Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Штерн, Почти периодические функции и представления в локально выпуклых пространствах, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 3, 97–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1430>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:18:25

УДК 517.986.63+517.986.4

Памяти Бориса Моисеевича Левитана (1914–2004)

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. И. ШТЕРН

Рассматриваются свойства различных классов почти периодических функций со значениями в локально выпуклых пространствах и почти периодических представлений в локально выпуклых пространствах. Хорошо известный критерий почти периодичности слабо почти периодических представлений групп в банаховых пространствах (в терминах скалярной почти периодичности) распространяется на случай слабо непрерывных слабо почти периодических представлений в бочечных пространствах, в которых слабо замкнутые выпуклые оболочки слабо компактных множеств слабо компактны. Указаны приложения этого результата и дан обзор современного состояния ряда других классических задач теории почти периодических функций (применительно к почти периодическим функциям со значениями в локально выпуклых пространствах) и современных направлений исследований, связанных с почти периодическими функциями на группах и конечномерными унитарными представлениями групп. В частности, рассматриваются задачи о разложении слабо почти периодических представлений и о характеристике различных классов почти периодических функций (включая критерии почти периодичности), вопросы существования среднего значения, условия счетности спектра скалярно почти периодических функций, теоремы об интеграле и о разностях почти периодических функций, а также другие связи между сильной, скалярной и слабой почти периодичностью для функций со значениями в локально выпуклых пространствах.

Библиография: 237 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение. Основные определения. Обозначения и терминология	101
§ 2. Основные факты теории де Лю–Гликсберга	105
§ 3. Аналог разложения де Лю–Гликсберга для слабо почти периодических представлений в бочечных локально выпуклых пространствах	109
§ 4. Связь между почти периодичностью, слабой почти периодичностью и скалярной почти периодичностью	116
§ 5. Родственные результаты и приложения	119
5.1. Критерии почти периодичности и слабой почти периодичности	119
5.2. Среднее на слабо почти периодических функциях	120
5.3. Условия счетности спектра скалярно почти периодической функции ...	121
5.4. Слабая почти периодичность функций и представлений	123
5.5. Почти периодичность функций с почти периодическими разностями и почти периодичность неопределенного интеграла	127

§ 6. Примеры	128
§ 7. Другие результаты, связанные с классическими задачами теории почти периодических функций	129
7.1. Непосредственные следствия теоремы разложения	129
7.2. Дополнительные сведения о почти периодических функциях и представ- лениях	130
7.3. Свойства почти периодических функций: существование среднего значе- ния, спектр, теоремы о разностях и об интеграле, условия компактности, теорема Дини, свойства диссипативных функций	130
7.4. Обобщения почти периодических функций и топологическая динамика	135
§ 8. Другие направления исследований, связанные с почти периодичес- кими функциями	143
8.1. Компактификация Бора, [MAP] группы и [FIR] группы	143
8.2. Геометрия групповых алгебр. Свойства Радона–Никодима, Данфорда– Петтиса, Асплунда, Шура	144
8.3. Свойства слабо почти периодических компактификаций групп и полу- групп	147
§ 9. Близкие задачи и приложения	150
9.1. Геометрия банаховых и локально выпуклых пространств	150
9.2. Приложения слабо почти периодических функций и представлений к те- ории чисел	151
9.3. Приложения к гармоническому анализу	152
9.4. Приложения к устойчивости представлений абелевых полугрупп и к спек- тральной теории	154
9.5. Теоремы о неподвижной точке и инвариантные подпространства	155
§ 10. Заключительные замечания	155
Приложения	156
Приложение 1. Полнота по фон Нейману и свойство Крейна	156
Приложение 2. Интегрирование операторных функций	157
Список литературы	159

В статье Евгении Александровны Бредихиной “Почти периодическая функция” в четвертом томе “Математической энциклопедии” (вышедшем в 1984 г., почти через 10 лет после смерти автора) почти периодической функцией называется “функция, которая может быть представлена обобщенным рядом Фурье”. Конечно, в этой дефиниции можно увидеть и предпочтение определения Бохнера [41] определению Бора [46], но главное – решительное включение предмета в круг явлений, связанных с унитарными представлениями групп и теорией аппроксимации. С этой точки зрения уже теория неба по Евдоксу выглядит предшественницей частных сумм рядов Фурье (ведь именно Евдоксу принадлежит первое инфинитное определение равенства отношений отрезков, во многом похожее на сечение Дедекинда, так что есть на свете вещи более тонкие, чем движение планет, которым, по Евдоксу, и трех-четырех гармонических слагаемых довольно). Как и в свое время правильные многогранники (в “Тимее” Платона, см. [197]), так и почти периодические функции Бора, едва родившись, оказались полезными в физике (при формировании условия рекуррентности в замкнутых термодинамических системах у Эрэнфеста, см. [180]). Тем самым темп развития

понятий в этой области невысок, да и не все можно гармонизировать. Но, хотя и в новейшее время основное понятие почти периодической функции формировалось медленно (история почти периодических функций отражена во многих книгах и статьях, см., например, [43], [140], [141], [149], [189], [219]), успех этого понятия грандиозен – публикации, посвященные почти периодическим объектам (прежде всего – функциям и представлениям групп и полугрупп), а также явно использующие сведения о таких объектах, составляют многие тысячи статей и книг.

Одной из наиболее часто цитируемых в этом круге является книга Б. М. Левитана и В. В. Жикова “Почти периодические функции и дифференциальные уравнения”, вышедшая в 1978 г. [141]. Ее роль была в свое время чрезвычайно велика, поскольку книга подвела итоги большого периода развития и способствовала уяснению связей между почти периодическими функциями и скалярно почти периодическими функциями со значениями в банаховом пространстве с общими вопросами линейного анализа. С тех пор прошло более четверти века, и теория почти периодических функций и представлений развивалась в это время не менее успешно и применялась в решении многообразных задач (прежде всего – в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе – в абстрактных пространствах, и дифференциальных уравнений с частными производными; оба эти вида приложений заслуживают отдельного обсуждения, но применения почти периодических функций гораздо шире, – см., например, обзоры [99], [130], [196], [205]). Описание материала, добытого в каждом из этих направлений, было бы весьма полезным (ведь в [130] авторам пришлось приводить список нужных им фактов теории почти периодических функций – не нашлось удобных ссылок!), но и гораздо более ограниченная задача – изложить современное состояние запаса основных инструментов собственно теории почти периодических функций – требует масштабов толстой книги, а не журнальной статьи, и поэтому тема обзора требует жесткого ограничения.

Одним из мощных направлений современной теории почти периодических функций является изучение почти периодических функций со значениями в векторных пространствах, не обязательно нормированных, но, как правило, локально выпуклых. Как стало ясно уже в 50-е годы, эти вопросы связаны с задачами теории представлений (не только унитарных и не только конечномерных). Это направление имеет многообразные приложения, как традиционные – к теории дифференциальных уравнений, так и сравнительно новые – к теории аналитических или обобщенных аналитических функций и к теории чисел. Чтобы не дать приложениям поглотить большую часть текста, мы будем по возможности избегать ссылок на работы, посвященные приложениям почти периодических функций к дифференциальным уравнениям и аналитическим функциям, и сосредоточимся прежде всего на классических вопросах собственно теории применительно к почти периодическим функциям на группах с векторными значениями, включая характеристики различных классов почти периодических функций (в том числе – критерии почти периодичности), существование среднего значения, условия счетности спектра, теоремы об интеграле и о разностях и связь между сильной, скалярной и слабой почти периодичностью. Следует отметить, что, хотя решение этих задач в частном случае функций со значениями в банаховых пространствах известно специалистам, но и оно недоступно большинству читателей из-за редкости источников и неполной ясности текстов. Кроме того, оказывается, что для рас-

пространения известных результатов о почти периодических функциях и слабо почти периодических функциях со значениями в банаховых пространствах и о соответствующих представлениях в банаховых пространствах на случай функций со значениями в локально выпуклых пространствах и соответствующих представлений существенно¹, чтобы пространство было бочечным (или по крайней мере пространством Макки [203]) и удовлетворяло либо условию полноты, введенному фон Нейманом в 1935 г. либо, в задачах о слабо почти периодических функциях, условию полноты, явным образом введенному Р. Муром в 1968 г. и по существу связанному с известной теоремой Крейна о слабой компактности замкнутой оболочки слабо компактного множества в банаховом пространстве (оба эти условия, вообще говоря, менее ограничительны, чем часто используемое условие квазиполноты), в то время как за пределами этих условий имеют место любопытные патологии, что можно показать на примерах весьма общего характера. В качестве вспомогательных средств изложения используется, в частности, теория де Лю–Гликсберга компактных полутопологических полугрупп и их представлений (основные факты этой теории напоминаются, поскольку изложения этого материала на русском языке недостаточно полны и недостаточно надежны) и связь между условиями слабой и сильной непрерывности представлений некоторых топологических групп и полугрупп. Эта часть изложения во многом основана на работах Арендта, Басита, Баскакова, Гюнцлера, Чжана, Жикова, Кадеца, Левитана, де Лю и Любича и в некоторой степени унифицирует собранный в этих работах материал. С другой стороны, обзор содержит информацию о роли теории почти периодических и особенно слабо почти периодических функций в теории представлений групп и полугрупп и гармоническом анализе на этих объектах, включая свойства простейших компактификаций групп и полугрупп. Здесь использованы достижения Бордбара, Гликсберга, Кромбэ, Э. Лау, Мегрелишвили, Милна, Пима, Чоу и ряда других авторов. Теоремы, помеченные буквами, – цитаты, а нумерованные теоремы являются новыми утверждениями.

Изложение ведется следующим образом. В §1 изложены основные определения, список которых в дальнейшем придется постоянно пополнять, и приведены необходимые сведения из теории локально выпуклых пространств. В §2 напоминаются важнейшие факты общей теории компактных полутопологических полугрупп и их представлений. В §3 они используются для построения аналога разложения де Лю–Гликсберга для слабо почти периодических представлений в бочечных пространствах со свойством Крейна. В §4 полученное разложение применяется в установлении условий почти периодичности одновременно слабо и скалярно почти периодических представлений. В §5 указаны приложения полученных результатов к другим фундаментальным вопросам теории почти периодических функций с векторными значениями, включая условия счетности спектра, теоремы об интеграле и о разностях. В §6 разобраны некоторые примеры. В §7 приведены результаты, связанные с классическими задачами теории почти периодических функций, а в §8 – обзор других направлений исследования почти периодических функций и почти периодических представлений групп.

¹Но не необходимо. Используя технику l^∞ -бочечных пространств и некоторые другие ослабления условия бочечности, можно существенно расширить запас примеров, в которых справедлива теорема разложения и ее следствия. Однако здесь мы не стремимся к достижению наилучших возможных результатов, ограничиваясь тем, что может быть получено с помощью общеизвестных приемов. Как мы надеемся, это позволит сосредоточить внимание читателя не на трудностях анализа, а на взаимодействии основных идей.

Некоторые смежные задачи и приложения обсуждаются в § 9. Заключительные замечания высказаны в § 10. В приложениях обсуждаются условия полноты локально выпуклых пространств, используемые в работе, и напоминаются свойства “слабого интеграла” от векторных и операторных функций в локально выпуклых пространствах.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Э. Гранирера, Г. Гюнцлера и Э. Т.-М. Лау за любезно предоставленные оттиски их работ, П. Милса за электронную версию одной из его публикаций и доктора А. Хотцеля за помощь в подготовке материалов статьи.

§ 1. Введение. Основные определения. Обозначения и терминология

По всем вопросам, касающимся топологических векторных пространств, мы отсылаем читателя к [195], если понятие, определение или факт не снабжены точной ссылкой. Как обычно, условимся, что символ $*$ означает переход к сопряженному пространству или оператору, $\sigma(E, F)$ означает слабую топологию на локально выпуклом пространстве E , порожденную двойственностью $\{E, F\}$ с локально выпуклым пространством F , а $\tau(E, F)$ означает топологию Макки на локально выпуклом пространстве E , порожденную двойственностью $\{E, F\}$. Мы также используем ссылки на [76], которые всегда явно указаны. Для ссылок по теории представлений групп мы используем книги [147] и [171], по теории инвариантных средних – [97] и [177], по общей топологии – [80] и по теории нормированных линейных пространств – [66].

Начнем с определения полутопологической полугруппы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Полутопологической полугруппой* называется полугруппа с единичным элементом, снабженная хаусдорфовой топологией, в которой умножение является раздельно непрерывным. Пусть S – полутопологическая полугруппа. Напомним, что *подполугруппой* в S называется такое непустое подмножество $M \subset S$, что $MM \subset M$, *левым (правым) идеалом* в S называется такое подмножество $M \subset S$, что $SM \subset M$ ($MS \subset M$), и M называется *двусторонним идеалом* в S , если M является одновременно левым и правым идеалом в S . Пересечение $K(S)$ всех двусторонних идеалов в S называется *ядром* S . Элемент $e \in S$ называется *идемпотентом* в S , если $ee = e$. Если $M \subset S$, обозначим через $\mathcal{E}(M)$ множество всех идемпотентов в S , принадлежащих M . Для множества всех минимальных левых (правых) идеалов в S мы используем символ $\mathcal{L}(S)$ ($\mathcal{R}(S)$). *Компактной полутопологической полугруппой* мы называем полугруппу с единицей и с раздельно непрерывным умножением, топологическое пространство которой компактно.

