. лемму 7П),

$$M \ll (\varepsilon_1 \ln T)^{\frac{\ln(r_1/r_2)}{\ln(r_1/r_3)}} \left(\left(\ln \frac{1}{\delta} \right) \ln T \right)^{\frac{\ln(r_2/r_3)}{\ln(r_1/r_3)}},$$

где $r_1 = 1.5 - 2\delta$, $r_2 = 1.5 - 3\delta$ и $r_3 = 0.5$. Замечая, что

$$\ln \frac{r_1}{r_2} = \ln(1 - 4\delta/3) - \ln(1 - 2\delta) < \delta, \quad \ln \frac{r_1}{r_3} = \ln(3 - 4\delta) > 1, \quad \ln \frac{r_2}{r_3} = \ln(3 - 6\delta) < \ln 3,$$

находим:

$$M \ll \varepsilon_1^\delta \left(\ln \frac{1}{\delta} \right)^{\ln 3} \ln T \ll \varepsilon^2 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon^2} \right)^{\ln 3} \ln T \ll \varepsilon \ln T.$$

Следовательно, внутри и на границе C_2

$$|\psi(s)| = O(\varepsilon \ln T).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{0.5+3\delta}^2 \operatorname{Re} \left(\psi(\sigma + iT) + \sum' \ln(\sigma + iT - \varrho) \right) d\sigma \\ &= O(\varepsilon \ln T) + \sum' O(1) = O(\varepsilon \ln T) + O(\varepsilon_1 \ln T) = O(\varepsilon \ln T). \end{aligned}$$

Возвращаясь к оценке $S_1(T)$, находим:

$$S_1(T) = \pi^{-1}(I_1 + I_2) + O(1) = O(\varepsilon \ln T),$$

где постоянная в знаке O – абсолютная. Теорема доказана.

§ 2. Омега-теоремы

Пусть функция $g(t)$ неотрицательна при достаточно больших t . Запись $f(t) = \Omega(g(t))$ при $t \rightarrow +\infty$ означает существование бесконечной последовательности чисел $\{t_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, $t_j \rightarrow +\infty$, такой, что $f(t_j) > cg(t_j)$, где c – некоторая постоянная.

Аналогично, равенство $f(t) = \Omega_{\pm}(g(t))$ означает существование двух последовательностей $\{t_j\}$, $\{\tau_j\}$, стремящихся к бесконечности и таких, что

$$f(t_j) > cg(t_j), \quad f(\tau_j) < -cg(\tau_j), \quad j = 1, 2, \dots$$

Утверждения подобного типа называются омега-теоремами. Ниже приводятся две омега-теоремы для функции $S(t)$ – безусловная (теорема 5) и опирающаяся на гипотезу Римана (теорема 6). Их доказательству предположим четыре вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $H > 0$, $M > 0$, $k \geq 1$, k – целое число, и пусть вещественные функции $W(t)$ и $R(t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} 1) \quad \int_T^{T+H} |W(t)|^{2k} dt &\geq HM^{2k}, & 2) \quad \left| \int_T^{T+H} (W(t))^{2k+1} dt \right| &\leq 0.5HM^{2k+1}, \\ 3) \quad \int_T^{T+H} |R(t)|^{2k+1} dt &< H(0.5M)^{2k+1}. \end{aligned}$$

Тогда справедливы неравенства:

$$\max_{T \leq t \leq T+H} \pm(W(t) + R(t)) \geq \frac{1}{8}M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для $r = 0, 1$

$$W_r(t) = \max(0, (-1)^r W(t)) = \frac{1}{2}(|W(t)| + (-1)^r W(t)).$$

Достаточно показать, что

$$\max_{T \leq t \leq T+H} (W_r(t) - |R(t)|) \geq \frac{1}{8}M.$$

Действительно, если на промежутке $T \leq t \leq T+H$ найдутся точки t_0 и t_1 , для которых $W_r(t_r) - |R(t_r)| > M/8$, $r = 0, 1$, то $W_r(t_r) = (-1)^r W(t_r) > 0$ и

$$W(t_0) + R(t_0) \geq W(t_0) - |R(t_0)| \geq M/8, \quad W(t_1) + R(t_1) \leq -W(t_1) + |R(t_1)| \leq -M/8.$$

Пусть $V(t)$ обозначает любую из функций $W_r(t)$, а μ — максимум разности $V(t) - |R(t)|$ на отрезке $T \leq t \leq T+H$. Определим числа M_1 и M_2 равенствами

$$H^{-1} \int_T^{T+H} V^m(t) dt = M_1^m, \quad H^{-1} \int_T^{T+H} |R(t)|^m dt = M_2^m, \quad m = 2k+1.$$

Из условия леммы следует, что $M_2 < 0.5M$. Чтобы оценить M_1 снизу, воспользуемся неравенством Гёльдера

$$HM^{m-1} \leq \int_T^{T+H} |W(t)|^{m-1} dt \leq H^{1/m} \left(\int_T^{T+H} |W(t)|^m dt \right)^{1-1/m},$$

из которого следует, что

$$\int_T^{T+H} |W(t)|^m dt \geq HM^m.$$

Пользуясь этой оценкой и определением величины M_1 , находим:

$$\begin{aligned} HM_1^m &= \int_T^{T+H} (V(t))^m dt = \frac{1}{2} \left(\int_T^{T+H} |W(t)|^m dt + (-1)^r \int_T^{T+H} (W(t))^m dt \right) \\ &\geq 0.5(HM^m - 0.5HM^m) = 0.25HM^m \geq H \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} M \right)^m, \end{aligned}$$

т.е. $M_1 \geq M/\sqrt[3]{4}$.

Рассмотрим теперь интеграл j ,

$$j = \int_T^{T+H} (V^m(t) - |R(t)|^m) dt.$$

Из определения величин M_1 и M_2 мы заключаем, что

$$j = H(M_1^m - M_2^m) \geq H \left(\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} M \right)^m - \left(\frac{1}{2} M \right)^m \right) > 0.$$

Разложим подынтегральное выражение на множители:

$$j = \int_T^{T+H} (V(t) - |R(t)|) \sum_{\nu=0}^{m-1} V^\nu(t) |R(t)|^{m-\nu-1} dt.$$

Так как $j > 0$, а каждое слагаемое в сумме по ν неотрицательно при любом t , то максимум μ величины $V(t) - |R(t)|$ положителен. Поэтому

$$j \leq \mu \sum_{\nu=0}^{m-1} j(\nu), \quad \text{где} \quad j(\nu) = \int_T^{T+H} V^\nu(t) |R(t)|^{m-1-\nu} dt.$$

К последнему интегралу дважды применим неравенство Гёльдера. Будем иметь:

$$\begin{aligned} j(\nu) &\leq \left(\int_T^{T+H} V^m(t) dt \right)^{\nu/m} \left(\int_T^{T+H} |R(t)|^{m(1-1/(m-\nu))} dt \right)^{1-\nu/m} \\ &\leq \left(\int_T^{T+H} V^m(t) dt \right)^{\nu/m} H^{1/m} \left(\int_T^{T+H} |R(t)|^m dt \right)^{(1-\nu/m)(1-1/(m-\nu))} \\ &= H M_1^\nu M_2^{m-\nu-1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$H(M_1^m - M_2^m) = j \leq \mu \sum_{\nu=0}^{m-1} H M_1^\nu M_2^{m-\nu-1} = \mu H \frac{M_1^m - M_2^m}{M_1 - M_2}.$$

