Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Муранов, Д. Реповш, Сферические расслоения и L -группы, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 2, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm143>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:07:21

СФЕРИЧЕСКИЕ РАССЛОЕНИЯ И L -ГРУППЫ

Ю. В. Муранов, Д. Реповш

Пусть $X \subset Y$ – подмногообразие коразмерности q в n -мерном многообразии Y , U – трубчатая окрестность X в Y . Определены группы препятствий к расщеплению $LS_{n-q}(F)$ и группы препятствий к перестройкам по паре многообразий $LP_{n-q}(F)$, функториально зависящие от универсально-отталкивающего квадрата фундаментальных групп с ориентацией

$$(1) \quad F = \begin{pmatrix} \pi_1(\partial U) & \longrightarrow & \pi_1(Y \setminus X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X) & \longrightarrow & \pi_1(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ B^\xi & \xrightarrow{g} & D \end{pmatrix},$$

и $n - q \bmod 4$ ([1], [2]).

Группы $LS_*(F)$ и $LP_*(F)$ тесно связаны посредством диаграмм точных последовательностей с группами Уолла групп из квадрата F (см. [1], [2]). Если горизонтальные отображения в квадрате F являются изоморфизмами, группы $LS_*(F)$ обозначаются через $LN_*(A \rightarrow B)$. В случае, когда X является односторонним подмногообразием в многообразии Y ($q = 1$) и горизонтальные отображения в квадрате F – эпиморфизмы, существует дополнительно целый ряд диаграмм точных последовательностей, в которые входят группы $LS_*(F)$ и $LP_*(F)$ (см. [3]–[5]).

В данной работе мы приводим аналогичные результаты для произвольной коразмерности q при некоторых естественных ограничениях на квадрат F . Поскольку для $q \geq 3$ задача перестройки внутри многообразия совпадает с задачей абстрактной перестройки ([1], [2]), результаты становятся тривиальными для $q \geq 3$. Подчеркнем, что в случае $q = 1$ полученные результаты имеют место как для двусторонних, так и для односторонних подмногообразий.

Отображение i в квадрате (1) является отображением фундаментальных групп из точной последовательности сферического расслоения $S^{q-1} \rightarrow \partial U \rightarrow X$. Согласно [1], имеет место точная последовательность

$$(2) \quad \rightarrow L_{n+1}(B^\xi) \rightarrow L_{n+q+1}(A \rightarrow B) \rightarrow LN_n(A \rightarrow B) \rightarrow L_n(B^\xi) \rightarrow .$$

Предположим, что пара отображений (f, g) в квадрате (1) индуцируется некоторым морфизмом сферических расслоений со слоем S^{q-1} , и отображение g согласовано с ориентацией базисных пространств. Такую диаграмму мы будем называть *геометрической* аналогично работам [3]–[6]. В частности, отображение j мы можем рассматривать как отображение фундаментальных групп из точной последовательности расслоения, аналогично i . Обозначим через Ψ универсальный отталкивающий квадрат, в котором вертикальные столбцы совпадают с левым столбцом квадрата F , а через Φ – аналогичный квадрат для правого столбца F . Левую группу в квадрате Ψ мы обозначаем B^ξ , а правую – B , поскольку ориентация этих групп может быть различна (см. [1], [2]). Так, например, она всегда различна для случая одностороннего подмногообразия коразмерности 1. Аналогично, мы обозначим ориентации группы D в квадрате Φ . Для квадрата Φ имеет место точная последовательность аналогичная (2). Определены естественные отображения универсальных отталкивающих квадратов групп с ориентацией

$$\begin{pmatrix} A & \longrightarrow & A \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ B^\xi & \longrightarrow & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ B^\xi & \xrightarrow{g} & D \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} C & \longrightarrow & C \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ D^\xi & \longrightarrow & D \end{pmatrix},$$

индуцирующие отображения соответствующих LS_* - и LP_* -групп.

Существуют симплициальные Ω -спектры, гомотопические группы которых изоморфны соответствующим L , LN -группам (см. [6], [7]). Отображение $L_{n+1}(B^\xi) \rightarrow L_{n+3}(A \rightarrow B)$ из точной последовательности (2) реализуется на уровне спектров (см. [1]). Естественное отображение

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01166а) и при поддержке гранта № 96-15-96841 Президента Российской Федерации.

Работа второго автора выполнена при поддержке Министерства науки и техники Республика Словения (грант № J1-0885-0101-98).