Пусть S – полутопологическая полугруппа, E – локально выпуклое пространство, а π – представление полугруппы S в E . Если явно не оговорено противное, в дальнейшем всегда предполагается, что представление π слабо непрерывно. Обозначим символом $CB(S)$ банахово пространство непрерывных *ограниченных* числовых функций на S в равномерной топологии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Как обычно, мы будем говорить, что вектор $x \in E$ *почти периодичен* (по Бохнеру) относительно представления π , если замыкание соответствующей орбиты $\mathcal{O}(x) = \{\pi(s)x \mid s \in S\}$ компактно в E (в исходной топологии пространства E). Далее, вектор $x \in E$ называется *слабо почти периодическим* (по Эберлейну) относительно представления π , если слабое замыкание орбиты $\mathcal{O}(x)$, $x \in E$, является

слабо компактным множеством в E . Представление π называется *почти периодическим* (*слабо почти периодическим*), если все векторы $x \in E$ почти периодичны (слабо почти периодичны). Представление π называется *скалярно почти периодическим*², если каждый “матричный элемент” $g \mapsto F(f(g))$, $g \in G$, где $F \in E^*$, является числовой функцией, почти периодической в смысле Бохнера. Представление π называется *скалярно слабо почти периодическим*, если каждый “матричный элемент” $g \mapsto F(f(g))$, $g \in G$, где $F \in E^*$, является числовой функцией, слабо почти периодической в смысле Эберлейна.

Пусть λ (ρ) – левое (правое) регулярное антипредставление (представление) группы G в пространстве $CB(G)$ ограниченных непрерывных функций на G , определенное левыми (правыми) сдвигами на $CB(G)$, т.е. формулами

$$\begin{aligned}\lambda(t)f(s) &= f(ts), & s, t \in S, & f \in CB(G), \\ \rho(t)f(s) &= f(st), & s, t \in G, & f \in CB(G).\end{aligned}\tag{1}$$

Числовая функция $f \in CB(S)$ называется *почти периодической* (по Бохнеру, ср. [141]), если f является *слабо почти периодическим* вектором относительно левого регулярного антипредставления (или, что равносильно, правого регулярного представления [97]) в пространстве $CB(S)$. Функция $f \in CB(S)$ называется *слабо почти периодической* (по Эберлейну, ср. [74]) если f является *слабо почти периодическим* вектором относительно левого регулярного антипредставления (или, что равносильно, правого регулярного представления [97]) в пространстве $CB(S)$.

Множество $WAP(S)$ всех слабо почти периодических функций, принадлежащих пространству $CB(S)$, является замкнутой S -инвариантной равномерной самосопряженной подалгеброй алгебры $CB(S)$, содержащей единичный элемент. Спектр S_w (пространство максимальных идеалов) коммутативной банаховой алгебры $WAP(S)$ является компактным топологическим пространством, снабженным естественным умножением, превращающим S_w в компактную полутопологическую полугруппу (см. определение 3 в § 2 ниже). Эта полугруппа играет ключевую роль в доказательстве следующего аналога знаменитой теоремы Гельфанда–Райкова (см., например, [147]): топологическая группа имеет достаточно много слабо непрерывных представлений изометрическими операторами в рефлексивных банаховых пространствах тогда и только тогда, когда эта топологическая группа допускает непрерывное вложение в компактную полутопологическую полугруппу [198]. (Доказательство этого факта существенно использует результаты статьи [227].) Основные сведения о компактных полутопологических полугруппах и их обобщениях можно найти в [35]–[37], [51], [189]. Полезным новым общим руководством по почти периодическим функциям и слабо почти периодическим функциям со значениями в банаховом пространстве является диссертация Чжана [230].

В следующем определении мы вводим основные классы почти периодических функций со значениями в локально выпуклом пространстве. Это определение является обязывающим, поскольку имеет много вариантов. Если идея аппроксимации выражена условием той или иной компактности, а идея ряда Фурье – групповой структурой и топологией на группе, определяющей список непрерывных представлений,

²Во многих источниках, включая [2] и [141], эти представления называются слабо почти периодическими. Мы придерживаемся терминологии, сложившейся в два последних десятилетия.

то варьировать в определении можно и топологию в пространстве непрерывных векторнозначных функций, и само условие непрерывности этих функций. В статье фон Неймана и Бохнера [43] (одной из первых по теории почти периодических функций с векторными значениями и развивавшей идеи статьи [46], связанной со скалярнозначными функциями) нет никакого условия непрерывности функций (требуется только ограниченность образа функции как подмножества локально выпуклого пространства значений), и единственным дополнительным требованием является условие предкомпактности семейства сдвигов рассматриваемой функции относительно естественной равномерности, определяемой топологией пространства-образа. Этот класс функций слишком удален от почти периодических функций Бора, которые заведомо непрерывны. Поэтому в основном определении мы сохраним условие непрерывности, но, чтобы несколько расширить класс, от элементов которого обычно требуется сильная непрерывность (в банаховом случае так поступают многие авторы, см., например, [6], [10], [15], [27], [33], [35], [36], [51], [56], [90], [108], [123], [157], [185], [187]), мы рассмотрим класс слабо непрерывных функций (в банаховом случае так поступили де Лю и Гликсберг [67] и Чжан в [230]), более широкий, чем боровский (по крайней мере формально), с естественным дополнительным условием компактности, и введем его родственные классы. Это определение согласовано с определением 1 и было принято в [120], [202], [203] для функций со значениями в локально выпуклых пространствах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.³ Пусть E – локально выпуклое пространство, S – полутопологическая полугруппа (см. определение 1), $\mathcal{U}$ – база окрестностей нуля в E , U – окрестность нуля в E , а U' – семейство функций $g: S \rightarrow E$, принимающих значения в U . Пусть $\mathcal{U}' = \{U' \mid U \in \mathcal{U}\}$. Пусть $B(S, E)$ – локально выпуклое пространство, образованное функциями $g: S \rightarrow E$, множества значений которых ограничены в пространстве E , и снабженное базой окрестностей нуля $\mathcal{U}'$ [43], [220]. Обозначим символом $CB(S, E)$ локально выпуклое пространство непрерывных *ограниченных* E -значных функций на S в равномерной топологии, т.е. в топологии, индуцированной на подпространстве $CB(S, E)$ указанной выше топологией на пространстве $B(S, E)$.

Функция $f: S \rightarrow E$ называется *почти периодической в смысле фон Неймана*, если ее левая и правая орбиты (т.е. семейства левых и правых сдвигов функции f) вполне ограничены в $B(S, E)$ в только что определенной топологии. Если в этом определении заменить полную ограниченность в E слабой полной ограниченностью в $B(S, E)$, мы получим определение *слабо почти периодической функции в смысле фон Неймана*.

Пусть E – локально выпуклое пространство, S – полутопологическая полугруппа, а $WCB(S, E)$ – пространство ограниченных функций на S со значениями в E , которые оказываются непрерывными, если пространство E снабжено слабой топологией $\sigma(E, E^*)$. Пусть пространство $WCB(S, E)$ снабжено некоторой локально выпуклой топологией β , согласованной с топологией простой слабой сходимости на S . Функция $f: S \rightarrow E$ называется β -*почти периодической* (или β -*почти периодической в смысле Бохнера*), если семейство левых (или правых) сдвигов функции f имеет компактное замыкание по отношению к топологии β в пространстве $WCB(S, E)$. Если семейства

³ Семейство естественных топологий в пространстве в том или ином смысле непрерывных функций со значениями в локально выпуклом пространстве намного богаче скудного банахова рациона, и каждый выбор приводит к своему классу почти периодических функций. Читатель может найти начало списка полезных топологий такого рода в [129].

левых и правых сдвигов функции f имеют слабо компактные замыкания, то функция f называется β -слабо почти периодической функцией в смысле Эберлейна.

Пусть E – локально выпуклое пространство, S – полугруппа. Функция $f: G \rightarrow E$ называется *скалярно почти периодической в смысле фон Неймана*, если каждый “матричный элемент” $g \mapsto F(f(g))$, $g \in G$, где $F \in E^*$, является числовой функцией, почти периодической в смысле фон Неймана. Функция $f: G \rightarrow E$ называется *скалярно слабо почти периодической*, если каждый “матричный элемент” $g \mapsto F(f(g))$, $g \in G$, где $F \in E^*$, является числовой функцией, слабо почти периодической в смысле Эберлейна.

Даже для функций со значениями в банаховых пространствах различие между условиями предкомпактности в определении фон Неймана и относительной компактности в определениях Бохнера и Эберлейна существенно (см. [157]).

Очевидно, что любая почти периодическая функция является слабо почти периодической. Кроме того (ср. [35]), нетрудно видеть, что все перечисленные пространства инвариантны относительно сдвигов и имеют свойство Крейна, если E имеет свойство Крейна.

Каждое из перечисленных выше условий, относящееся к правым сдвигам, равносильно соответствующему условию относительно левых сдвигов. Вот схема (для простоты – для числовых функций). Пусть S – топологическая полугруппа, $\text{CB}(S)$ – банахово пространство ограниченных непрерывных комплексных функций на S , а f – функция, принадлежащая банахову пространству $W_R(S)$ всех функций из $\text{CB}(S)$, правая орбита которых

$$O_R(f) = \{R_s f \mid s \in S\}, \quad R_s f(t) = f(ts), \quad t, s \in S,$$

относительно слабо компактна в $\text{CB}(S)$. Пусть S^w – замыкание полугруппы $\{R_s \mid s \in S\}$ в слабой операторной топологии. Пусть $R: S \rightarrow S^w$ – непрерывный гомоморфизм, определенный формулой $R(s) = R_s$, $s \in S$, и пусть $\tilde{R}: \text{CB}(S^w) \rightarrow \text{CB}(S)$ – соответствующее индуцированное отображение. Для любой функции $f \in W_R(S)$ обозначим ее прообраз через F , т.е. положим $F = \tilde{R}^{-1}(f) \in \text{CB}(S^w)$. Очевидно, что любой левый сдвиг ее прообраза (функция вида $L_{R_s} F$) содержится в $\text{CB}(S^w)$, где использовано стандартное обозначение $L_s f(t) = f(st)$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{R}(L_{R_s} F)(t) &= L_{R_s} F(R(t)) = L_{R_s} F(R_t) = F(R_s R_t) \\ &= F(R(st)) = \tilde{R}(F)(st) = f(st) = (L_s f)(t). \end{aligned}$$

Следовательно, семейство $W_R(S)$ инвариантно относительно левых сдвигов ($L_s f = \tilde{R}(L_{R_s} F)$), и левая орбита функции F содержится в левой орбите f . Разумеется, это рассуждение справедливо для слабо почти периодических полугрупп операторов в локально выпуклых пространствах (ср. лемму 1 и теорему 2 ниже).

Понятие слабо почти периодической функции (на абелевой локально компактной группе) ввел Эберлейн [74]. Он также показал [75], что любая слабо почти периодическая функция на абелевой локально компактной группе может быть представлена в виде суммы почти периодической функции и “диссипативной” слабо почти периодической функции. Это соотношение было затем распространено (в [51], [115], [116]) на случай полугруппы и в [67] на случай топологической полугруппы S , допускающей инвариантное среднее на пространстве ограниченных непрерывных функций на S .

Этот результат приобрел универсальный характер, когда Рыль-Нардзевский доказал свою знаменитую теорему о неподвижной точке [191] и немедленно применил ее в доказательстве существования инвариантного среднего на пространстве слабо почти периодических функций на любой топологической группе.

В заключение параграфа следует сказать несколько слов о “почти периодах”, т.е. об определении почти периодических функций “по Бору”. Пусть G – топологическая группа и R_s , $s \in G$, – операция правого сдвига $((R_s f)(t) = f(st), t \in G, f$ – комплексная функция на G). Непрерывная функция f на G называется *правой почти периодической по Бору*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $K_\varepsilon \subset G$, что $A_\varepsilon K_\varepsilon = G$, где $A_\varepsilon = \{s \in G \mid |R_s f(t) - f(t)| < \varepsilon \text{ для всех } t \in G\}$. Левые почти периодические функции определяются аналогично. Оказывается, классы правых и левых почти периодических функций по Бору не обязаны совпадать между собой [223] или с пространством почти периодических функций по Бохнеру [164] и не обязаны быть векторными пространствами [160] даже в случае, если G – локально компактная группа.

Ниже мы обсудим взаимоотношения между условиями слабой почти периодичности и почти периодичности слабо непрерывных представлений топологических групп в локально выпуклом пространстве. Соответствующие явления связаны с фактами известной теории компактных полугрупп, компактных операторных групп и полугрупп и с соотношениями между условиями слабой и сильной непрерывности представлений групп в локально выпуклых пространствах и между условиями раздельной непрерывности (непрерывности по каждому переменному в отдельности) и совместной непрерывности (непрерывности по совокупности переменных) для действий групп и полугрупп и умножений в этих алгебраических объектах. По этой причине мы напомним здесь некоторые основные результаты, относящиеся к этому кругу явлений.

§ 2. Основные факты теории де Лю–Гликсберга

Приведем нужные нам в дальнейшем результаты о полугруппах в виде следующих теорем А–Е.

ТЕОРЕМА А (Эллис, [77]). *Компактная полугруппа топологическая группа, которая алгебраически является группой, есть компактная топологическая группа (т.е. умножение является совместно непрерывным и операция обращения тоже непрерывна).*⁴

ТЕОРЕМА В [67; 2.2–2.9]. *Пусть S – компактная полугруппа.*

(1) *Справедливы следующие утверждения:*

⁴ Лоусон [139; следствие 6.3] доказал более сильное утверждение: любая подгруппа компактной полугруппы является топологической группой. В дальнейшем условия непрерывности для действий полугрупп и условия того, что раздельно непрерывное умножение в полугруппе имеет достаточно много точек совместной непрерывности или даже определяет топологическую полугруппу, рассматривались с различных точек зрения, в частности, в [64], [67], [78], [93], [107], [110], [139], [153], [174]; соответствующие результаты существенно уточняют теоремы Эллиса и Лоусона, но эти более сильные утверждения нам не понадобятся.