Сокращая обе части этого неравенства на $H(M_1^m - M_2^m)$, находим:

$$\mu \geq M_1 - M_2 \geq \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{2} \right) M \geq \frac{1}{8} M.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $H > 0$, $M > 0$, $k \geq 1$, k — целое число, и пусть вещественная непрерывная функция $W(t)$ удовлетворяет неравенствам 1) и 2) из условия леммы. Тогда справедливы соотношения:

$$\max_{T \leq t \leq T+H} \pm W(t) \geq \frac{1}{8} M.$$

ЛЕММА 2. Для любых достаточно больших положительных H , t и τ , $\tau < \ln t$, $H < t$, справедлива формула:

$$\int_{-0.5H\tau}^{0.5H\tau} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 S \left(t + \frac{2u}{\tau} \right) du = W(t) + R(t) + O \left(\ln \tau + \frac{\ln t}{H\tau} \right),$$

в которой

$$\begin{aligned} W(t) &= - \sum_{p \leq e^\tau} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \left(1 - \frac{\ln p}{\tau} \right), \\ R(t) &= \tau \sum_{\beta > 0.5} \int_0^{\beta-0.5} \operatorname{Im} \left(\frac{\sin \frac{\tau}{2} (\gamma - t - i\xi)}{\frac{\tau}{2} (\gamma - t - i\xi)} \right)^2 d\xi, \end{aligned}$$

где величина $\varrho = \beta + i\gamma$ пробегает комплексные нули дзета-функции Римана, лежащие правее критической прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая

$$f(z) = \left(\frac{\sin(\tau z/2)}{\tau z/2} \right)^2,$$

будем иметь

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} f(u) du = \frac{2\pi}{\tau} \max(0, 1 - |x/\tau|),$$

так что

$$\widehat{f}(\ln n) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\tau} \left(1 - \frac{\ln n}{\tau}\right), & \text{если } 1 \leq n \leq e^\tau, \\ 0, & \text{если } n > e^\tau. \end{cases}$$

Воспользовавшись следствием теоремы 3 гл. II, получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\tau u/2)}{\tau u/2} \right)^2 S(t+u) du &= -\frac{2}{\tau} \sum_{n \leq e^\tau} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{\sin(t \ln n)}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\ln n}{\tau}\right) \\ &+ 2 \left(\sum_{\beta > 0.5} \int_0^{\beta-0.5} \operatorname{Im} \left(\frac{\sin \frac{\tau}{2}(\gamma - t - i\xi)}{\frac{\tau}{2}(\gamma - t - i\xi)} \right)^2 d\xi - \int_0^{0.5} \operatorname{Im} \left(\frac{\sin \frac{\tau}{2}(t + i\xi)}{\frac{\tau}{2}(t + i\xi)} \right)^2 d\xi \right). \end{aligned}$$

Так как при $0 \leq \xi \leq 0.5$

$$2 \left| \frac{\sin \frac{\tau}{2}(t + i\xi)}{\frac{\tau}{2}(t + i\xi)} \right|^2 \leq 2 \left(\frac{2e^{\tau\xi/2}}{t} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{2e^{\tau/4}}{t} \right)^2 < 8e^{0.5 \ln t} t^{-2} < 0.2\tau^{-1},$$

то последний интеграл по абсолютной величине не превосходит $0.1\tau^{-1}$.

В сумме по $n \leq e^\tau$ выделим слагаемые, отвечающие простым $n = p$ и оценим оставшиеся по модулю:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau} \left| \sum_{k \geq 2} \sum_{n=p^k \leq e^\tau} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{\sin(t \ln n)}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\ln n}{\tau}\right) \right| &\leq \frac{1}{\tau} \sum_{p \leq e^{\tau/2}} \sum_{k \geq 2} p^{-k/2} \\ &< \frac{2}{\tau} \sum_{p \leq e^{\tau/2}} \frac{1}{p} = \frac{2}{\tau} \left(\ln \frac{\tau}{2} + 0.26 \dots + O(\tau^{-1}) \right) < (2 \ln \tau - 0.1)\tau^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\tau u/2)}{\tau u/2} \right)^2 S(t+u) du &= -\frac{2}{\tau} \sum_{p \leq e^\tau} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \left(1 - \frac{\ln p}{\tau}\right) \\ &+ 2 \sum_{\beta > 0.5} \int_0^{\beta-0.5} \operatorname{Im} \left(\frac{\sin \frac{\tau}{2}(\gamma - t - i\xi)}{\frac{\tau}{2}(\gamma - t - i\xi)} \right)^2 d\xi + \theta \frac{2}{\tau} \ln \tau. \end{aligned}$$

Делая в несобственном интеграле замену $v = \tau u/2$ и разбивая прямую интегрирования на три промежутка, представим левую часть равенства суммой

$$\frac{2}{\tau} \left(\int_{-0.5H\tau}^{0.5H\tau} + \int_{-\infty}^{-0.5H\tau} + \int_{0.5H\tau}^{+\infty} \right) \left(\frac{\sin v}{v} \right)^2 S\left(t + \frac{2v}{\tau}\right) dv$$

и оценим два последних слагаемых, пользуясь теоремой 1 настоящей главы:

$$\left| 2\tau \left(\int_{-\infty}^{-0.5H\tau} + \int_{0.5H\tau}^{+\infty} \right) \left(\frac{\sin v}{v} \right)^2 S \left(t + \frac{2v}{\tau} \right) dv \right| \\ \ll \tau \cdot \tau^{-1} \int_H^{+\infty} \ln(t+v) \frac{dv}{v^2} \ll \int_H^t \ln t \frac{dv}{v^2} + \int_t^{+\infty} \ln v \frac{dv}{v^2} \ll \frac{\ln t}{H} + \frac{\ln t}{t} \ll \frac{\ln t}{H}.$$

Сокращая обе части рассматриваемого соотношения на $2/\tau$, получим:

$$\int_{-0.5H\tau}^{0.5H\tau} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 S \left(t + \frac{2u}{\tau} \right) du = W(t) + R(t) + O \left(\ln \tau + \frac{\ln t}{H\tau} \right),$$

где

$$W(t) = - \sum_{p \leq e^\tau} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \left(1 - \frac{\ln p}{\tau} \right), \\ R(t) = \tau \sum_{\beta > 0.5} \int_0^{\beta-0.5} \operatorname{Im} \left(\frac{\sin \frac{\tau}{2} (\gamma - t - i\xi)}{\frac{\tau}{2} (\gamma - t - i\xi)} \right)^2 d\xi.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $T \geq T_0 > 0$, $e^2 < H < T$, $2 < \tau < \ln H$, $k \geq k_0 > 1$, k — целое число, $2k \ln k < e^{2\tau/3}$. Тогда справедливы неравенства:

$$\int_T^{T+H} (W(t))^{2k} dt > (0.0025k)^k H - e^{3k\tau}, \quad \left| \int_T^{T+H} (W(t))^{2k+1} dt \right| < e^{3k\tau} e^{1.5\tau}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представляя $W(t)$ в виде разности $(V(t) - \overline{V}(t))/(2i)$,

$$V(t) = \sum_{p \leq e^\tau} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{-it}, \quad a(p) = 1 - \frac{\ln p}{\tau},$$