относительных групп также реализуется на уровне спектров (см. [6]). Композиция дает отображение спектров $s: \Omega\mathbb{L}(B^\xi) \rightarrow \Omega^{q+1}\mathbb{L}(C \rightarrow D)$, гомотопический кослой которого мы обозначим через $\mathbb{LS}(F)$. Спектр $\mathbb{LP}(F)$ определяется аналогично как гомотопический кослой отображения $p: \Omega\mathbb{L}(B^\xi) \rightarrow \Omega^q\mathbb{L}(C)$. Для определенных таким образом спектров имеют место изоморфизмы $\pi_n(\mathbb{LS}(F)) = LS_n(F)$, $\pi_n(\mathbb{LP}(F)) = LP_n(F)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть F – геометрическая диаграмма групп для пары многообразий коразмерности $q = 1, 2$. Имеют место следующие универсальные квадраты спектров:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega\mathbb{L}(D^\xi) & \longrightarrow & \Omega^{q+1}\mathbb{L}(C \rightarrow D) & \xrightarrow{\Omega\mathbb{LN}^{\text{rel}}} & \mathbb{LN}(A \rightarrow B) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \Omega\mathbb{L}(B^\xi \rightarrow D^\xi) & \longrightarrow & \mathbb{LS}(F) & \longrightarrow & \mathbb{LS}(F), \end{array}$$

где через $\mathbb{LN}^{\text{rel}}$ обозначен гомотопический кослой отображения $\mathbb{LN}(A \rightarrow B) \rightarrow \mathbb{LN}(C \rightarrow D)$.

Все отображения, входящие в квадраты, мы можем рассматривать как расслоения (либо корасслоения). Гомотопические длинные точные последовательности этих расслоений вместе со свойством универсальности дают коммутативные диаграммы точных последовательностей, аналогичные [3]. Приведем наиболее интересные из них:

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 1 имеют место точные последовательности:

$$\begin{aligned} &\rightarrow L_{n+1}(B^\xi \rightarrow D^\xi) \rightarrow LS_n(F) \rightarrow LN_n(C \rightarrow D) \rightarrow, \\ &\rightarrow LN_{n+1}^{\text{rel}} \rightarrow L_{n+1}(B^\xi \rightarrow D^\xi) \rightarrow L_{n+q+1}(F) \rightarrow. \end{aligned}$$

Заметим, что для групп LP_* в любой коразмерности также имеют место результаты аналогичные [5]. Приведем здесь лишь полученные таким образом точные последовательности.

ТЕОРЕМА 2. В условиях теоремы 1 имеют место точные последовательности:

$$\begin{aligned} &\rightarrow LP_n(\Psi) \rightarrow LP_n(F) \rightarrow L_{n+q}(A \rightarrow C) \rightarrow, \\ &\rightarrow L_{n+1}(B^\xi \rightarrow D^\xi) \rightarrow LP_n(F) \rightarrow LP_n(\Phi) \rightarrow, \\ &\rightarrow L_{n+q+1}(A \rightarrow C) \rightarrow LP_{n+1}^{\text{rel}} \rightarrow L_{n+1}(B^\xi \rightarrow D^\xi) \rightarrow, \end{aligned}$$

где LP_*^{rel} – относительные группы, входящие в точную последовательность

$$\rightarrow LP_*(\Psi) \rightarrow LP_*(\Phi) \rightarrow LP_*^{\text{rel}} \rightarrow.$$

В случае $q \geq 3$ вертикальные отображения в квадрате F становятся изоморфизмами и все относительные группы Уолла тривиальны. Поэтому соответствующие точные последовательности вырождаются.

Отметим также, что приведенные рассуждения позволяют определить группы LS_* и LP_* для произвольного морфизма S^q -расслоений. Так определенные группы будут входить не только в диаграммы групп, построенные Уоллом (см. [1]), а также и в диаграммы групп, которые получены в данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wall C. T. C. Surgery on Compact Manifolds. London: Academic Press, 1970. [2] Ranicki A. A. Exact Sequences in the Algebraic Theory of Surgery. Princeton: Princeton Univ. Press, 1981. [3] Муранов Ю. В. // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 6. С. 107–132. [4] Ахметьев П. М., Муранов Ю. В. // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 2. С. 163–175. [5] Муранов Ю. В., Реповш Д. // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 3. С. 127–142. [6] Hambleton I., Ranicki A., Taylor L. // J. Pure Appl. Algebra. 1987. V. 47. P. 131–154. [7] Хэмблтон И., Харшиладзе А. Ф. // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 9. С. 3–14.

Витебский государственный
технологический университет, Белоруссия;
University of Ljubljana, Slovenija
E-mail: mur@vstu.unibel.by dusan.repovs@uni-lj.si

Принято редколлегией
26.01.1999