(1а) множество $K(S)$ непусто и

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(S) &= \{Se \mid e \in \mathcal{E}(K(S))\}, \\ \mathcal{R}(S) &= \{eS \mid e \in \mathcal{E}(K(S))\}, \\ K(S) &= \bigcup_{I \in \mathcal{L}(S)} I = \bigcup_{I \in \mathcal{R}(S)} I;\end{aligned}$$

(1б) если $J_1, J_2 \in \mathcal{L}(S)$ ($J_1, J_2 \in \mathcal{R}(S)$) и пересечение $J_1 \cap J_2$ непусто, то $J_1 = J_2$;

(1с) если $J \in \mathcal{L}(S)$ ($J \in \mathcal{R}(S)$), то $Js = J$ ($sJ = J$) для любых $s \in J$;

(1д) если $J_1 \in \mathcal{L}(S)$ и $J_2 \in \mathcal{R}(S)$, то пересечение $J_1 \cap J_2$ непусто и содержит единственный идемпотент, который мы обозначим через e ; этот идемпотент удовлетворяет условию $J_1 \cap J_2 = eSe$, и $J_1 \cap J_2$ – компактная топологическая группа с единичным элементом e .

(2) Следующие условия эквивалентны:

(2а) пространство $C(S)$ всех непрерывных функций на S допускает (двусторонне) инвариантное среднее (т.е. существует такой непрерывный линейный функционал m на $C(S)$, что $\|m\| = 1$, $m(\mathbf{1}) = 1$, где $\mathbf{1}$ обозначает функцию, тождественно равную 1, и

$$m(\rho(s)f) = m(\lambda(s)f) = m(f) \quad \text{для любых } s \in S, \quad f \in C(S),$$

или, что равносильно, для всех s из некоторого подмножества $M \subset S$, плотного в S);

(2б) S имеет единственный минимальный левый идеал и единственный минимальный правый идеал, эти идеалы совпадают, и каждый из них совпадает с $K(S)$;

(2с) $K(S)$ – компактная топологическая группа, и инвариантное среднее на S определено интегрированием по мере Хаара на $K(S)$.

Приведем еще один результат статьи [67], связанный со средними на пространстве непрерывных функций на компактной полугруппе.

ТЕОРЕМА С [67; 2.7 и 2.10].

- (1) Пусть S – компактная полугруппа, f – функция из $C(S)$, и пусть $\theta(f) = \{\rho(s)f \mid s \in S\}$. Тогда множество $\theta(f)$ слабо компактно в $C(S)$ и отображение $s \rightarrow \rho(s)f$, $s \in S$, слабо непрерывно. Если $\theta(f)$ сильно относительно компактно, то отображение $s \rightarrow \rho(s)f$, $s \in S$, сильно непрерывно.
- (2) Пусть S – полугруппа, S' – компактная полугруппа, а $\varphi: S \rightarrow S'$ – непрерывный гомоморфизм, причем его образ $\varphi(S)$ плотен в S' . Пусть $\tilde{\varphi}: C(S') \rightarrow C(S)$ – отображение, заданное формулой $f \mapsto f \circ \varphi$ для любой функции $f \in C(S')$. В этом случае пространство $C(S)$ допускает двусторонне инвариантное среднее тогда и только тогда, когда его образ $\tilde{\varphi}(C(S'))$ допускает двусторонне инвариантное среднее.

Кроме того, напомним основные свойства слабо почти периодических функций на полугруппе.

ТЕОРЕМА D [67; 5.1–5.11].

- (1) Если S – компактная полутопологическая полугруппа, то $WAP(S) = C(S)$. Кроме того, если умножение в S непрерывно по совокупности переменных (“совместно непрерывно”), то $AP(S) = C(S)$.
- (2) Пусть S и S' – полутопологические полугруппы, $\varphi: S \rightarrow S'$ – непрерывный гомоморфизм, а $\widehat{\varphi}$ – отображение, заданное формулой $\widehat{\varphi}f = f \circ \varphi$ для любой функции $f \in CB(S')$. Тогда $\widehat{\varphi}(WAP(S')) \subset WAP(S)$ и $\widehat{\varphi}(AP(S')) \subset AP(S)$. Если S' компактна, то $\widehat{\varphi}(C(S')) \subset WAP(S)$, а если к тому же и умножение в S' непрерывно по совокупности переменных, то $\widehat{\varphi}(C(S')) \subset AP(S)$.
- (3) Пусть S – полутопологическая полугруппа и $CB(S)$ – пространство непрерывных ограниченных комплекснозначных функций на S . Сохраним символ $\rho(s)$ для ограничения оператора $\rho(s)$, $s \in S$, на подпространство $WAP(S)$ пространства $CB(S)$. Эти ограничения образуют слабо почти периодическую полугруппу операторов в банаховом пространстве $WAP(S)$. Обозначим через S^w замыкание этой операторной полугруппы в слабой операторной топологии; тогда S^w – компактная полутопологическая полугруппа (так называемая слабо почти периодическая компактификация полугруппы S). Гомоморфизм $S \rightarrow S^w$, переводящий $s \in S$ в $\rho(s)$, непрерывен. Соответствующее отображение, определенное в п. (2) этой теоремы, является изоморфизмом алгебры $C(S^w)$ на алгебру $WAP(S)$.
- (4) Если S – компактная полутопологическая полугруппа, то гомоморфизм $S \rightarrow S^w$, переводящий $s \in S$ в $\rho(s)$ (см. утверждение (3)), является топологическим изоморфизмом топологической полугруппы S на S^w .
- (5) Если S и S' – полутопологические полугруппы и $\varphi: S \rightarrow S'$ – непрерывный гомоморфизм, то существует такой непрерывный гомоморфизм $\varphi^w: S^w \rightarrow S'^w$, что $\varphi^w(\rho(s)) = \rho(\varphi(s))$ для любых $s \in S$.
- (6) Пусть S – топологическая группа, S' – компактная полутопологическая полугруппа, $\varphi: S \rightarrow S'$ – непрерывный гомоморфизм, и пусть множество $\varphi(S)$ плотно в S' . Если отображение, определенное формулой $\widehat{\varphi}f = f \circ \varphi$ для любых $f \in C(S')$, переводит $C(S')$ на $WAP(S)$, то существует такой топологический изоморфизм $\psi: S^w \rightarrow S'$ на S' , что⁵ $\psi(\rho(s)) = \varphi(s)$ для любых $s \in S$.
- (7) Пусть S – полутопологическая полугруппа. Воспользуемся понятиями, введенными ниже в определении 4 в §3. Следующие три условия эквивалентны:
 - (а) $WAP(S)$ допускает инвариантное среднее,
 - (б) ядро полугруппы S^w – компактная топологическая группа,
 - (в) $WAP(S)_r$ совпадает с пространством $AP(S)$, $WAP(S)_v$ является замкнутым подпространством в $WAP(S)$, инвариантным относительно сдвигов, и $WAP(S)$ – прямая сумма $AP(S)$ и $WAP(S)_v$.

⁵Таким образом, S^w – единственная (с точностью до топологического изоморфизма) компактная полугруппа, в которую полугруппу S можно непрерывно вложить как плотную подполугруппу так, что каждая функция из $WAP(S)$ допускает непрерывное продолжение на S^w . Мы будем обозначать полугруппу S^w символом G^{WAP} .

Если эти эквивалентные условия (а)–(с) выполнены, то инвариантное среднее m на $WAP(S)$ единственно, и оно определяется интегрированием функции из $C(S^w)$ по мере Хаара на компактной группе $K(S^w)$ после применения изоморфизма между $C(S^w)$ и $WAP(S)$, указанного в утверждении (3). Кроме того, $WAP(S)_v$ совпадает с множеством $\{f \mid f \in WAP(S), m(|f|^2) = 0\}$.

Напомним теперь следствие из теоремы Рыль-Нардзевского о неподвижной точке.

ТЕОРЕМА Е [191]. *Для любой топологической группы G существует единственное двустороннее инвариантное среднее на алгебре $WAP(G)$ слабо почти периодических комплекснозначных функций на G .*

Таким образом, все утверждения п. (7) теоремы D выполняются, если S – топологическая группа.

Как уже было сказано выше, еще одной общей темой, связанной с условиями непрерывности почти периодических функций, является связь между условиями сильной и слабой непрерывности представлений групп и полугрупп, которая исследовалась многими авторами. Условия непрерывности борелевских (а позже и измеримых) гомоморфизмов и сильной непрерывности слабо непрерывных гомоморфизмов, а также непрерывности гомоморфизмов в терминах вариации в точке рассматривались, начиная с [9], в большом числе работ, в том числе – де Лю и Гликсбергом [68], Р. Муром [168], Лоусоном [139], Ханселем и Троалликом [107], Хельмером [110], Мегрелишвили [153], Баситом и Прайдом [20], Нибом и Пикреллом [174]. В частности, в [68] де Лю и Гликсберг доказали, что слабо непрерывное представление локально компактной группы в любом банаховом пространстве автоматически сильно непрерывно, и приписали это доказательство Миркилу. Это доказательство слишком кратко, а подробное доказательство приведено Джонсоном в [117].⁶ Обзор новых результатов в этом направлении дан в [153]. Часть этих результатов связывает сильную непрерывность слабо непрерывных представлений групп с топологическими свойствами группы (локальной компактностью [168], топологической полнотой (см. обзорную часть в [202])), а другие утверждения связаны с условиями геометрического характера, накладываемыми на пространство представления или на орбиты представления (например, свойство Радона–Никодима [173], [206], [207]), свойство Асплунда [207], [226]⁷, свойство точек непрерывности, фрагментируемость в смысле статей [153], [173], бочечность локально выпуклого пространства представления ([168], см. также обзорную часть работы [153]). Некоторые новые результаты о связи между условиями слабой и сильной непрерывности представлений групп в банаховых пространствах приведены в [200], [202].

Здесь уместно отметить следующую постановку задачи, обобщающую приведенную выше и изученную в [119]. Пусть S – полутопологическая полугруппа, и пусть

⁶В книге Любича [147] автор ошибочно использует характеристические функции окрестностей вместо непрерывных функций с компактным носителем, использование которых сделало бы эту часть доказательства правильной, но осталось бы не доказанным, что полученный интеграл является элементом исходного банахова пространства, а не только его второго сопряженного.

⁷Свойства Радона–Никодима, Данфорда–Петтиса и Асплунда встретятся нам ниже в §8 при обсуждении геометрических свойств групповых алгебр.

отображение $\phi: S \rightarrow S'$ гомеоморфно отображает S на плотное подмножество компактной правотопологической полугруппы S' (правая топологичность означает, что умножение непрерывно только по левому переменному при фиксированном правом сомножителе) и, кроме того, левые сдвиги $S' \rightarrow S', x \mapsto \phi(s)x, x \in S',$ непрерывны для любых $s \in S$. Доказано, что если $\pi: S' \rightarrow I$ – непрерывная гомоморфная ретракция на правый идеал I в S' , то $C(S')$ допускает разложение в прямую сумму векторных пространств $C(S') = \pi^*(C(I)) \oplus CB(S', I)$, где π^* – “гельфандовское преобразование” отображения π и $CB(S', I)$ – множество всех ограниченных непрерывных функций на S' , обращающихся в нуль на I ; оба эти подпространства инвариантны относительно левых сдвигов на элементы множества $\phi(S)$, а $CB(S', I)$ – идеал в алгебре $C(S')$. Кроме того, верно и обратное (см. также [167]): если $\psi: S' \rightarrow S''$ – такой сюръективный непрерывный гомоморфизм, что $C(S')$ можно представить в виде прямой суммы $C(S') = \psi^*(C(S'')) \oplus H$, где ψ^* – “гельфандовское преобразование” отображения ψ и H – идеал в $CB(S')$ (инвариантный относительно левых сдвигов на элементы $\phi(S)$), то S'' можно отождествить с таким левым идеалом I в S' , что H совпадает с пространством всех ограниченных непрерывных функций на S' , обращающихся в нуль на I . (Этот факт является существенным обобщением разложения слабо почти периодической функции в сумму почти периодической и диссипативной функций. Заметим, что за пределами банаховых модулей над алгеброй числовых почти периодических функций (вне структуры модуля над алгеброй) трудно представить себе язык, на котором возможно векторное обобщение этого результата.)

Перейдем теперь к постановке и решению одной из основных задач этой статьи.⁸

§ 3. Аналог разложения де Лю–Гликсберга для слабо почти периодических представлений в бочечных локально выпуклых пространствах

Мы собираемся распространить основную конструкцию статьи [67] на случай представлений в локально выпуклом пространстве. С этой целью мы сначала напомним результаты этой статьи, связанные с непрерывными функциями на компактных полутопологических полугруппах, и обсудим изменения, необходимые при изучении представлений таких полугрупп в локально выпуклых пространствах (так как в [67] рассматривался только случай представлений в банаховых пространствах). Требуемое обобщение результатов де Лю и Гликсберга осуществляется в этом параграфе статьи.

Напомним, что $\mathcal{L}(E)$ – семейство всех непрерывных линейных операторов в локально выпуклом пространстве E . Можно рассматривать $\mathcal{L}(E)$ и как полугруппу с единичным элементом, а именно единичным оператором в E . Под *полугруппой операторов* в пространстве E мы понимаем произвольную подполугруппу S в $\mathcal{L}(E)$, содержащую единичный элемент (оператор). Полугруппа операторов в E называется

⁸Некоторые новые свойства полутопологических полугрупп приведены в [213]; эти свойства позволяют упростить доказательства ряда известных результатов о компактных полутопологических полугруппах. Троаллик [212], [213] ведет изложение на основе теоремы Намиока [172] о связи между раздельной и совместной непрерывностью и не пользуется теоремой Рылль-Нардзевского [191] о неподвижной точке. Недавние обобщения теоремы Намиока, полученные в [107] и некоторых других работах, могут оказаться применимыми и в более общей ситуации представлений в локально выпуклых пространствах.

слабо почти периодической (почти периодической), если тождественное представление S в пространстве E слабо почти периодически (почти периодически).