найдем:

$$I_k = \int_T^{T+H} (W(t))^{2k} dt = (2i)^{-2k} \sum_{\nu=0}^{2k} (-1)^\nu \binom{2k}{\nu} j_{2k}(\nu), \\ J_k = \int_T^{T+H} (W(t))^{2k+1} dt = (2i)^{-2k-1} \sum_{\nu=0}^{2k+1} (-1)^\nu \binom{2k+1}{\nu} j_{2k+1}(\nu),$$

где

$$j_r(\nu) = \int_T^{T+H} V^\nu(t) \overline{V}^{r-\nu}(t) dt \\ = \sum_{p_1, \dots, p_\nu \leq e^\tau} \sum_{q_1, \dots, q_{r-\nu} \leq e^\tau} \frac{a(p_1) \cdots a(q_{r-\nu})}{\sqrt{p_1 \cdots q_{r-\nu}}} \int_T^{T+H} \left(\frac{q_1 \cdots q_{r-\nu}}{p_1 \cdots p_\nu} \right)^{it} dt.$$

Из основной теоремы арифметики следует, что равенство $q_1 \cdots q_{r-\nu} = p_1 \cdots p_\nu$ возможно лишь в случае, когда $r = 2k, \nu = k$. В остальных случаях, полагая для краткости $P = p_1 \cdots p_\nu, Q = q_1 \cdots q_{r-\nu}$ и замечая, что P и Q не превосходят $e^{r\tau}$, находим:

$$\begin{aligned} |j_r(\nu)| &\leq \sum_{P \neq Q} \frac{1}{\sqrt{PQ}} \cdot 2 \left| \ln \frac{Q}{P} \right|^{-1} \leq 2 \sum_{P, Q} \frac{1}{\sqrt{PQ}} \max(P, Q) \\ &\leq 2e^{r\tau} \sum_{P, Q} \frac{1}{\sqrt{PQ}} \leq 2e^{r\tau} \left(\sum_{p \leq e^\tau} \frac{1}{\sqrt{p}} \right)^r \leq 2e^{r\tau} (3\tau^{-1}e^{\tau/2})^r < e^{1.5r\tau}. \end{aligned}$$

В случае $r = 2k, \nu = k$ в выражении для $j_r(\nu)$ присутствуют “диагональные” члены:

$$j_{2k}(k) = H\Sigma + \theta \sum_{P \neq Q} \frac{1}{\sqrt{PQ}} \cdot 2 \left| \ln \frac{Q}{P} \right|^{-1} = H\Sigma + \theta e^{1.5 \cdot 2k\tau},$$

где $|\theta| < 1$, а

$$\Sigma = \sum_{p_1 \cdots p_k = q_1 \cdots q_k} \frac{a(p_1) \cdots a(q_k)}{\sqrt{p_1 \cdots q_k}} = \sum_{p_1 \cdots p_k = q_1 \cdots q_k} \frac{a^2(p_1) \cdots a^2(p_k)}{p_1 \cdots p_k}.$$

Оставляя в последней сумме слагаемые, отвечающие наборам $(p_1, \dots, p_k)$, не содержащим повторений, придем к нижней оценке величины Σ . Зафиксируем набор $(p_1, \dots, p_k)$, в котором все числа $p_1, \dots, p_k$ различны. Тогда число решений уравнения $p_1 \cdots p_k = q_1 \cdots q_k$ в простых числах $q_1, \dots, q_k$ равно $k!$, и поэтому

$$\Sigma \geq k! \sum_{p_1 \leq e^\tau} \frac{a^2(p_1)}{p_1} \sum_{\substack{p_2 \leq e^\tau \\ p_2 \neq p_1}} \frac{a^2(p_2)}{p_2} \sum_{\substack{p_3 \leq e^\tau \\ p_3 \neq p_1, p_2}} \frac{a^2(p_3)}{p_3} \cdots \sum_{\substack{p_k \leq e^\tau \\ p_k \neq p_1, \dots, p_{k-1}}} \frac{a^2(p_k)}{p_k}.$$

Величины $a^2(p)p^{-1}$ с ростом $p, p \leq e^\tau$, монотонно убывают, так как

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{a^2(p)}{p} \right) = \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} \left(1 - \frac{\ln p}{\tau} \right)^2 \right) = -\frac{1}{p^2} \left(1 - \frac{\ln p}{\tau} \right) \left(1 - \frac{\ln p}{\tau} + \frac{2}{\tau} \right) < 0.$$

Следовательно, при любых значениях $p_1, \dots, p_{k-1}$ сумма по p_k не меньше суммы величин $a^2(p)p^{-1}$ по простым числам $p \leq e^\tau$, из которой выброшены слагаемые, отвечающие первым $k-1$ простым числам. Считая k настолько большим, что $(k-1)$ -е простое число не превосходит $2k \ln k$, убеждаемся, что сумма по p_k оценивается снизу величиной

$$\sum_{e^{2\tau/3} < p \leq e^\tau} \frac{a^2(p)}{p},$$

которая не зависит от $p_1, \dots, p_{k-1}$. Применяя те же рассуждения к сумме по p_{k-1} , затем к суммам по $p_{k-2}, \dots, p_1$, получим:

$$\begin{aligned} \Sigma &\geq k! \left(\sum_{e^{2\tau/3} < p \leq e^\tau} \frac{a^2(p)}{p} \right)^k > k! \left(\sum_{e^{2\tau/3} < p \leq e^{4\tau/5}} \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\ln p}{\tau} \right)^2 \right)^k \\ &> k! \left(\sum_{e^{2\tau/3} < p \leq e^{4\tau/5}} \frac{1}{5^2 p} \right)^k = 5^{-2k} k! \left(\ln \frac{4}{5} \tau - \ln \frac{2}{3} \tau + o(1) \right)^k \\ &> (0.18)^k 5^{-2k} k! > (0.007)^k k!. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} j_{2k}(k) &> (0.007)^k k! - e^{3k\tau}, \\ I_k &> 2^{-2k} \binom{2k}{k} (0.007)^k k! H - e^{3k\tau} 2^{-2k} \sum_{\nu=0}^{2k} \binom{2k}{\nu} \\ &> (0.007e^{-1}k)^k H - e^{3k\tau} > (0.0025k)^k H, \\ |J_k| &< 2^{-2k-1} e^{1.5(2k+1)\tau} \sum_{\nu=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{\nu} = e^{3k\tau} e^{1.5\tau}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Для доказательства следующей леммы нам потребуется утверждение, которое назовем “плотностная теорема”.

ПЛОТНОСТНАЯ ТЕОРЕМА. *При фиксированном ε , $0 < \varepsilon < 0.001$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$ и $0.5 \leq \sigma \leq 1$ выполняется оценка*

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) \leq 0.4H(\ln T)T^{-0.1\varepsilon(2\sigma-1)}.$$

Доказательство этого утверждения см. в [21], [22].

ЛЕММА 4. *Пусть ε – произвольное фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $k \geq k_0(\varepsilon) > 1$, k – целое число, $m = 2k+1$, $\tau = 2 \ln \ln H$, и пусть $m\tau < 0.1\varepsilon \ln T$. Тогда для определенной выше функции $R(t)$ справедливо следующее неравенство:*

$$\int_T^{T+H} |R(t)|^m dt < H \left(50^m + (\ln T)^3 \left(\frac{100\varepsilon^{-3}\tau m^2}{\ln T} \right)^m \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перед тем как заняться непосредственно оценкой интеграла

$$L_k = \int_T^{T+H} |R(t)|^{2k+1} dt,$$

получим необходимую для дальнейшего верхнюю границу подынтегральной функции. Для этого заметим, что при любых вещественных x и y , $y \geq 0$, справедливо неравенство:

$$\left| \operatorname{Im} \left(\frac{\sin(x - iy)}{x - iy} \right)^2 \right| < \frac{32ye^{2y}}{1 + x^2 + y^2}.$$

Действительно, обозначив левую часть неравенства символом $\varphi(x, y)$, представим ее в виде

$$\varphi = \left| \operatorname{Im} \left(\left(\frac{\sin(x - iy)}{x - iy} \right)^2 - \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right) \right| = 2 \left| \operatorname{Im} \int_x^{x - iy} \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} dz \right|,$$

где $z = x - iv$, $0 \leq v \leq y$. Если $|z| \leq 1$, то

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin z}{z} \right| &= \left| 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right| < \frac{6}{5} < \frac{6\sqrt{2}}{5} \frac{e^v}{\sqrt{1 + x^2 + v^2}}, \\ \left| \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} \right| &= \left| \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) z - \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) z^3 + \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} \right) z^5 - \dots \right| < \frac{3}{4} \\ &< \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{e^v}{\sqrt{1 + x^2 + v^2}}. \end{aligned}$$

Если $|z| > 1$, то

$$\left| \frac{\sin z}{z} \right| \leq \frac{e^v}{|z|} \leq \sqrt{2} \frac{e^v}{\sqrt{1 + x^2 + v^2}}, \quad \left| \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} \right| \leq \frac{e^v}{|z|} \leq 2\sqrt{2} \frac{e^v}{\sqrt{1 + x^2 + v^2}}.$$

В каждом из случаев подынтегральная функция в выражении для $\varphi(x, y)$ по абсолютной величине не превосходит

$$\frac{4e^v}{\sqrt{1 + x^2 + v^2}}.$$

При фиксированном x эта величина – неубывающая функция v , так что

$$\varphi(x, y) \leq 8 \int_0^y \frac{e^{2y}}{1 + x^2 + y^2} dv = \frac{8ye^{2y}}{1 + x^2 + y^2}.$$

Пользуясь этой оценкой наряду с определением $R(t)$, находим:

$$\begin{aligned} |R(t)| &\leq \tau \left| \sum_{\beta > 0.5} \int_0^{\beta - 0.5} \operatorname{Im} \left(\frac{\sin \frac{\tau}{2}(\gamma - t - i\xi)}{\frac{\tau}{2}(\gamma - t - i\xi)} \right)^2 d\xi \right| \\ &\leq \tau \sum_{\beta > 0.5} \int_0^{\beta - 0.5} \frac{8 \frac{\tau \xi}{2} e^{\tau \xi} d\xi}{1 + \left(\frac{\tau}{2}(\gamma - t) \right)^2 + \left(\frac{\tau \xi}{2} \right)^2} \\ &< 4\tau^2 \sum_{\beta > 0.5} \int_0^{\beta - 0.5} \frac{\xi e^{\tau(\beta - 0.5)} d\xi}{1 + \left(\frac{\tau}{2}(\gamma - t) \right)^2 + \left(\frac{\tau}{2}(\beta - 0.5) \right)^2} \\ &= 8 \sum_{\beta > 0.5} (\beta - 0.5)^2 \frac{e^{\tau(\beta - 0.5)}}{\left(\frac{2}{\tau} \right)^2 + (\gamma - t)^2 + (\beta - 0.5)^2}. \end{aligned}$$

Сумму по нулям разобьем на две, относя к первой слагаемые, отвечающие условию $|\gamma - t| > (\ln T)^2$, а ко второй – все остальные. Пользуясь неравенством теоремы 1, мы заключаем, что

$$N(t+1) - N(t) \leq \frac{1}{2\pi} \ln \frac{t+1}{2\pi} + |S(t+1)| + |S(t)| + O(t^{-1}) < 18 \ln t.$$

Поэтому первая сумма не превосходит

$$\begin{aligned} 2e^{\tau/2} \sum_{|\gamma-t| > (\ln T)^2} (\gamma-t)^{-2} &< \frac{2}{3} (\ln T) \sum_{n > (\ln T)^2} n^{-2} \sum_{n < |\gamma-t| \leq n+1} 1 \\ &< \frac{2}{3} (\ln T) \cdot 36 \sum_{n > (\ln T)^2} (\ln T + \ln n) n^{-2} < 25. \end{aligned}$$

Следуя А. Сельбергу [27], обозначим символом θ_t наибольшую из разностей $\beta - 0.5$ для нулей $\varrho = \beta + i\gamma$, лежащих в прямоугольнике $0.5 < \beta \leq 1, |\gamma - t| \leq (\ln T)^2$. Тогда вторая сумма не превзойдет величины

$$8\theta_t^2 e^{\tau\theta_t} \sum_{|\gamma-t| \leq (\ln T)^2} \left(\left(\frac{2}{\tau} \right)^2 + (\gamma-t)^2 + (\beta-0.5)^2 \right)^{-1}.$$

Положим $x = \sqrt{\ln T}$. Из определения величин $\sigma_{x,t}$, θ_t и τ следует, что

$$\sigma_{x,t} - 0.5 \leq 2 \max \left(\theta_t, \frac{4}{\tau} \right) \leq 4 \left(\frac{2}{\tau} + \theta_t \right)$$

и

$$\left(\frac{2}{\tau} \right)^2 + \theta_t^2 \geq \left(\frac{2}{\tau} + \theta_t \right)^2 \geq \frac{1}{32} (\sigma_{x,t} - 0.5)^2 \geq \frac{1}{32} (\sigma_{x,t} - \beta)^2.$$

Таким образом, верхней границей рассматриваемой суммы будет

$$2^8 \theta_t^2 e^{\tau\theta_t} \sum_{\varrho} ((\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (\gamma-t)^2).$$

Согласно следствию леммы 7 гл. II, последняя сумма не превосходит

$$\frac{13}{3} (\sigma_{x,t} - 0.5)^{-1} \left(\sum_{n \leq (\ln T)^{1.5}} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} + 0.5 \ln(T+H) + 4 \right) < \frac{13}{3} (\sigma_{x,t} - 0.5)^{-1} \cdot 0.6 \ln T.$$

Поскольку

$$\sigma_{x,t} - 0.5 \geq \frac{2}{\ln x} = \frac{4}{\ln \ln T} \geq \frac{3.9}{\ln \ln H} = \frac{7.8}{\tau},$$