ЛЕММА 1. *Пусть S – слабо почти периодическая полугруппа операторов в локально выпуклом пространстве E . Тогда замыкание $\bar{S}$ полугруппы S – компактная полутопологическая полугруппа в слабой операторной топологии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как умножение в $\mathcal{L}(E)$ отдельно непрерывно в слабой операторной топологии, то замыкание $\bar{S}$ полугруппы S в $\mathcal{L}(E)$ замкнуто относительно умножения. Следовательно, $\bar{S}$ – полутопологическая полугруппа. Докажем, что $\bar{S}$ компактна. Для любого $x \in E$ замыкание $\overline{\theta(x)}$ орбиты $\theta(x)$ точки x компактно в слабой топологии пространства E , причем $Tx \in \overline{\theta(x)}$ для любых $x \in E$ и $T \in \bar{S}$ по определению замыкания в слабой операторной топологии. Пусть $\chi: \bar{S} \rightarrow \prod_{x \in E} \overline{\theta(x)}$ – отображение, переводящее любой элемент $T \in \bar{S}$ в семейство элементов $\{Tx \mid x \in E\}$. По определению слабой топологии в E , это отображение (которое, очевидно, взаимно однозначно) является гомеоморфизмом. Так как произведение $\prod_{x \in E} \overline{\theta(x)}$ компактно по теореме Тихонова, то компактность множества $\bar{S}$ будет установлена, если мы докажем, что его образ $\chi(\bar{S})$ замкнут. Поэтому достаточно доказать, что каждая точка прикосновения множества $\chi(S)$ принадлежит образу $\chi(\bar{S})$. Но если $\{y_x\}_{x \in E}$ – точка прикосновения $\chi(S)$ и если отображение $T': E \rightarrow E$ определено формулой $T'x = y_x$ для любых $x \in E$, то $T' \in \bar{S}$ по определению слабой операторной топологии. Итак, $\{y_x\}_{x \in E} = \chi(T') \in \chi(\bar{S})$, что завершает доказательство леммы 1.

ЛЕММА 2. *Пусть S – почти периодическая полугруппа операторов в локально выпуклом пространстве E . Тогда замыкание $\bar{S}$ полугруппы S – компактная полутопологическая полугруппа относительно сильной операторной топологии. Если эта полугруппа S является алгебраической группой, то S – компактная топологическая группа относительно сильной (и слабой) операторной топологии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя доказательство леммы 1 для сильной топологии, видим, что замыкание Σ полугруппы S в сильной операторной топологии компактно. Кроме того, множество Σ компактно и в слабой операторной топологии. Так как сильная операторная топология не слабее слабой операторной топологии, то $\Sigma \subset \bar{S}$, где $\bar{S}$ – замыкание полугруппы S в слабой операторной топологии (см. доказательство леммы 1). Поэтому $\Sigma = \bar{S}$, и ограничение слабой операторной топологии на множество $\bar{S}$ совпадает с ограничением сильной операторной топологии на то же множество (так как $\bar{S}$ компактно в сильной операторной топологии, то непрерывное тождественное отображение этого компактного пространства $\bar{S} = \Sigma$ в сильной операторной топологии на компактное пространство $\bar{S}$ в слабой операторной топологии является гомеоморфизмом). Это завершает доказательство леммы 2.

ЛЕММА 3. *Пусть E – бочечное локально выпуклое пространство и $\mathcal{L}(E)$ – пространство непрерывных линейных операторов в E . Любое слабо компактное семейство операторов в E равномерно непрерывно (в исходной топологии пространства E).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Слабо компактное множество очевидным образом слабо ограничено. Остальное следует из теоремы III.4.2 в [195].

Следующие две леммы устанавливают связи между почти периодичностью представлений и их матричных элементов, т.е. скалярными свойствами почти периодичности.

ЛЕММА 4. Пусть E – бочечное локально выпуклое пространство со свойством Крейна, $\mathcal{L}(E)$ – пространство непрерывных линейных операторов в E , G – топологическая группа, и пусть π – слабо почти периодическое представление группы G в пространстве E . Функция

$$F_{f,x}(g) = f(\pi(g)x), \quad g \in G,$$

слабо почти периодична для любых $x \in E$ и $f \in E^*$.

Иначе говоря, слабо почти периодическое представление в бочечном пространстве скалярно слабо почти периодично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3 образ $\pi(G)$ группы G равномерно непрерывен в $\mathcal{L}(E)$. Кроме того, из наличия свойства Крейна следует возможность применения критерия слабой компактности Гротендика в форме, приведенной в [195; IV.11.2]. Пусть $x \in E$ и $f \in E^*$. Пусть g_m и h_n – последовательности элементов группы G . Рассмотрим двойную последовательность

$$F_{f,x}(g_m h_n) = \pi(g_m)^* f(\pi(h_n)x).$$

Согласно упражнению 25 в гл. IV в [195], последовательность $\pi(g_m)^* f$ равномерно непрерывна, поэтому, согласно [195; IV.11.2], повторные пределы совпадают, если они существуют. По критерию Гротендика для слабой почти периодичности функций [100] отсюда следует, что все матричные элементы представления π слабо почти периодичны.

ЛЕММА 5. Пусть E – бочечное локально выпуклое пространство, $\mathcal{L}(E)$ – пространство непрерывных линейных операторов в E , G – топологическая группа и π – почти периодическое представление группы G в пространстве E . Функция $g \mapsto f(\pi(g)x)$, $g \in G$, почти периодична для любых $x \in E$ и $f \in E^*$.

Иначе говоря, почти периодическое представление в бочечном пространстве скалярно почти периодично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3 образ $\pi(G)$ группы G равномерно непрерывен в $\mathcal{L}(E)$. Поэтому для любой окрестности нуля U в E существует такая окрестность нуля V в E , что $\pi(g)V \subset U$ для всех $g \in G$. Пусть $\{g_1, \dots, g_n\}$ – такой конечный набор элементов группы G , что

$$\pi(G)x \subset \bigcup_{i=1}^n (\pi(g_i)x + V).$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(hg) &= f(\pi(hg)x) = f\left(\pi(h)\pi(g)x \in \pi(h) \bigcup_{i=1}^n (\pi(g_i)x + V)\right) \\ &\subset f\left(\bigcup_{i=1}^n (\pi(hg_i)x + U)\right) \subset \bigcup_{i=1}^n (F(hg_i) + F(U)), \end{aligned}$$

так что семейство сдвигов числовой функции F вполне ограничено в топологии равномерной сходимости на группе G . Следовательно, F почти периодична.

Следуя Эберлейну [75], Якобсу [115], [116] и де Лю и Гликсбергу [67], введем стандартные эргодические понятия рассматриваемой теории в форме, которую эти понятия приняли в [67] (для случая банаховых пространств).

Напомним, что $\overline{\mathcal{O}(x)}$, $x \in E$, – слабое замыкание орбиты $\mathcal{O}(x)$, т.е.

$$\overline{\mathcal{O}(x)} = \{Tx \mid T \in \overline{S}(x)\}$$

(где черта означает замыкание в слабой топологии на пространстве E).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Вектор $x \in E$ называется *возвращаемым*, если $x \in \overline{\mathcal{O}(y)}$ для любых $y \in \mathcal{O}(x)$, или, что то же, если $\overline{\mathcal{O}(x)} = \overline{\mathcal{O}(y)}$ для любых $y \in \mathcal{O}(x)$. Вектор $x \in E$ называется *исчезающим*, если замыкание $\mathcal{O}(x)$ орбиты вектора x содержит нулевой вектор 0_E пространства E . Вектор $x \in E$ называется *компактным*, если орбита $\mathcal{O}(x)$ принадлежит конечномерному подпространству, инвариантному относительно S , и ограничение полугруппы S на это подпространство является подполугруппой ограниченной группы линейных операторов на этом подпространстве (причем единичный элемент группы есть единичный оператор на этом подпространстве).

Пусть E_r – множество всех возвращаемых векторов. Назовем множество E_r *возвращаемым подмножеством* E . Если E_r – подпространство, будем называть его *возвращаемым подпространством* E .

Пусть E_v – множество всех исчезающих векторов. Пусть E_{afd} – замыкание линейной оболочки конечномерных векторов в E . Элементы подпространства E_{afd} назовем *аппроксимативно конечномерными* векторами.

Очевидно, что множество E_r и векторное подпространство E_{afd} являются $\overline{S}$ -инвариантными множествами.

ЛЕММА 6. Пусть S – почти периодическая полугруппа операторов в локально выпуклом пространстве E . Пусть $x \in E$.

- (1) Следующие условия равносильны:
 - (1a) $x \in E_r$,
 - (1b) для любого элемента $T \in \overline{S}$ существует такой элемент $T' \in \overline{S}$, что $T'Tx = x$,
 - (1c) существует такой идемпотент (проектор) $e \in K(\overline{S})$, что $ex = x$.
- (2) Следующие условия равносильны:
 - (2a) $x \in E_v$,
 - (2b) $Tx = 0_E$ для некоторого $T \in \overline{S}$,
 - (2c) существует такой идемпотент (проектор) $e \in K(\overline{S})$, что $ex = 0_E$.
- (3) Если $\overline{S}$ допускает среднее на всем пространстве $CB(\overline{S})$ и если e является единственным идемпотентом (проектором) в $K(\overline{S})$ (см. утверждение (2) в теореме В), то $eE \subset E_{afd}$.
- (4) Любой компактный вектор в E принадлежит E_r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность $(1a) \iff (1b)$ очевидна, так как $\overline{\theta(x)} = \{tx \mid t \in \overline{S}(x)\}$ (как правило, мы теперь будем обозначать элементы замыкания $\overline{S}$ строчными буквами). Если $(1b)$ выполнено, то пересечение $W = \{t \mid t \in \overline{S}, tx = x\} \cap K(\overline{S})$ непусто, так как $K(\overline{S})$ – левый идеал в $\overline{S}$, а W – компактная подполугруппа в S . Согласно утверждению (1) теоремы В, W содержит идемпотент, что доказывает $(1c)$. Итак, $(1b) \implies (1c)$. Если e – идемпотент, удовлетворяющий условию $(1c)$, то $J = \{te \mid t \in \overline{S}\}$ – минимальный левый идеал в S согласно пункту (1a) в теореме В. Если $t \in \overline{S}$, то $te \in J$; следовательно, существует такой $t' \in J$, что $t'te = e$ (см. $(1c)$ в теореме В). Тогда $t'tx = t'tex = ex = x$. Итак, $(1c) \implies (1b)$.

Эквивалентность $(2a) \iff (2b)$ очевидна, так как $\overline{\theta(x)} = \{tx \mid t \in \overline{S}(x)\}$. Ясно, что $(2c) \implies (2b)$. Так как множество $\ell = \{t \mid t \in \overline{S}, tx = 0_E\}$ является левым идеалом в $\overline{S}$, то из утверждения $(1d)$ в теореме В следует, что ℓ содержит идемпотент, принадлежащий ядру $K(\overline{S})$, что доказывает импликацию $(2b) \implies (2c)$.

Если $\overline{S}$ допускает среднее на пространстве $CB(\overline{S})$, то $\overline{S}$ имеет только один левый минимальный идеал и только один правый минимальный идеал, и оба эти идеала совпадают с $K(\overline{S})$ (см. утверждение $(2b)$ в теореме В). Согласно утверждению $(1a)$ теоремы В, в $K(\overline{S})$ имеется только один идемпотент (проектор) e . Ввиду утверждений $(1a)$, $(1d)$ и $(2c)$ теоремы В, ядро $G = K(\overline{S})$ совпадает с минимальным левым идеалом $\ell_e = \{te \mid t \in K(\overline{S})\} = \{te \mid t \in \overline{S}\}$, и G – компактная топологическая группа с единичным элементом e .

Итак, построена некоторая компактная топологическая группа G . Пусть ψ_α – ограниченная аппроксимативная единица в инволютивной банаховой алгебре $L^1(G)$, и пусть эта сеть ψ_α образована линейными комбинациями матричных элементов неприводимых конечномерных унитарных представлений группы G (см., например, [171; гл. IV, § 3.3]). Введем нормированную меру Хаара μ на G . Для любой функции ψ_α положим

$$t_\alpha x = \int_G \psi_\alpha(t) tx d\mu(t), \quad x \in E, \quad (2)$$

в смысле формулы (12) приложения 2. Из предложения 1 приложения 2 следует, что если локально выпуклое пространство E имеет свойство Крейна в смысле определения 12 приложения 1 (в частности, если E квазиполно), то интеграл в (2) существует как элемент пространства E . Кроме того, из предложения 2 приложения 2 следует, что если E – пространство Макки (в частности, если E бочечно, см. теорему IV.3.4 в [195]), то формула (2) определяет непрерывный линейный оператор t_α в E для любых α (т.е. для любых тригонометрических многочленов α).

Теперь вернемся к доказательству утверждения (3) леммы 6. Заметим, что

$$\lim_\alpha t_\alpha x = ex \quad (\text{слабо}) \quad \text{для любых } x \in E. \quad (3)$$

Действительно, так как ψ_α является аппроксимативной единицей в $L^1(G)$ и $t \mapsto F(tx)$, $t \in G$, – непрерывная ограниченная функция, то можно перейти к пределу в формуле (3) по α следующим образом:

$$F(t_\alpha x) = \int_G \psi_\alpha(t) F(tx) d\mu(t) \rightarrow F(ex), \quad x \in E, \quad F \in E^*. \quad (4)$$

Напомним, что по определению векторное подпространство E_{afd} (сильно) замкнуто в E . Поэтому E_{afd} слабо замкнуто. Так как $t_\alpha x \rightarrow ex$ слабо (согласно (4)), то мы можем завершить доказательство леммы, показав, что $t_\alpha x \in E_{afd}$ для любых α .

Возьмем произвольный элемент $x \in E$. Если N – конечномерное векторное подпространство в $C(G)$, то, так как интегрирование является линейным отображением, отсюда следует, что множество

$$M_N = \left\{ \int_G f(t)tx \, d\mu(t) \mid f \in N \right\}$$

тоже является конечномерным векторным подпространством в $C(G)$. Предположим, что векторное подпространство N инвариантно относительно левых сдвигов на $CB(S)$. Докажем, что подпространство M_N является S -инвариантным. Действительно, если $s \in S$ и $s' = se$, то $s' \in G$, и $st = s't$ для любых $t \in G$, так как e является единичным элементом в G . Поэтому из левой инвариантности интеграла следует, что

$$s \int_G f(t)tx \, d\mu(t) = \int_G f(t)s'tx \, d\mu(t) = \int_G f((s')^{-1}r)rx \, d\mu(r), \quad (5)$$

причем правая часть (5) принадлежит M_N . Формула (5) с $s = e$ показывает, что отображение e оставляет на месте каждый вектор в M_N .