то

$$|R(t)| < 25 + 2^8 \theta_t^2 e^{\tau\theta_t} \frac{13}{3} \cdot \frac{\tau}{7.8} \cdot 0.6 \ln T < 25(1 + 3.5 \theta_t^2 e^{\tau\theta_t} \tau \ln T).$$

Приступим к оценке интеграла L_k . Полагая $m = 2k + 1$ и пользуясь неравенством Гёльдера, будем иметь:

$$L_k < 25^m \int_T^{T+H} (1 + 3.5\theta_t^2 e^{\tau\theta_t} \tau \ln T)^m dt < 50^m (H + (3.5\tau \ln T)^m j),$$

где обозначено:

$$j = \int_T^{T+H} (\theta_t^2 e^{\tau\theta_t})^m dt.$$

Пусть $\beta_0 + i\gamma_0$ — произвольный нуль $\zeta(s)$ с условием $T - (\ln T)^2 \leq \gamma \leq T + H + (\ln T)^2$. Из определения θ_t следует, что множество тех $t \in (T, T+H]$, для которых $\theta_t = \beta_0 - 0.5$, покрыто промежутком $\gamma - (\ln T)^2 \leq t \leq \gamma + (\ln T)^2$ (возможно, окажется пустым). Поэтому

$$\begin{aligned} j &\leq \sum_{T - (\ln T)^2 \leq \gamma \leq T + H + (\ln T)^2} \int_{\gamma - (\ln T)^2}^{\gamma + (\ln T)^2} (\beta - 0.5)^{2m} X^{\beta - 0.5} dt \\ &\leq 2(\ln T)^2 \sum_{T - H < \gamma \leq T + 2H} (\beta - 0.5)^{2m} X^{\beta - 0.5}, \end{aligned}$$

где $X = e^{m\tau}$. Представляя величину $(\beta - 0.5)^{2m} X^{\beta - 0.5}$ интегралом

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta - 0.5} (2mu^{2m-1} + m\tau u^{2m}) X^u du &= \int_0^{0.5} g(\varrho; u) (2mu^{2m-1} + m\tau u^{2m}) X^u du, \\ g(\varrho; u) = g(\beta + i\gamma; u) &= \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq u \leq \beta - 0.5, \\ 0, & \text{если } \beta - 0.5 < u \leq 0.5, \end{cases} \end{aligned}$$

получим:

$$\begin{aligned} j &\leq 2(\ln T)^2 \int_0^{0.5} \left(\sum_{T - H < \gamma \leq T + 2H} g(\varrho; u) \right) (2mu^{2m-1} + m\tau u^{2m}) X^u du \\ &= 2(\ln T)^2 \int_0^{0.5} (N(0.5 + u, T + 2H) - N(0.5 + u, T - H)) \\ &\quad \times X^u (2mu^{2m-1} + m\tau u^{2m}) du. \end{aligned}$$

Пользуясь неравенством плотностной теоремы и тем, что $X < e^{0.1\varepsilon \ln T} = T^{0.1\varepsilon}$, находим:

$$\begin{aligned} j &\leq 2.4H(\ln T)^3 \int_0^{0.5} (T^{-0.2\varepsilon} X)^u (2mu^{2m-1} + m\tau u^{2m}) du \\ &< 2.4H(\ln T)^3 \int_0^{0.5} T^{-0.1u\varepsilon} (2mu^{2m-1} + m\tau u^{2m}) du. \end{aligned}$$

Положим в последнем интеграле $v = 0.1u\varepsilon \ln T$. Тогда

$$\begin{aligned} j &< 2.4H(\ln T)^3 \left(2m(0.1\varepsilon \ln T)^{-2m} \int_0^{+\infty} v^{2m-1} e^{-v} dv \right. \\ &\quad \left. + m\tau(0.1\varepsilon \ln T)^{-2m-1} \int_0^{+\infty} v^{2m} e^{-v} dv \right) \\ &< 2.4H(\ln T)^3 (2m)! (0.1\varepsilon \ln T)^{-2m} \left(\frac{1}{m} + \frac{\tau}{0.1\varepsilon \ln T} \right) \\ &< 4.8m^{-1}H(\ln T)^3 (2m)! (0.1\varepsilon \ln T)^{-2m} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} L_k &< 50^m H (1 + 4.8m^{-1}(\ln T)^3 (2m)! (3.5\tau \ln T)^m (0.1\varepsilon \ln T)^{-2m}) \\ &\leq 50^m H \left(1 + 4.8m^{-1}(\ln T)^3 \left(\frac{3500\varepsilon^{-2}\tau}{\ln T} \right) \cdot 3.6\sqrt{m} \left(\frac{2m}{e} \right)^{2m} \right) \\ &< 50^m H \left(1 + 18m^{-0.5}(\ln T)^3 \left(\frac{2 \cdot 10^3 \varepsilon^{-2} \tau m^2}{\ln T} \right)^m \right) \\ &< 50^m H \left(1 + (\ln T)^3 \left(\frac{2\varepsilon^{-3} \tau m^2}{\ln T} \right)^m \right) \\ &< H \left(50^m + (\ln T)^3 \left(\frac{100\varepsilon^{-3} \tau m^2}{\ln T} \right)^m \right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть ε – произвольное фиксированное число, $0 < \varepsilon < 10^{-7}$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Тогда справедливы неравенства:

$$\sup_{T-H \leq t \leq T+2H} (\pm S(t)) \geq \frac{\varepsilon^{5/4}}{1000} \left(\frac{\ln T}{\ln \ln T} \right)^{1/3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$k = \left\lceil \frac{\varepsilon^{2.5}}{10} \left(\frac{\ln T}{\ln \ln T} \right)^{2/3} \right\rceil, \quad \tau = 2 \ln \ln H.$$

Тогда будут выполнены условия

$$\begin{aligned} 2k \ln k &< (2k+1)\tau < 0.1\varepsilon \ln T < e^{2\tau/3} = (\ln H)^{4/3}, \\ e^{3k\tau} &< \exp \left(6 \left(\frac{\varepsilon^{2.5}}{10} \left(\frac{\ln T}{\ln \ln T} \right)^{2/3} + 1 \right) \ln \ln T \right) < \sqrt{H} \end{aligned}$$

и, как следствие, оценки интегралов I_k , J_k и L_k лемм 3 и 4:

$$\begin{aligned} I_k &> (0.0025k)^k H - e^{3k\tau} > (0.05\sqrt{k})^{2k} H - \sqrt{H} > (0.04\sqrt{k})^{2k} H, \\ |J_k| &< e^{3k\tau} e^{1.5\tau} < \sqrt{H} (\ln H)^3 < 0.5H(0.04\sqrt{k})^{2k+1}, \\ L_k &< H \left(50^{2k+1} + (\ln T)^3 \left(\frac{100\varepsilon^{-3} \cdot 5k^2\tau}{\ln T} \right)^{2k+1} \right) \\ &< H \left(50^{2k+1} + (\ln T)^3 \left(10\varepsilon^2 \left(\frac{\ln T}{\ln \ln T} \right)^{1/3} \right)^{2k+1} \right) \\ &< H (0.5(0.02\sqrt{k})^{2k+1} + (60\varepsilon^{1/4})^{2k+1} (\ln T)^3 \cdot (\varepsilon^{1/4}\sqrt{k})^{2k+1}) \\ &< H (0.5(0.02\sqrt{k})^{2k+1} + 0.5(0.02\sqrt{k})^{2k+1}) = (0.02\sqrt{k})^{2k+1} H. \end{aligned}$$