Докажем, что из инвариантности подпространства N относительно левых сдвигов следует, что подпространство M_N является пространством представления конечномерного подпредставления тождественного представления S . Заметим, что e действует на M_N как единичный оператор, причем $sy = sey$ для любых $s \in S$ и $y \in M_N$. Так как $se \in G$, то ограничение $S|_{M_N}$ принадлежит ограничению $G|_{M_N}$ группы G на векторное подпространство M_N . Это завершает доказательство утверждения (3) леммы 6, так как $x \in E$ произволен и любой элемент вида $t_\alpha x$ принадлежит некоторому подпространству вида M_N , а мы только что убедились, что эти инвариантные подпространства образованы конечномерными векторами и поэтому принадлежат H_{afd} .

Чтобы доказать утверждение (4), предположим, что x – компактный вектор и N – такое конечномерное подпространство, инвариантное относительно S , что ограничение представления S на N определяет подполугруппу ограниченной группы G линейных операторов на этом подпространстве (и единичный элемент e группы G действует как единичный оператор на N). В этом случае ограничение подполугруппы $\bar{S}$ на N содержится в замыкании $\bar{G}$ группы G и $\bar{G}$ – компактная топологическая группа. Так как компактная подполугруппа компактной топологической группы является (компактной) подгруппой (следствие 2.6 в [67]), то $\bar{S}|_N$ – подгруппа группы $\bar{G}$. В силу эквивалентности (1b) $\iff$ (1a) получаем $N \subset E_r$. Это завершает доказательство леммы 6.

Продолжим изучение слабо компактных полугрупп операторов в локально выпуклом пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть S – слабо относительно компактная полугруппа операторов в локально выпуклом пространстве E . Обозначим через $C_E(S)$ равномерно замкнутую инволютивную подалгебру в $CB(S)$, порожденную постоянными функциями и

всевозможными матричными элементами тождественного представления полугруппы S , т.е. функциями вида

$$f(t) = F(tx), \quad t \in S, \quad x \in E, \quad F \in E^*. \quad (6)$$

Алгебра $C_E(S)$ называется *представляющей алгеброй* операторной полугруппы S в E .

ТЕОРЕМА F (ср. [67; лемма 4.8]). Пусть S – слабо относительно компактная операторная полугруппа в локально выпуклом пространстве E , $\overline{S}$ – замыкание множества S в пространстве $\mathcal{L}(E)$, снабженном слабой операторной топологией (т.е. топологией простой сходимости в слабой топологии пространства E , ср. теореме D выше), и $\iota: S \rightarrow \overline{S}$ – отображение вложения. Тогда при отображении $\iota^*: C(\overline{S}) \rightarrow C_E(S)$, заданном формулой

$$\iota^*(f) = f \circ \iota, \quad f \in C(\overline{S}),$$

пространство $C(\overline{S})$ отображается на $C_E(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство практически дословно совпадает с доказательством леммы 4.8 в [67] (относящейся к случаю полугрупп в банаховом пространстве), так как по существу в нем не используется техника банаховых пространств.

ЛЕММА 7 (ср. [67; 4.9–4.11]). Пусть E – бочечное пространство со свойством Крейна и S – слабо почти периодическая операторная полугруппа на E . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $C_E(S)$ имеет двусторонне инвариантное среднее;
- (2) ядро $K(\overline{S})$ – компактная топологическая группа;
- (3) ядро $K(\overline{S})$ содержит единственный идемпотент;
- (4) E_v – замкнутое S -инвариантное подпространство в E и $E_{afd} = E_r$, причем E является прямой суммой своих замкнутых S -инвариантных подпространств E_v и E_r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (2) $\iff$ (3) следует из теоремы В. Эквивалентность (1) $\iff$ (2) следует из леммы 5 и теоремы В.

Если условие (4) выполнено, то E_v – замкнутое векторное подпространство в E . Следовательно, E_v слабо замкнуто. Так как E_v является S -инвариантным по предположению, то оно и $\overline{S}$ -инвариантно. Пусть e_1 и e_2 – идемпотенты в $K(\overline{S})$. Ясно, что $e_2(1_E - e_2)x = 0_E$ для любых $x \in E$. Поэтому $(1_E - e_2)x \in E_v$ для любых $x \in E$. Так как векторное пространство E_v является $\overline{S}$ -инвариантным, то $e_1(1_E - e_2)x \in E_v$ для любых $x \in E$. Но $e_1(e_1(1_E - e_2)x) = e_1(1_E - e_2)x$ для любых $x \in E$, так как e_1 – идемпотент в $K(\overline{S})$. Поэтому $e_1(1_E - e_2)x \in E_r$ для любых $x \in E$ согласно утверждению (1) (см. (1с) и (1а)) в лемме 6. Из определения множеств E_r и E_v сразу следует, что $E_r \cap E_v = \{0_E\}$. Таким образом, $e_1(1_E - e_2)x = 0_E$ для любых $x \in E$, и это доказывает, что

$$e_1 e_2 = e_1 \quad (7)$$

для любых двух идемпотентов $e_1, e_2 \in K(\overline{S})$.

Воспользуемся теперь условием, что $E_{afd} = E_r$ и $E_r \cap E_v = \{0_E\}$. Если e – идемпотент в $\bar{S}$ и $x \in E$ – компактный вектор, то $x \in E_{afd} = E_r$. Так как $ex \in E_r$ по лемме 6 (см. эквивалентность $(1c) \iff (1a)$), отсюда следует, что $x - ex \in E_r$, поскольку $E_r = E_{afd}$ – векторное пространство. Так как e – идемпотент, мы видим, что $e(x - ex) = 0_E$. Поэтому $x \in E_v$ по лемме 6 (см. эквивалентность $(2c) \iff (2a)$). Так как $E_r \cap E_v = \{0_E\}$ по предположению, отсюда следует, что $ex = x$ для любых компактных векторов x и любого идемпотента $e \in \bar{S}$. Следовательно, любой идемпотент $e \in \bar{S}$ оставляет на месте каждый элемент пространства $E_{afd} = E_r$, в котором множество компактных векторов тотально. Если e_1 и e_2 – идемпотенты в $K(\bar{S})$ и $x \in E$, то $e_2x \in E_r$ снова по лемме 6 (см. эквивалентность $(1c) \iff (1a)$), и поэтому $e_2x \in E_{afd}$ в силу предположения $E_{afd} = E_r$. Так как e_1 оставляет неподвижным каждый элемент подпространства E_r , то $e_1e_2x = e_2x$ для любых $x \in E$, и поэтому

$$e_1e_2 = e_2 \quad (8)$$

для любых идемпотентов $e_1, e_2 \in K(\bar{S})$. Объединяя (7) и (8), получаем равенство $e_1 = e_2$ для любых идемпотентов $e_1, e_2 \in K(\bar{S})$. Это завершает доказательство импликации $(4) \implies (3)$.

Докажем теперь, что $(3) \implies (4)$. Пусть выполнено условие (3), и пусть e – идемпотент в $K(\bar{S})$. Если $x \in E$, то $e(1_E - e)x = 0_E$, и поэтому $(1_E - e)x \in E_v$. С другой стороны, множество E_r – это множество всех таких векторов $x \in E$, что $ex = x$ (см. эквивалентность $(1c) \iff (1a)$ в лемме 6). Поэтому E_r – замкнутое векторное подпространство в E . Любой компактный вектор принадлежит E_r по утверждению (4) в лемме 6. Таким образом, $E_{afd} \subset E_r$. Но $(3) \iff (2)$, и из утверждений (1) и (3) в лемме 6 следует, что $E_r \subset E_{afd}$. Таким образом, $E_{afd} = E_r$, и формула $x = ex + (1_E - e)x \in E_r + E_v$ дает требуемое разложение, так как $E_r \cap E_v = \{0\}$ согласно соотношению $e(1_E - e)x = 0_E$, справедливому для любых $x \in E$. Это завершает доказательство леммы 7.

Обобщения приведенных выше результатов на случай представлений в локально выпуклых пространствах Макки приведены в [203].

§ 4. Связь между почти периодичностью, слабой почти периодичностью и скалярной почти периодичностью

Одна из общих задач теории почти периодических представлений и функций в локально выпуклых пространствах состоит в том, чтобы найти условия почти периодичности слабой почти периодического представления или функции со значениями в локально выпуклом пространстве. Это – самый продуктивный тип связей между важнейшими классами почти периодических функций (между сильной, скалярной и слабой почти периодичностью). В этом направлении известны только результаты о банаховых пространствах; см. упомянутую выше книгу Ю. И. Любича [147] и последующие статьи М. И. Кадеца и Любича [125] и М. И. Кадеца [122]; часть этих результатов отражена в книге Б. М. Левитана и В. В. Жикова [141]. Читатель легко заметит, что даже в статьях [122] и [125] условия слабой почти периодичности представления включают требование сильной непрерывности рассматриваемых представлений. Как мы увидим, это условие избыточно в связи с явлением автоматической сильной

непрерывности представлений рассматриваемого типа и поэтому может быть заменено формально более слабым условием слабой непрерывности. Более того, оказывается возможным (при определенных условиях) распространить соответствующий результат на случай представлений в локально выпуклых пространствах, что потребует обобщения аппарата де Лю и Гликсберга [67] на локально выпуклый случай.

Поскольку теорема Кадеца и Любича [125] (уточняющая результат, приведенный в книге Любича [147] для случая рефлексивных банаховых пространств) является моделью нашего будущего критерия почти периодичности слабо непрерывных слабо почти периодических представлений в бочечных пространствах со свойством Крейна, мы приведем формулировку основного утверждения в [125].

ТЕОРЕМА G [125]. Пусть π – сильно непрерывное представление топологической группы G в банаховом пространстве E . Представление π является почти периодическим (и, таким образом, замыкание по норме каждой орбиты $\mathcal{O}(x) = \{\pi(g)x \mid g \in G, x \in E\}$ компактно в E в сильной топологии пространства E) тогда и только тогда, когда π слабо почти периодически (т.е. все орбиты $\mathcal{O}(x)$, $x \in E$, относительно слабо компактны в E) и матричные элементы представления π являются комплексными почти периодическими функциями на G .

Авторы приводят пример, показывающий, что условие слабой почти периодичности существенно в утверждении “тогда”. Этот контрпример использует более мощные средства, чем стандартный пример, показывающий, что условие слабой секвенциальной полноты (или отсутствие подпространства в E , изоморфного пространству c_0 стремящихся к нулю последовательностей) для банахова пространства E существенно для справедливости знаменитой теоремы Люмиса ([145]; см. также [44], [125]), утверждающей, что при этих условиях ограниченная непрерывная E -значная функция с не более чем счетным спектром [6], [12], [16], [17], [27], [28], [50], [105], [218] является почти периодической.

Мы рассмотрим только этот стандартный пример, кочующий из одной статьи в другую и ставший частью математического фольклора. Рассмотрим представление аддитивной группы $\mathbb{R}$ вещественных чисел в пространстве c (всех сходящихся последовательностей), заданное формулой $\pi(t)e_n = \exp(t/n)e_n$, где $t \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что представление π имеет почти периодические матричные элементы, поскольку все эти матричные элементы являются суммами рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(t/n), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{где ряд } \sum_n c_n \text{ абсолютно сходится.}$$

Но представление π не является почти периодическим, так как орбита точки $(1, 1, \dots)$ не является (сильно) компактным множеством в c . В самом деле, если бы эта орбита была компактна, то последовательность функционалов $\varphi_n(x) = x_n$, $x = \{x_n\} \in c$, стремилась бы к 1 на каждом элементе орбиты при $n \rightarrow \infty$ (так как последовательность $\exp(t/n)$ стремится к 1 поточечно), но эта сходимости не является равномерной на орбите. Следовательно, орбита точки $(1, 1, \dots)$ не является (сильно) компактной в c . Это доказывает, что π не является почти периодическим представлением. Из самой теоремы Кадеца и Любича следует, что это представление не является и слабо почти периодическим.

Как показано в [18], если f – функция на топологической группе G со значениями в пространстве Фреше A , если при $\gamma \in G$ функция $\Delta_\gamma f$ определена формулой $\Delta_\gamma f(t) = f(t\gamma) - f(t)$, $t \in G$, и если функция $\Delta_\gamma f$ непрерывна в единичном элементе e группы G для любых γ в некоторой окрестности точки e , то функция f непрерывна в e в предположении, что A не содержит подпространства, изоморфного c_0 , и f ограничена. Аналогичный результат доказан там и в случае, если A – локально выпуклое пространство и область значений функции f слабо относительно компактна. Несмотря на ряд результатов о свойствах локально выпуклых пространств, не содержащих подпространства, изоморфного c_0 (типичным является результат в [73]), условия слабой секвенциальной полноты пространства, не содержащего подпространства, изоморфного c_0 , получены в локально выпуклом случае только для пространств с безусловным базисом. По этой причине мы не пытаемся распространить c_0 -результат теории почти периодических функций в банаховых пространствах на локально выпуклый случай и ограничиваемся обобщением и уточнением качественного подхода Кадеца и Любича [125].

Приведем анонсированный выше результат.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть π – слабо непрерывное представление топологической группы G в бочечном локально выпуклом пространстве E со свойством Крейна. Представление π почти периодически тогда и только тогда, когда π слабо почти периодически и скалярно почти периодически. Кроме того, если эти равносильные условия выполнены, то представление π сильно непрерывно.*

Таким образом, для каждой орбиты $\mathcal{O}(x) = \{\pi(g)x \mid g \in G\}$, $x \in E$, слабо непрерывного представления π топологической группы G в бочечном локально выпуклом пространстве E со свойством Крейна сильное замыкание этой орбиты компактно в E в сильной топологии тогда и только тогда, когда все орбиты $\mathcal{O}(x)$, $x \in E$, относительно слабо компактны в E и все матричные элементы представления π являются комплексными почти периодическими функциями на G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если представление является почти периодическим, то это представление очевидным образом является и слабо почти периодическим. Скалярная почти периодичность (почти периодичность матричных элементов) следует из леммы 5. Поэтому остается доказать обратную импликацию.