Таким образом, функции $W(t)$ и $R(t)$ удовлетворяют условиям леммы 1 с $M = 0.04\sqrt{k}$. Следовательно, на отрезке $T \leq t \leq T + H$ найдутся такие точки t_0 и t_1 , что

$$W(t_0) + R(t_0) \geq \frac{1}{8}M, \quad W(t_1) + R(t_1) \leq -\frac{1}{8}M.$$

Пользуясь формулой леммы 2, запишем эти неравенства в виде

$$\begin{aligned} j_0 &= \int_{-0.5H\tau}^{0.5H\tau} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 S\left(t_0 + \frac{2u}{\tau}\right) du \\ &= W(t_0) + R(t_0) + O\left(\ln \tau + \frac{\ln t_0}{H\tau}\right) \geq \frac{1}{8}M + O(\ln \tau), \\ j_1 &= \int_{-0.5H\tau}^{0.5H\tau} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 S\left(t_1 + \frac{2u}{\tau}\right) du \\ &= W(t_1) + R(t_1) + O\left(\ln \tau + \frac{\ln t_1}{H\tau}\right) \leq -\frac{1}{8}M + O(\ln \tau). \end{aligned}$$

Обозначим верхнюю и нижнюю грани функции $S(t)$ на отрезке $T - H \leq t \leq T + 2H$ символами M_0 и M_1 соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} j_0 &\leq M_0 \int_{-0.5H\tau}^{0.5H\tau} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 du < M_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 du = \frac{\pi}{2}M_0 \quad (M_0 > 0), \\ j_1 &\geq M_1 \int_{-0.5H\tau}^{0.5H\tau} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 du > M_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 du = \frac{\pi}{2}M_1 \quad (M_1 < 0). \end{aligned}$$

Значит, при $r = 0, 1$

$$(-1)^r M_r > \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{8}M + O(\ln \tau) \right) = \frac{1}{4\pi} 0.04\sqrt{k} + O(\ln \ln \ln T) > \frac{\varepsilon^{5/4}}{1000} \left(\frac{\ln T}{\ln \ln T} \right)^{1/3}.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. При $t \rightarrow +\infty$

$$S(t) = \Omega_{\pm} \left(\sqrt[3]{\frac{\ln t}{\ln \ln t}} \right).$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $T \geq T_0 > 0$, $\ln T < H \leq T$. Если гипотеза Римана верна, то справедливы неравенства:

$$\sup_{T-H \leq t \leq T+2H} (\pm S(t)) \geq 10^{-3} \sqrt{\frac{\ln T}{\ln \ln T}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$k = \left\lfloor \frac{1}{7} \frac{\ln H}{\ln \ln H} \right\rfloor, \quad \tau = 2 \ln \ln H.$$

Тогда выполняются неравенства

$$\begin{aligned} 2k \ln k &< 2 \left(\frac{1}{7} \frac{\ln H}{\ln \ln H} + 1 \right) \ln \ln H < (\ln H)^{4/3} = e^{2\tau/3}, \\ e^{3k\tau} &< \exp \left(6 \ln \ln H \left(\frac{1}{7} \frac{\ln H}{\ln \ln H} + 1 \right) \right) = H^{6/7} (\ln H)^6 \end{aligned}$$

и, как следствие, оценки интегралов I_k и J_k леммы 3:

$$\begin{aligned} I_k &> (0.0025k)^k H - H^{6/7} (\ln H)^6 > (0.04\sqrt{k})^{2k} H, \\ |J_k| &< e^{3k\tau} e^{1.5\tau} < H^{6/7} (\ln H)^9 < 0.5(0.04\sqrt{k})^{2k+1} H. \end{aligned}$$

По следствию из леммы 1, на отрезке $T \leq t \leq T+H$ найдутся такие точки t_0 и t_1 , что $W(t_0) \geq M/8$, $W(t_1) \leq -M/8$, где $M = 0.04\sqrt{k}$. Согласно лемме 2, эти неравенства могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} j_0 &= \int_{-0.5H\tau}^{0.5H\tau} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 S \left(t_0 + \frac{2u}{\tau} \right) du \geq \frac{1}{8} M + O \left(\ln \tau + \frac{\ln t_0}{H\tau} \right) = \frac{1}{8} M + O(\ln \tau), \\ j_1 &= \int_{-0.5H\tau}^{0.5H\tau} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 S \left(t_1 + \frac{2u}{\tau} \right) du \leq \frac{1}{8} M + O \left(\ln \tau + \frac{\ln t_1}{H\tau} \right) = -\frac{1}{8} M + O(\ln \tau). \end{aligned}$$

Обозначая верхнюю и нижнюю грани функции $S(t)$ на отрезке $T-H \leq t \leq T+2H$ символами M_0 и M_1 и пользуясь тем, что $j_0 < \pi M_0/2$, $j_1 > -\pi M_1/2$ (см. доказательство теоремы 5), заключаем, что

$$\begin{aligned} (-1)^r M_r &> \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{8} M + O(\ln \tau) \right) \\ &= \frac{0.04}{4\pi} \sqrt{\frac{\ln H}{7 \ln \ln H}} \left(1 + O \left(\sqrt{\frac{\ln \ln H}{\ln H}} \ln \ln \ln H \right) \right) > 10^{-3} \sqrt{\frac{\ln H}{\ln \ln H}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если гипотеза Римана верна, то при $t \rightarrow +\infty$

$$S(t) = \Omega_{\pm} \left(\sqrt{\frac{\ln t}{\ln \ln t}} \right).$$

Замечания

Различные способы доказательства неравенств теоремы 1 были предложены фон Мангольдтом в 1905 г. (см. [17]), Р. Бэклундом [18] в 1914 г. и Дж. Литтлвудом [29] в 1924 г. Теорема 2 также принадлежит Дж. Литтлвуду [29].

В настоящее время наилучшая оценка величины $|S(t)|$, при условии, что справедлива гипотеза Римана, принадлежит К. Рамачандре и А. Санкаранарайанану [32]:

$$\pi|S(t)| < (3.51588780218300\dots + \varepsilon) \frac{\ln t}{\ln \ln t}, \quad t > t_0(\varepsilon) > 0.$$

Теоремы 3 и 4 доказаны Г. Крамером [33] и Дж. Литтлвудом [29]. В основу изложения доказательств этих утверждений положены §§ 5 и 6 гл. 5 книги Е. Титчмарша [20].

Первые омега-теоремы для функции $S(t)$ были получены в 1913 г. Г. Бором и Э. Ландау [17] и в 1925 г. Дж. Литтлвудом [34]. Используемые в главе III методы доказательства омега-теорем были разработаны А. Сельбергом [27] и уточнены К. Тсангом [30]. В частности, А. Сельбергом получены соотношения:

$$S(t) = \Omega_{\pm}((\ln t)^{1/3}(\ln \ln t)^{-7/3}).$$

Теоремы 5 и 6 принадлежат К. Тсангу [30] и Х. Монгмери [35] соответственно. Большие значения $S(t)$ на коротком промежутке $(T, T + H]$, $H > \ln T$, изучаются в [36].

Отметим, что в ходе больших вычислений, проведенных А. Одлыжко, не было обнаружено ни одного значения t , для которого $|S(t)| > 3$ (см. [37; с. 27]).

Медленный рост функций $\ln t$, $\ln \ln t$ в области, где в настоящее время могут быть вычислены значения $S(t)$ ($|t| \leq 10^{23}$), не дает возможности “угадать” правильный порядок величин $\sup_{t \leq T}(\pm S(t))$. Согласно гипотезе Х. Монгмери [35],

$$S(t) = O\left(\sqrt{\frac{\ln t}{\ln \ln t}}\right).$$

В то же время А. Одлыжко в [37] высказал предположение, что

$$S(t) = \Omega(\sqrt{\ln t}),$$

но вместе с этим

$$S(t) = O((\ln t)^{1/2+o(1)}).$$

В пользу этой гипотезы свидетельствует и условная теорема Я. Мозера [38], согласно которой на всяком интервале $(T, 2T)$ существует не менее $cT \ln T$ промежутков (γ, γ') таких, что

$$|S(t)| < c_1(\ln T)^{1/2}(\ln \ln T)^{2/3}, \quad \gamma < t < \gamma'.$$

Для доказательства этого утверждения используется недоказанный в настоящее время факт: если $n(T)$ – число пар соседних ординат γ, γ' нулей дзета-функции, $T < \gamma, \gamma' \leq 2T$, расстояние между которыми не превосходит $(\ln T)^{-2}$, то $n(T) = o(T \ln T)$.

Соотношение

$$S_1(t) = \Omega_{\pm}((\ln t)^{1/2-\varepsilon})$$

было доказано с использованием гипотезы Римана Дж. Литтлвудом [29] в 1924 г. Этот результат можно уточнить и заменить в приведенном соотношении множитель $(\ln t)^{-\varepsilon}$ на $(\ln \ln t)^{-3/2}$.

Первые безусловные омега-теоремы для функции $S_1(t)$ были получены А. Сельбергом [27]:

$$S_1(t) = \Omega_-(\ln t)^{1/3}(\ln \ln t)^{-10/3}, \quad S_1(t) = \Omega_+(\ln t)^{1/2}(\ln \ln t)^{-4}.$$

В настоящее время наиболее точными безусловными результатами являются теоремы Тсанга [25], [39]:

$$S_1(t) = \Omega_-(\ln t)^{1/3}(\ln \ln t)^{-4/3}, \quad S_1(t) = \Omega_+(\ln t)^{1/2}(\ln \ln t)^{-3/2}.$$

Таким образом, отказ от использования гипотезы Римана не приводит к потере точности Ω_+ -теоремы для $S_1(t)$.

Омега-теоремы для разности $S(t+h) - S(t)$ рассмотрены в [30], [35].

Приложение

ЛЕММА 1 (функциональное уравнение $\zeta(s)$). *Функция $\xi(s)$, определяемая равенством*

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

является целой и удовлетворяет соотношениям

$$\xi(s) = 1 + s(s-1) \int_1^{+\infty} (x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2})\omega(x) dx = \xi(1-s) = \bar{\xi}(1-\bar{s}),$$

где

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi x n^2}.$$

Доказательство см. в [28; с. 17–20].

ЛЕММА 2 (симметрия нулей $\zeta(s)$). *Функция $\xi(s)$ представляется в виде бесконечного произведения*

$$\xi(s) = e^{Bs} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{s/\varrho},$$

где B – постоянная. Числа ϱ , являющиеся нулями $\xi(s)$, лежат в полосе $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$ и расположены симметрично относительно критической прямой и вещественной оси. Величины ϱ являются нулями дзета-функции Римана $\zeta(s)$.

Доказательство см. в [28; с. 29–30].

ЛЕММА 3 (принцип аргумента). Пусть функция $f(z)$ аналитична внутри области D всюду, кроме конечного числа полюсов, непрерывна на границе C этой области и не обращается на C в нуль. Пусть, кроме того, $f'(z)$ непрерывна на C . Тогда разность между числом нулей и числом полюсов этой функции внутри D равна числу оборотов вектора w при обходе кривой Γ , соответствующей C при отображении $w = f(z)$, или, что то же самое, приращению аргумента $f(z)$ при изменении z вдоль контура C , деленному на 2π .

Доказательство см. в [40; с. 87–88].

ЛЕММА 4 (формула Стирлинга). При $0 < \delta < \pi$ и $|\arg s| \leq \pi - \delta$ имеет место формула:

$$\ln \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \ln \sqrt{2\pi} + \int_0^{+\infty} \frac{\varrho(u) du}{u + s}, \quad \text{где } \varrho(u) = 1/2 - \{u\}.$$

Доказательство см. в [41; с. 54].

ЛЕММА 5 (теорема Литтлвуда). Пусть C – контур прямоугольника, ограниченного прямыми $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$, $y = y_2$, где $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$. Пусть $f(z)$ аналитична, не обращается в нуль на C и мероморфна внутри C . Положим $F(z) = \ln f(z)$, $z = x + iy$, определив логарифм следующим образом: начинаем с какой-либо непрерывной ветви $\ln f(z)$ на прямой $x = x_2$ и получаем значение $\ln f(x + iy)$ из $\ln f(x_2 + iy)$ путем непрерывного изменения вдоль прямой $y = \text{const}$ до тех пор, пока не окажется $f(x + iy) = 0$ или $f(x + iy) = \infty$. Таким образом, на конечном множестве отрезков, параллельных оси x , функция $\ln f(z)$ может быть не определена. Тогда имеет место соотношение:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \nu(x) dx &= \int_{y_1}^{y_2} (\ln |f(x_1 + it)| - \ln |f(x_2 + it)|) dt \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} (\arg f(\sigma + iy_2) - \arg f(\sigma + iy_1)) d\sigma, \end{aligned}$$

где $\nu(x)$ – разность между числом нулей и числом полюсов $f(z)$ в области $x < \text{Re } z \leq x_2$, $y_1 < \text{Im } z \leq y_2$.

Доказательство см. в [42; с. 456].

ЛЕММА 6 (формула Иенсена). Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| \leq R$ и не обращается в нуль в центре и на границе этого круга. Тогда имеет место формула

$$\int_0^R \frac{n(r)}{r} dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\varphi})| d\varphi - \ln |f(0)|,$$

где $n(r)$ – число нулей $f(z)$ в круге $|z| \leq r$.

Доказательство см. в [43; с. 339].

ЛЕММА 7 (теорема Адамара о трех кругах). Пусть $0 < r_1 < r_2$ и функция $f(z)$ однозначна и аналитична в круге $|z| \leq r_2$. Если

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

то при любом r , $r_1 \leq r \leq r_2$, имеет место оценка

$$M(r) \leq (M(r_1))^{\frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}} (M(r_2))^{\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}}.$$

Доказательство см. в [43; с. 379–380].