Пусть π – слабо непрерывное представление топологической группы G в бочечном пространстве E со свойством Крейна (см. определение 12 в приложении 1). Предположим, что π слабо почти периодически (т.е. слабое замыкание каждой орбиты $\mathcal{O}(x) = \{\pi(g)x \mid g \in G\}$, $x \in E$, компактно в E в слабой топологии). По лемме 1, замыкание S образа $\pi(G)$ группы G в представлении π в слабой операторной топологии на $\mathcal{L}(E)$ есть компактная полутопологическая полугруппа операторов в слабой операторной топологии относительно обычного умножения операторов. Объединяя утверждения теорем C и D, видим, что представляющая алгебра $C_E(\pi(G))$ естественно G -эквивариантно изоморфна обоим алгебрам $C(S)$ и $WAP(S)$, а также некоторой подалгебре алгебры $WAP(G)$ (и притом содержит все постоянные функции). По теореме E, алгебра $WAP(G)$ допускает двусторонне инвариантное среднее и, снова по теоремам C и D, алгебра $C(S)$ допускает (двусторонне) инвариантное среднее. Согласно утверждению (7) теоремы D, алгебра $WAP(S)$ разлагается в прямую сумму двух подпространств, инвариантных относительно сдвигов, а именно

$WAP(S)_r$ и $WAP(S)_v$, первое из которых можно отождествить с пространством $AP(S)$, а другое – с подпространством $\{f \mid f \in WAP(S), m(|f|^2) = 0\}$. Но, по предположению, представляющая алгебра является подалгеброй алгебры $AP(G)$. Следовательно, компонента функции, принадлежащая $WAP(S)_v$, одновременно принадлежит и $AP(G)$, и $WAP(S)_v$. Однако эти пространства имеют тривиальное пересечение, так как сумма подпространств $WAP(S)_r$ и $WAP(S)_v$ – прямая. Таким образом, $WAP(S) = AP(S)$; это означает, что $WAP(S)_v = 0$ и $e = 1_E$. Поэтому полугруппа S совпадает со своим ядром. Следовательно, алгебраически полугруппа S является группой. По теореме Эллиса (теорема А), S – компактная топологическая группа. Поэтому замыкание образа $\pi(G)$ в слабой операторной топологии – компактная топологическая группа в слабой топологии. По теореме о сильной непрерывности слабо непрерывных представлений (локально) компактных групп в бочечных пространствах [168] тождественное представление группы S сильно непрерывно. Следовательно, замыкание множества $\pi(G)$ в сильной операторной топологии компактно. Это показывает, что рассматриваемое представление почти периодически. Снова используя сильную непрерывность тождественного представления группы S , видим, что композиция этого (тождественного) отображения с исходным слабо непрерывным представлением является сильно непрерывным представлением и его образ принадлежит сильно компактной группе операторов в E . Это завершает доказательство теоремы 1.

Обобщение теоремы 1 на случай представлений в локально выпуклых пространствах Макки приведено в [203].

Заметим, что теорема 1 – не единственный путь к автоматической почти периодичности скалярно почти периодических представлений групп и полугрупп. Например, неприводимые слабо почти периодические представления полутопологических полугрупп марковскими операторами на компакте автоматически почти периодичны [118].

§ 5. Родственные результаты и приложения

5.1. Критерии почти периодичности и слабой почти периодичности.

Уточним утверждения лемм 4 и 5.

ТЕОРЕМА 2. Пусть π – слабо непрерывное представление топологической группы G в локально выпуклом пространстве E . Представление π слабо почти периодически тогда и только тогда, когда множество $\pi(G)$ относительно слабо компактно в пространстве $\mathcal{L}(E)$ непрерывных линейных операторов в E , снабженном слабой операторной топологией (определяемой системой полунорм вида $T \mapsto |f(Tx)|$, $x \in E$, $f \in E^*$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону утверждение доказано в лемме 1. Докажем обратное утверждение. Если $\pi(G)$ относительно слабо компактно в пространстве $\mathcal{L}(E)$ непрерывных линейных операторов в E , снабженном слабой операторной топологией, то замыкание S множества $\pi(G)$ в пространстве $\mathcal{L}(E)$ является компактной полутопологической полугруппой снова по лемме 1. Орбиты этой полугруппы слабо компактны в E как непрерывные образы компакта S и содержат соответствующие орбиты представления π , которые поэтому относительно слабо компактны.

ТЕОРЕМА 3. Пусть π – слабо почти периодическое представление топологической группы G в локально выпуклом пространстве E . Представление π почти периодически тогда и только тогда, когда множество $\pi(G)$ относительно компактно в пространстве $\mathcal{L}(E)$ непрерывных линейных операторов в E , снабженном сильной операторной топологией (определяемой системой полунорм вида $T \mapsto p(Tx)$, где $x \in E$ и p – полунорма на E). Если это условие выполнено, то представление π сильно непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону утверждение доказано в лемме 2. Доказательство обратного утверждения аналогично доказательству соответствующей части теоремы 2. Если же эти равносильные условия выполнены, то доказательство сильной непрерывности представления π повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 1.

5.2. Среднее на слабо почти периодических функциях.

Пусть G – топологическая группа, E – бочечное локально выпуклое пространство со свойством Крейна, f – слабо почти периодическая функция на G со значениями в E . Числовые функции $\varphi \circ f$, определенные формулой $\varphi \circ f: g \mapsto \varphi(f(g))$, $g \in G$, слабо почти периодичны на G для любых $\varphi \in E^*$ (это доказывается так же, как и лемма 4), и поэтому на каждой из этих функций определено значение $\mu(\varphi \circ f)$, где μ – (единственное) инвариантное среднее на пространстве числовых слабо почти периодических функций на группе G , см. [97]. Нетрудно видеть, что формула $\varphi(m(f)) = \mu(\varphi \circ f)$, $\varphi \in E^*$, определяет элемент $m(f)$ как (формально – не обязательно непрерывный) линейный функционал на E^* (ср. [90]). Так как среднее μ содержится в замкнутой выпуклой оболочке точечных функционалов (определяемых элементами $g \in G$ группы G по правилу $\varphi \rightarrow \varphi(f(g))$, $\varphi \in E^*$), а множество значений функции f слабо относительно компактно (как образ слабо относительно компактной орбиты функции f при отображении, определяемом взятием значения функции в единичном элементе, поскольку это отображение непрерывно по определению 3), то элемент $m(f)$ пространства $E^{*'}$ линейных функционалов на E^* определяется элементом пространства E , принадлежащим тому же компактному множеству, а именно замкнутой выпуклой оболочке слабо компактного замыкания множества значений функции f .

Таким образом, мы построили векторнозначное инвариантное среднее m на $WAP(G, E)$ со значениями в E . Некоторое видоизменение доказательства банаховой версии утверждения в [230] позволяет установить, что отображение m совпадает с (единственным) линейным отображением пространства $WAP(G, E)$ в E , перестановочным с действием группы сдвигами и переводящим каждую слабо почти периодическую функцию в элемент пространства E , принадлежащий замкнутой выпуклой оболочке ее множества значений.

Средние значения (в различных смыслах) на различных классах почти периодических функций, а также на дистальных функциях, эргодических функциях и функциях более общих классов (в том числе в связи с взаимоотношениями между определениями почти периодических функций по Бору и Бохнеру) рассматриваются во многих работах и имеют многообразные приложения [1], [19], [36], [39], [40], [47], [53], [86], [87], [90], [97], [103], [108], [112], [131], [135], [136], [149], [183], [186], [188], [193], [217], [228], [229], [233].⁹

⁹В [183] отмечено интересное явление. Пусть $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ – группа аффинных преобразований

5.3. Условия счетности спектра скалярно почти периодической функции.

Теорема Бохнера и фон Неймана [43] о счетности спектра функций, почти периодических в смысле фон Неймана (при условиях полноты и сепарабельности пространства, которые напоминаются ниже, в приложении 1), вызвала многочисленные исследования феномена счетности спектра для других классов почти периодических функций с векторными значениями (ср. [123]).

Напомним следующее стандартное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть G – топологическая группа, $\widehat{G}$ – семейство классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы G в конечномерных гильбертовых пространствах, E – бочечное локально выпуклое пространство со свойством Крейна, m – введенное в п. 5.2 инвариантное среднее на $WAP(G, E)$. Пусть $\omega \in \widehat{G}$ и P_ω – отображение, сопоставляющее слабо почти периодической функции ее ω -компоненту

$$P_\omega f(\cdot) = \dim \omega \cdot \text{trace}(m(f \cdot (\omega(g))^{-1}) \cdot \omega(\cdot)).$$

Спектром функции $f \in WAP(G, E)$ называется множество

$$\sigma(f) = \{\omega \in \widehat{G} \mid P_\omega f \neq 0\}.$$

Слабым спектром скалярно почти периодической функции $f: G \rightarrow E$ называется объединение спектров матричных элементов функции f , т.е. числовых почти периодических функций вида $\varphi \circ f$, $\varphi \in E^*$.

Справедлив следующий критерий счетности спектра скалярно почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве [104] (на самом деле этот критерий имеет более развитую форму, но мы ограничиваемся той частью критерия Гюнцлера, понимание которой не требует освоения новых определений, в частности, разработанных в [101], [102]).

ТЕОРЕМА Н (Гюнцлер, [104]). Пусть S – полугруппа, E – банахово пространство и $f: S \rightarrow E$ – скалярно почти периодическая функция. Следующие условия равносильны:

- (1) *слабый спектр функции f не более чем счетен,*
- (2) *на образе $f(S)$ слабая топология пространства E удовлетворяет первой аксиоме счетности,*

прямой с обычным умножением $(x', y')(x, y) = (x' + y'x, y'y)$. Можно проверить, что функция $f(x, y) = e^{ix}$ не является почти периодической на G , но ее правые сдвиги на элементы подгруппы $H = \{0\} \times \mathbb{R}^+$ определяют предкомпактное семейство; тем самым есть класс таких функций; обозначим его $RAP(G, H)$. Заметим, что $f \notin LAP(G, H)$ (которое определяется аналогично). Следуя [170], оказывается возможным изучить условия справедливости равенств, подобных соотношению $RAP(G, G) = AP(G)$, векторные средние и компактификации. Это исследование показывает, насколько близко расположены вопросы, касающиеся почти периодических функций и представлений и почти периодических действий и динамических систем, и переход с языка динамики на язык представлений совершенно естествен, даже если при этом часть информации о системе утрачивается. Теория почти периодических функций и представлений оказывается полезной во многих вопросах топологической динамики; см., например, [1], [37], [44], [77]–[79], [93], [121], [136], [141], [157]–[166], [169], [216], [221], [233], [234].

- (3) множество значений функции f сепарабельно,
- (4) существует счетная подполугруппа в S , замыкание образа которой содержит образ полугруппы S .

Ранее, в 1980 г., для группы вещественных чисел в обычной топологии этот результат был анонсирован Кадецом и Кюрстеном [124] с наброском доказательства. Поразительно, но замечательный критерий Гюнцлера (теорема Н) остался почти незамеченным. В частности, в статье [123] доказано, что если X – такое банахово пространство, что слабое* секвенциальное замыкание каждого его сепарабельного подпространства сепарабельно в его втором сопряженном, то любое скалярно почти периодическое представление группы вещественных чисел в пространстве X является почти периодическим, причем автор утверждает, что критерий счетности спектра для групп, отличных от вещественной прямой, ему неизвестен. Объединение доказательства Кадеца с критерием Гюнцлера позволяет немедленно получить, например, следующее более общее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – банахово пространство. Предположим, что слабое* секвенциальное замыкание каждого сепарабельного подпространства Y пространства X сепарабельно во втором сопряженном Y^{**} . Тогда каждое скалярно почти периодическое представление сепарабельной абелевой локально компактной группы в пространстве X является почти периодическим.

Интересно, верно ли это утверждение для сепарабельных топологических групп более общего вида. Вопрос о справедливости критерия Гюнцлера (теоремы Н) для скалярно почти периодических функций со значениями в более общих локально выпуклых пространствах также представляет естественный интерес.

Помимо условий счетности спектра, начиная с еще довоенных работ Левитана и Вольфа, изучаются спектральные условия того, что данная ограниченная непрерывная функция является почти периодической. Кроме Люмиса [145] и Жикова (см. [141]), в формировании современного вида этой теоремы для случая банаховых пространств приняли участие многие авторы, в том числе – Баскаков [27], [28] и Арендт и Швейкер [6]. Для простоты мы ограничимся случаем почти периодических функций на коммутативных локально компактных группах со значениями в банаховых пространствах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть G – коммутативная локально компактная группа. Спектром равномерно непрерывной функции $f: G \rightarrow E$, где E – банахово пространство, называется множество $\text{sp}(f) = \{\chi \in \widehat{G} \mid (\mathcal{F}\varphi)(\chi) = 0 \text{ для всех } \varphi \in I_f\}$, где $\widehat{G}$ – группа характеров группы G , $I_f = \{\varphi \in L^1(G) \mid \varphi * f = 0\}$ и

$$(\mathcal{F}\varphi)(\chi) = \int_G \overline{\chi(s)} \varphi(s) ds$$

– преобразование Фурье функции $\varphi \in L^1(G)$. Спектром Арвесона сильно непрерывного представления π группы G в E называется множество

$$\text{Sp}(\pi) = \{\chi \in \widehat{G} \mid (\overline{\mathcal{F}}\varphi)(\chi) = 0 \text{ для всех } \varphi \in I_\pi\},$$

где

$$(\overline{\mathcal{F}}\varphi)(\chi) = \int_G \chi(s) \varphi(s) ds$$

и $I_\pi = \{\varphi \in L^1(G) \mid \varphi(S) = 0\}$ (в смысле представления групповой алгебры, определяемого представлением группы G).