ЛЕММА 8 (неравенство Гёльдера). Пусть $u_\nu, v_\nu \geq 0$ для $\nu = 1, 2, \dots, N$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Тогда

$$\sum_{\nu=1}^N u_\nu v_\nu \leq \left(\sum_{\nu=1}^N u_\nu^{1/\alpha} \right)^\alpha \left(\sum_{\nu=1}^N v_\nu^{1/\beta} \right)^\beta.$$

СЛЕДСТВИЯ.

- 1) $\left(\sum_{\nu=1}^N u_\nu v_\nu \right)^2 \leq \left(\sum_{\nu=1}^N u_\nu^2 \right) \left(\sum_{\nu=1}^N v_\nu^2 \right)$ (неравенство Коши);
- 2) $\left(\sum_{\nu=1}^N u_\nu v_\nu \right)^k \leq \left(\sum_{\nu=1}^N u_\nu \right)^{k-1} \left(\sum_{\nu=1}^N u_\nu v_\nu^k \right);$
- 3) $\left(\sum_{\nu=1}^N u_\nu \right)^k \leq N^{k-1} \sum_{\nu=1}^N u_\nu^k.$

Доказательство см. в [41; с. 85].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Карацуба. Дзета-функция Римана и ее нули // УМН. 1985. Т. 40. № 5. С. 19–70.
- [2] А. А. Карацуба. Распределение простых чисел // УМН. 1990. Т. 45. № 5. С. 81–140.
- [3] A. Fujii. On the zeros of Dirichlet L -function. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 196. P. 225–235.
- [4] A. Fujii. On the distribution of the zeros of the Riemann zeta function in short intervals // Bull. Amer. Math. Soc. 1975. V. 81. P. 139–142.
- [5] A. Fujii. Gram's law for the zeta zeros and the eigenvalues of Gaussian unitary ensembles // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 1987. V. 63. № 10. P. 392–395.
- [6] A. Fujii. On the distribution of the zeros of the Riemann zeta function in short intervals // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 1990. V. 66. № 3. P. 75–79.
- [7] A. Fujii. On the gaps between the consecutive zeros of the Riemann zeta function // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 1990. V. 66. № 4. P. 97–100.
- [8] A. Ghosh. On Riemann's zeta-function – sign changes of $S(T)$ // Recent Progress in Analytic Number Theory. V. 1. New York: Academic Press, 1981. P. 25–46.
- [9] A. Ghosh. On the Riemann zeta function – mean value theorems and the distribution of $|S(T)|$ // J. Number Theory. 1983. V. 17. № 1. P. 93–102.

- [10] Y. Mozer. The Riemann hypothesis and asymmetry in the behaviour of positive and negative values of the function $S_1(t)$ // Acta Math. Univ. Comenian. 1986. V. 48/49. P. 63–80.
- [11] J. H. Mueller. On the Riemann zeta function $\zeta(s)$ – gaps between sign changes of $S(t)$ // Mathematika. 1982. V. 29. № 2. P. 264–269.
- [12] A. Selberg. On the remainder in the formula for $N(T)$, the number of zeros of $\zeta(s)$ in the strip $0 < t < T$ // Avh. Norske Vid. Akad. Oslo. I. 1944. № 1. P. 1–27.
- [13] A. Selberg. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series // Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989). Salerno: Univ. di Salerno, 1992. P. 365–387.
- [14] E. C. Titchmarsh. On the remainder in the formula for $N(T)$, the number of zeros of $\zeta(s)$ in the strip $0 < t < T$ // Proc. London Math. Soc. (2). 1928. Part 6. V. 27. P. 449–458.
- [15] K.-M. Tsang. An improved Ω_+ theorem for $S_1(t)$ // Quart. J. Math. Oxford. Ser. (2). 1991. V. 42. № 168. P. 501–513.
- [16] Б. Риман. О числе простых чисел, не превышающих данной величины // Б. Риман. Сочинения. М.: ОГИЗ, 1948. С. 216–224.
- [17] H. Bohr, E. Landau. Beiträge zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion // Math. Ann. 1913. V. 74. № 1. P. 3–30.
- [18] R.-J. Backlund. Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Comptes rendus. Acad. Sci Paris. 1914. V. 158. P. 1979–1981.
- [19] E. C. Titchmarsh. The zeros of the Riemann zeta-function // Proc. Roy. Soc. London (A). 1935. V. 151. P. 234–255.
- [20] Е. К. Титчмарш. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.
- [21] А. А. Карацуба. Плотностная теорема и поведение аргумента дзета-функции Римана // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 448–449.
- [22] А. А. Карацуба. О функции $S(t)$ // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 5. С. 27–56.
- [23] М. А. Королёв. О числе перемен знака функции $S(t)$ на коротком промежутке // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 4. С. 446–447.
- [24] М. А. Королёв. Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой // Труды МИАН. 2002. Т. 239. С. 215–238.
- [25] М. А. Королёв. О поведении функции $S(t)$ на коротких промежутках // Докл. РАН. 2003. № 5. С. 588–589.
- [26] М. А. Королёв. Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 2. С. 21–60.
- [27] A. Selberg. Contributions to the theory of the Riemann zeta-function // Arch. Math. Naturvid. 1946. V. 48. № 5. P. 89–155.
- [28] С. М. Воронин, А. А. Карацуба. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
- [29] J. E. Littlewood. On the zeros of the Riemann zeta-function // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1924. V. 22. P. 295–318.
- [30] K.-M. Tsang. Some Ω -theorems for the Riemann zeta-function // Acta Arith. 1986. V. 46. № 4. P. 369–395.
- [31] D. A. Goldston. On the function $S(T)$ in the theory of the Riemann zeta-function // J. Number Theory. 1987. V. 27. № 2. P. 149–177.
- [32] K. Ramachandra, A. Sankaranarayanan. On some theorems of Littlewood and Selberg, I // J. Number Theory. 1993. V. 44. № 3. P. 281–291.
- [33] H. Cramér. Über die Nullstellen der Zetafunktion // Math. Z. 1918. V. 2. P. 237–241.
- [34] J. E. Littlewood. On the Riemann zeta-function // Proc. London Math. Soc. 1925. V. 24. № 2. P. 175–201.
- [35] H. L. Montgomery. Extreme values of the Riemann zeta function // Comment. Math. Helv. 1977. V. 52. № 4. P. 511–518.
- [36] М. А. Королёв. О больших значениях функции $S(t)$ на коротких промежутках // Изв. РАН. 2005. Т. 69. № 1. С. 115–124.
- [37] A. M. Odlyzko. The 10^{20} -th zero of the Riemann zeta function and 70 million of its neighbors // Preprint. Murray Hill, NJ: AT&T Bell Laboratories, 1987.

- [38] Я. Мозер. О функции $S(t)$ в теории дзета-функции Римана // Acta Arith. 1976. V. 30. № 2. P. 145–158.
- [39] K.-M. Tsang. The large values of the Riemann zeta-function // Mathematika. 1993. V. 40. № 2. P. 203–214.
- [40] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.
- [41] А. А. Карацуба. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
- [42] К. Прахар. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.
- [43] Г. Полия, Г. Сегё. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1. М.: Наука, 1978.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: karatsuba@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
18.01.2005