Множество $A \subset \hat{G}$ называется *разреженным*, если оно не содержит непустых совершенных подмножеств.

ТЕОРЕМА I [6], [27]. Пусть G – коммутативная топологическая группа, E – банахово пространство, π – слабо почти периодическое представление группы G со значениями в E . Если спектр Арвесона представления f разрежен, то представление π почти периодически.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 доказательство сводится к проверке почти периодичности матричных элементов представления π , которая, в свою очередь, следует из известной теоремы о скалярных функциях (см., например, теорему VI.4.4 в [141]).

Аналогичное утверждение справедливо для функций со значениями в банаховых пространствах [6]. Есть и более сильные варианты этих утверждений. Например, для функций со значениями в банаховых пространствах в условии теоремы I можно заменить спектр Арвесона содержащимся в нем “почти периодическим спектром” (см. [27], [141]).

Ни одно из существующих спектральных понятий не имеет очевидного аналога в локально выпуклом случае. Впрочем, некоторые разумные утверждения могут быть доказаны (для функций и представлений в локально выпуклых пространствах) и теми средствами, которые есть в наличии. Мы сформулируем и докажем соответствующую теорему в следующем пункте, после того как выясним связь между слабо почти периодическими функциями и компактными операторными полугруппами в случае, когда пространства не нормированы.

5.4. Слабая почти периодичность функций и представлений.

Специфика слабо почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве состоит в том, что семейство слабо почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве есть банахово пространство (теорема 2.5 в [35]). Таким образом, теорема 1 (о разложении слабо почти периодических представлений) может быть непосредственно применена к представлению этой группы сдвигами в пространстве слабо почти периодических функций со значениями в данном банаховом пространстве, что приводит к аналогичному разложению слабо почти периодических функций в этом пространстве. Это следствие теоремы 1 составляет содержание основной теоремы Чжана (теорема 8.8 в [230]) о разложении пространства слабо почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве E в прямую сумму инвариантных замкнутых подпространств, одно из которых образовано почти периодическими функциями со значениями в E , а другое – слабо почти периодическими функциями со значениями в E , замкнутая выпуклая оболочка которых содержит функцию, тождественно равную нулю¹⁰. Но примененные выше методы анализа представлений в локально выпуклых пространствах не всегда допускают такую итерацию: за пределами пространств Фреше (полных метризуемых локально выпуклых топологических

¹⁰Ранее Голдберг и Ирвин [90] получили аналогичную теорему разложения в более узком классе сильно непрерывных ограниченных функций на топологической группе со значениями в банаховом пространстве, орбита сдвигов которых в пространстве всех таких функций слабо относительно компактна, а образ функции относительно компактен в смысле нормы пространства.

векторных пространств) условия бочечности пространства, образованного слабо непрерывными функциями на вполне регулярном пространстве (и даже на бесконечном компакте) со значениями в бочечном пространстве и рассматриваемого в топологии сильной равномерной сходимости, неизвестны.

Отметим здесь, что структура пространства $WC(K, X)$ слабо непрерывных функций на компактном топологическом пространстве K со значениями в банаховом пространстве X (с обычной равномерной нормой) отнюдь не проста и в ряде других отношений [7]. Любая функция $f \in WC(K, X)$ измерима по Борелю и μ -интегрируема по Бохнеру относительно любой конечной регулярной борелевской меры μ на K . Пространство $C(K, X)$ сильно непрерывных функций на K со значениями в X образует замкнутое подпространство в $WC(K, X)$, причем $WC(K, X) \subseteq C(K, X)^{**}$ и $C(K, X)^*$ дополняемо в $WC(K, X)^*$. Известно также, что подпространство $C(K, X)$ дополняемо в $WC(K, X)$ тогда и только тогда, когда эти пространства совпадают. Если пространство X имеет *свойство Шура* (т.е. слабая и сильная сходимости последовательностей совпадают, или, что то же, условия слабой и сильной компактности подмножеств пространства X совпадают), то $C(K, X)$ — M -идеал в $WC(K, X)$ (напомним, что подпространство F банахова пространства E называется M -идеалом в E , если его аннулятор $F^\perp$ в сопряженном пространстве E^* является образом L -проектора $P: E^* \rightarrow F^\perp$, т.е. $P^2 = P$ и $\|Px\| + \|x - Px\| \equiv x$ для любого $x \in E^*$). Поразительно, но сами по себе перечисленные выше свойства измеримости и интегрируемости слабо непрерывных функций (без дополнительных геометрических условий на банахово пространство) не обеспечивают интегрируемости нормы функции по Риману. А именно, банахово пространство X имеет свойство Шура (заметим, что каждая скалярно почти периодическая функция со значениями в таком пространстве автоматически является почти периодической) тогда и только тогда, когда для любой слабо непрерывной функции $f: [0, 1] \rightarrow X$ функция $\|f(\cdot)\|$ интегрируема по Риману на $[0, 1]$ (см. [7]).

Крайние точки единичного шара $B(WC(K, X)^*)$ в $WC(K, X)^*$ суть точечные функционалы; более точно, такие функционалы θ имеют вид $\theta(f \cdot a) = f(k_0) \cdot \theta(a)$ для всевозможных $f, a \in WC(K, X)$ и $k_0 \in K$ [7].

Перейдем к основным утверждениям. Прежде всего, мы располагаем следующим обобщением теоремы Чжана на случай функций со значениями в пространствах Фреше. (Для сильно непрерывных функций ситуация несколько лучше, см. теорему 6 ниже.)

ТЕОРЕМА 5. Пусть G — топологическая группа, E — пространство Фреше. Пространство $WAP(G, E)$ слабо почти периодических функций на G со значениями в E допускает разложение в прямую сумму двух инвариантных замкнутых векторных подпространств, одно из которых образовано почти периодическими функциями на G со значениями в E , а другое — всеми сильно равномерно непрерывными на группе G слабо почти периодическими функциями на G (со значениями в E), замкнутая выпуклая оболочка которых содержит функцию, тождественно равную нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $WAP(G, E)$ является пространством Фреше относительно естественной “равномерной” метрики. Пусть $F \in WAP(G, E)$, т.е. орбита F слабо относительно компактна в пространстве слабо непрерывных E -значных

функций на G с равномерной метрикой. Как и в лемме 4, из критерия Гротендика непосредственно следует, что для любого $f \in E^*$ функция $F_f(g) = f(F(g))$, $g \in G$, является числовой слабо почти периодической функцией на G . Любая непрерывная слабо почти периодическая функция на G с числовыми значениями допускает единственное продолжение до непрерывной функции на компактной полутопологической полугруппе G^{WAP} , так называемой слабо почти периодической компактификации группы G (см. теорему D в §2). Нетрудно проверить, что семейство значений продолжений всевозможных матричных элементов F_f определяет в каждой точке полугруппы G^{WAP} некоторый элемент пространства $E^{*'} (не обязательно непрерывных) линейных функционалов на E^* . Используя по существу те же рассуждения, что и в начале п. 5.2, видим, что каждый из этих функционалов определяется некоторым элементом пространства E и содержится в слабо замкнутой выпуклой оболочке слабо относительно компактного множества (образа функции F в E). Это построение определяет функцию $\Phi: G^{WAP} \rightarrow E$, ограничение которой на G совпадает с F , причем, как и в [198], отсюда следует, что функция Φ слабо непрерывна на G^{WAP} . Поэтому орбита функции Φ в (как легко проверить, полном) метрическом пространстве слабо непрерывных функций $WC(G^{WAP}, E)$ (с естественной равномерной метрикой) слабо компактна. Следовательно, орбита функции F в полном метрическом пространстве (слабо непрерывных) слабо почти периодических функций $WAP(G, E)$ (с равномерной метрикой) относительно слабо компактна. Таким образом, представление группы G , определяемое сдвигами в пространстве $WAP(G, E)$, слабо почти периодически. Остается применить теорему 1.$

Нетрудно сформулировать и доказать и аналогичное утверждение для сильно непрерывных функций.

Это — многообещающие утверждения. Они открывают путь к изучению почти периодических функций со значениями в пространствах голоморфных функций и некоторых пространствах обобщенных функций (в духе исследования почти периодических мер, см., например, [88]). Конечно, пространства обобщенных функций чаще оказываются пространствами типа (DF), чем типа (F), и редко бывают рефлексивными. Но сильное сопряженное к пространству Фреше бывает бочечным и за пределами класса рефлексивных пространств. Поэтому существенно, что с помощью критерия бочечности пространств непрерывных функций на компакте со значениями в бочечном пространстве [156] можно, хоть и дорогой ценой, несколько продвинуться за пределы метризуемой ситуации. Перейдем к формулировке и доказательству соответствующего утверждения.

Начнем со следующей леммы, которая объясняет, почему произведение локально равностепенно непрерывных сильно непрерывных операторнозначных функций сильно непрерывно, если речь идет о бочечном пространстве.

ЛЕММА 8. Пусть E — бочечное локально выпуклое пространство, $\mathcal{L}(E)$ — алгебра непрерывных операторов в E , X — компактное топологическое пространство, $A: X \rightarrow \mathcal{L}(E)$ — функция, непрерывная в сильной операторной топологии, $f: X \rightarrow E$ — функция, непрерывная в сильной топологии. Тогда отображение $Af: X \rightarrow E$, определенное формулой $x \mapsto A(x)f(x)$, $x \in X$, сильно непрерывно на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $A(X)$ поточечно ограничено и поэтому равностепенно непрерывно [195; III.4.2]. Поэтому достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 9. Пусть E – бочечное локально выпуклое пространство, $\mathcal{L}(E)$ – алгебра непрерывных операторов в E , X – топологическое пространство, $A: X \rightarrow \mathcal{L}(E)$ – функция, непрерывная в сильной операторной топологии и принимающая значения в равностепенно непрерывном множестве, а $f: X \rightarrow E$ – функция, непрерывная в сильной топологии. Тогда отображение $Af: X \rightarrow E$, определенное формулой $x \mapsto A(x)f(x)$, $x \in X$, сильно непрерывно на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – данная сильная окрестность нуля в E и V – такая окрестность нуля, что $V + V \subset U$. Для окрестности V найдем окрестность нуля W в E так, чтобы $A(X)W \subset V$. Пусть $x_0 \in X$. Найдем окрестность O_1 точки x_0 в X такую, что $f(x) - f(x_0) \in W$ при $x \in O_1$, и окрестность O_2 точки x_0 в X такую, что $(A(x) - A(x_0))f(x_0) \in V$ при $x \in O_2$. Тогда при $x \in O \subset O_1 \cap O_2$ получаем

$$A(x)f(x) - A(x_0)f(x_0) = A(x)(f(x) - f(x_0)) + (A(x) - A(x_0))f(x_0) \in V + V \subset U.$$

Заметим, что условие локальной равностепенной непрерывности в сильной операторной топологии автоматически выполнено для сильно непрерывных представлений локально компактных групп в бочечных пространствах.

Подготовимся теперь к формулировке критерия бочечности пространства, образованного сильно непрерывными функциями на компакте со значениями в локально выпуклом пространстве и снабженного равномерной топологией. Обозначим через M° поляр у подмножества M локально выпуклого пространства E , т.е.

$$M^\circ = \{f \mid f \in E^*, \operatorname{Re}(f(x)) \leq 1 \text{ для всех } x \in M\}.$$

Напомним следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть E – локально выпуклое пространство. Последовательность $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ называется *слабо суммируемой*, если $\sum_n |f(x_n)| < \infty$ для каждого непрерывного линейного функционала f на E . Пусть $l^1[E]$ – семейство всех таких последовательностей. Для каждой окрестности нуля U в E положим

$$\varepsilon_U(\{x_n\}) = \sup \left\{ \sum_n |f(x_n)| \mid f \in U^\circ \right\} \leq \rho < \infty.$$

Локально выпуклая топология, определяемая семейством преднорм вида ε_U , где U пробегает систему окрестностей нуля в E , называется ε -топологией на $l^1[E]$.

Обозначим через $\mathfrak{B}(E)$ семейство всех замкнутых уравновешенных выпуклых ограниченных подмножеств пространства E .

Говорят, что данное локально выпуклое пространство E имеет свойство (В) Пича (см. [179; 1.5.5] и [156]), если для любого ограниченного подмножества $\mathbf{B}$ в $l^1[E]$ (в ε -топологии) существует такое множество $B \in \mathfrak{B}(E)$, что $\sum_n p_B(x_n) \leq 1$ для всех $\{x_n\} \in \mathbf{B}$, где $p_B(x) = \inf \{\rho > 0 \mid x \in \rho B\}$ – функционал Минковского множества B .

Напомним, что пространства типа (F) и (DF) обладают свойством (В) (см. [156; 1.5.8]) и сформулируем критерий Мендосы.

ТЕОРЕМА J (критерий Мендосы [156]). Пусть E – бочечное локально выпуклое пространство, K – компакт, $C(K, E)$ – пространство непрерывных функций на K со значениями в E , снабженное топологией равномерной сходимости. Пространство $C(K, E)$ бочечно тогда и только тогда, когда пространство E бочечно и имеет свойство (B) Пича.

Теперь сформулируем несколько искусственное утверждение, доказательство которого легко склеивается из готовых частей (т.е. из известных фактов) и хорошо видно, как эти части должны взаимодействовать.

ТЕОРЕМА 6. Пусть E – бочечное локально выпуклое пространство со свойством Крейна, имеющее также свойство (B) Пича. Пусть $WAP_{sc}(E)$ – пространство, образованное слабо почти периодическими функциями на топологической группе G со значениями в E , каждая из которых сильно непрерывна и допускает продолжение на компактную полутопологическую полугруппу G^{WAP} до функции, сильно непрерывной на G^{WAP} (если эта функция рассматривается как отображение в пространство E , снабженное сильной топологией).

Пространство $WAP_{sc}(E)$ допускает разложение в прямую сумму двух инвариантных замкнутых векторных подпространств, одно из которых образовано почти периодическими функциями на G со значениями в E , а другое – всеми сильно равномерно непрерывными на группе G слабо почти периодическими функциями из пространства $WAP_{sc}(E)$, замкнутая выпуклая оболочка которых содержит функцию, тождественно равную нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $WAP_{sc}(E)$ естественно изоморфно пространству сильно непрерывных E -значных функций на компакте G^{WAP} . Из теоремы J (критерия Мендосы) следует, что пространство $WAP_{sc}(E)$ бочечно. Если пространство E имеет свойство Крейна, то, как легко видеть, пространство $C(G^{WAP}, E)$, снабженное равномерной топологией, также имеет свойство Крейна, а тем самым и его замкнутое подпространство $WAP_{sc}(E)$ имеет свойство Крейна. Поэтому утверждение непосредственно следует из теоремы 1.

Вернемся к спектральным условиям почти периодичности, которые обсуждались в предыдущем пункте.

ТЕОРЕМА 7. Пусть G – коммутативная топологическая группа, E – пространство Фреше, f – слабо почти периодическая функция на G со значениями в E . Если спектр функции f дискретен, то функция f почти периодична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует почти периодичность матричных элементов функции f (т.е. функций $\varphi \circ f$, $\varphi \in E^*$). Остается применить приведенную выше теорему 5.

Желательно распространить утверждение на случай некоммутативных групп.

5.5. Почти периодичность функций с почти периодическими разностями и почти периодичность неопределенного интеграла.

Одна из самых старых задач теории почти периодических функций – задача об условиях почти периодичности неопределенного интеграла от почти периодической функции. Для условно-периодических функций она была решена еще Болем [45]. И для скалярных функций, и для векторных функций задача о неопределенном интеграле

сводится к задаче о разностях [12]. Приведем формулировку утверждения, которое является непосредственным следствием теоремы 5.

ТЕОРЕМА 8. Пусть f – слабо почти периодическая функция на топологической группе G со значениями в пространстве Фреше E . Функция f почти периодична тогда и только тогда, когда все матричные элементы функции f почти периодичны (т.е. все функции $\varphi \circ f$, $\varphi \in E^*$, являются комплексными почти периодическими функциями на G).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к функции f разложение, приведенное в теореме 5. Из условия о матричных элементах следует, что диссипативная компонента вектора f равна нулю, и поэтому этот вектор (функция f) принадлежит подпространству аппроксимативно конечномерных векторов.

Другое доказательство может быть основано на критерии компактности в терминах крайних точек [49].

Сформулируем теперь теорему о разностях.

ТЕОРЕМА 9. Пусть f – слабо почти периодическая функция на топологической группе G со значениями в пространстве Фреше E . Если все разности вида $g \mapsto f(gh) - f(g)$, $g \in G$, являются почти периодическими функциями, то функция f почти периодична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предыдущей теоремы следует, что достаточно доказать теорему для матричных элементов $\varphi \circ f$, $\varphi \in E^*$. Но к этим матричным элементам можно применить теорему о разностях для числовых функций.

§ 6. Примеры

Первый из примеров носит фольклорный характер. Даже в этой статье мы встречаем его не в первый раз: он использовался в § 4 в другом контексте.

ПРИМЕР 1. Пример функции с разреженным спектром, не являющейся почти периодической. Пусть f – равномерно непрерывная ограниченная функция на $\mathbb{R}$ со значениями в пространстве с сходящихся комплексных последовательностей, определенная формулой $f(t) = \{\exp(t/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Тогда спектр функции f счетен ($\text{sp } f = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$) и поэтому разрежен, а функция скалярно почти периодична (потому что сопряженное пространство образовано сходящимися рядами), но не почти периодична (см. § 4). Функция f является неопределенным интегралом от почти периодической функции $f'(t) = \{(1/n) \exp(t/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Напомним, что f не является и слабо почти периодической функцией, см. § 4.

Следующие примеры принадлежат Гюнцлеру [104].

ПРИМЕР 2. Пример скалярно почти периодической функции, слабый спектр которой несчетен. Пусть $G = \mathbb{R}_d$ (аддитивная группа вещественных чисел в дискретной топологии). Пусть Ω – базис Гамеля (базис в $\mathbb{R}$, рассматриваемом как линейное пространство над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел). Можно считать, что $2\pi \in \Omega$. Положим

$$f(s)(\omega) = \varphi(r_\omega(s)) - 1, \quad s \in \mathbb{R}_d, \quad \omega \in \Omega, \quad (9)$$

где величины $r_\omega, \omega \in \Omega$, определены формулой

$$x = \sum_{\omega \in \Omega} r_\omega(x) \omega, \quad x \in \mathbb{R},$$

и $\varphi(t) = e^{i\pi t}$ при $t \in \mathbb{R}$. Как и в предыдущем примере, функция f скалярно почти периодична, но ее слабый спектр равен

$$\bigcup_{\omega \in \Omega} \sigma(\varphi \circ r_\omega - 1) = \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\{1\}, \{\varphi \circ r_\omega\}\} = \{\{1\}\} \cup \{\{\varphi \circ r_\omega\} \mid \omega \in \Omega\},$$

и множество Ω несчетно вместе с $\mathbb{R}$.

ПРИМЕР 3. *Пример функции с одноточечным спектром, разрывной в обычной топологии числовой прямой.* Любая функция вида $f = \varphi \circ r_\omega$ (см. предыдущий пример) скалярно почти периодична, но не является непрерывной на $\mathbb{R}$ в обычной топологии прямой.

§ 7. Другие результаты, связанные с классическими задачами теории почти периодических функций

7.1. Непосредственные следствия теоремы разложения.

“Теорема разложения”, распространяющая результаты де Лю и Гликсберга на случай представлений в бочечных локально выпуклых пространствах со свойством Крейна, имеет ряд других непосредственных следствий. Приведем обобщения двух утверждений де Лю и Гликсберга.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть E – бочечное локально выпуклое пространство со свойством Крейна, $\mathcal{L}(E)$ – алгебра всех непрерывных линейных операторов в E и S – подмножество $\mathcal{L}(E)$. Если S компактно в слабой операторной топологии и является группой относительно обычного умножения операторов, и если e – единичный элемент группы S , то e – непрерывный проектор в E , $E_v = \text{Ker } e$, $E_r = \text{Im } e$, и группа S компактна в сильной операторной топологии.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть E – бочечное локально выпуклое пространство со свойством Крейна, $\mathcal{L}(E)$ – алгебра всех непрерывных линейных операторов в E и S – подмножество $\mathcal{L}(E)$. Если S компактно в слабой операторной топологии, замкнуто относительно обычного умножения операторов и состоит из обратимых операторов, то S – группа, компактная в сильной операторной топологии, причем $E = E_r$.*

Доказательства этих следствий повторяют доказательства теоремы 8.1 и следствия 8.2 в [67] с минимальными изменениями.

7.2. Дополнительные сведения о почти периодических функциях и представлениях.

Следуя комбинаторной идее А. А. Маркова, примененной им в 1933 г. в доказательстве связи между условиями устойчивости и почти периодичности решений некоторых дифференциальных уравнений [150], Финк и Майстерс [85] называют подмножество S в группе G *подмножеством типа $(\Delta - m)$* (или, коротко, $(\Delta - m)$ -*подмножеством*), если $S = S^{-1}$ и для любых $t_1, \dots, t_{m+1} \in G$ существуют такие индексы $i \neq j$, что $t_i - t_j \in S$. В [85] доказано, что функция f почти периодична по фон Нейману тогда и только тогда, когда множество ее ε -почти периодов есть $(\Delta - m)$ -множество.

В [127] рассматривается ряд обобщений понятия почти периодической функции на полутопологической полугруппе S с единичным элементом и доказывается, что некоторые из этих определений равносильны обычной почти периодичности, что приводит к новым критериям почти периодичности. Например, непрерывная функция f на S называется удовлетворяющей условию (В) относительно класса $\mathcal{A}$ подмножеств полугруппы S , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $A \in \mathcal{A}$, что множество $\{\sigma \in A \mid |f(xyz) - f(x\sigma z)| < \varepsilon \text{ для всех } x, z \in S\}$ непусто для всех $y \in S$. Очевидно, что если семейство $\mathcal{A}$ состоит из конечных множеств, то f почти периодична. Другие критерии используют предположение, что $\mathcal{A}$ состоит из вполне ограниченных слева подмножеств, а f равномерно непрерывна справа.

Функция $f \in CB(S)$ называется равномерно непрерывной справа (слева) в точке $s \in S$, если $\|L_{s_\alpha} f - L_s f\| \rightarrow 0$ ($\|R_{s_\alpha} f - R_s f\| \rightarrow 0$) для любой сети s_α в S , сходящейся к s в S . В [158] получен ряд характеристик почти периодических функций (в том числе в терминах правой и левой равномерной непрерывности) в некоторых классах обобщенных почти периодических функций (в том числе введенных в [127]). Кроме того, в [158] показано, что любая функция из $C(S)$, где S — компактная полутопологическая полугруппа, равномерно непрерывна справа и слева в единичном элементе, и S является топологической полугруппой (т.е. умножение в S непрерывно по совокупности переменных) тогда и только тогда, когда каждая функция из $C(S)$ равномерно непрерывна справа и слева в каждой точке полугруппы S .

В [157] сравниваются три пространства, связанные с векторнозначными слабо почти периодическими функциями. Пусть $CB(S, X)$ — банахово пространство ограниченных непрерывных функций на полутопологической полугруппе S со значениями в банаховом пространстве X . Пусть $WR(S, X)$ состоит из всех таких функций $f \in CB(S, X)$, у которых правая орбита $R_S f = \{R_s f \mid s \in S\}$ относительно слабо компактна в $CB(S, X)$. Пусть пространство $WRC(S, X)$ состоит из всех $f \in WR(S, X)$, у которых область значений $f(S) = \{f(s) : s \in S\}$ вполне ограничена, а пространство $W(S, X)$ состоит из всех функций $f \in CB(S, X)$, удовлетворяющих условию, что все функции $s \rightarrow x^*(f(s))$ являются обычными числовыми слабо почти периодическими функциями на S при любых $x^* \in X^*$. Используя свое новое обобщение критерия Гротендика для слабой компактности [100], автор статьи [157] показывает на примерах, что все эти три пространства могут попарно не совпадать.

7.3. Свойства почти периодических функций: существование среднего значения, спектр, теоремы о разностях и об интеграле, условия компактности, теорема Дини, свойства диссипативных функций.

В [40] существование инвариантного среднего на почти периодических функциях Бохнера на абелевой группе G со значениями в $\mathbb{C}^n$ доказывается с помощью следую-

щей теоремы о неподвижной точке. Пусть $(X, |\cdot|)$ – комплексное банахово пространство, $(\cdot, \cdot)$ – непрерывное по норме $|\cdot|$ скалярное произведение на X с нормой $\|\cdot\|$, G – абелева полугруппа $|\cdot|$ -непрерывных линейных $\|\cdot\|$ -изометрий с $|g| \leq 1$ при $g \in G$, а $z \in X$ – такой элемент, что множество $Z = \{gz \mid g \in G\}$ относительно $|\cdot|$ -компактно. Пусть K – $|\cdot|$ -замкнутая выпуклая оболочка множества Z . При этих условиях существует в точности один такой элемент $y \in K$, что $gy = y$ при $g \in G$, и $\{u \in K \mid gu = u\}$ – замкнутая выпуклая оболочка множества $\{hz^g \mid h \in G\}$, $g \in G$; здесь x^g определяется как предел по норме $|\cdot|$ последовательности

$$(1/n) \sum_0^{n-1} g^k x,$$

который существует при $x \in K$, $g \in G$, и отображение $x \mapsto x^g$ выпукло на K , причем $gx^g = x^g$ и $x - x^g \perp \text{inv } g$. (Доказательство этого факта использует теорему Маркова–Какутани и интеграл по мере Хаара на компактификации Бора в качестве среднего и поэтому выглядит крайне несовременным по сравнению с доказательствами Маака и особенно Гринлифа, доказывающего существование среднего на не обязательно коммутативных группах с помощью теоремы Рылль-Нардзевского о неподвижной точке [191].) Тем не менее формулировка утверждения наглядна, и поэтому интересно, можно ли распространить эту теорему Бло о неподвижной точке хотя бы на случай аменабельных полугрупп изометрий.

В [6] обсуждаются различные определения спектра и схемы доказательства теоремы об интеграле (с помощью теоремы о разностях) и некоторые варианты и обобщения теоремы Люмиса о разреженном спектре (см. [141; гл. VI]), а также доказательство теоремы, утверждающей, что ограниченная равномерно непрерывная функция на коммутативной локально компактной группе почти периодична, если спектр Арвсона (см. [8]) этой функции дискретен. Этот подход существенно развивается в [16], [17], [22] с помощью общего понятия спектра элемента относительно класса функций. Пусть $\text{UCB}(\mathbf{J}, X)$ – банахово пространство всех равномерно непрерывных ограниченных функций на направленном вправо луче или на всей прямой $\mathbf{J}$ ($\mathbf{J} \cap \mathbb{R}_+ \in \{\mathbf{J}, \mathbb{R}_+\}$ или $\mathbf{J} = \mathbb{R}$) со значениями в банаховом пространстве X . Пусть $\mathcal{F}$ – класс функций в пространстве $\text{UCB}(\mathbf{J}, X)$. Понятие спектра $\text{sp}_{\mathcal{F}}(\varphi)$ функции $\varphi \in \text{UCB}(\mathbb{R}, X)$ относительно класса $\mathcal{F}$ определяется как множество общих нулей преобразований Фурье суммируемых функций, ограничение свертки которых с данной функцией на луч (если это луч, а не прямая) принадлежит классу $\mathcal{F}$. С помощью этого понятия спектра исследуются задачи о разностях и интеграле. Сходные результаты получил ранее Баскаков для $\mathbf{J} = \mathbb{R}$ [27]. Несколько более слабые утверждения приведены в [105].

В [33] приведен краткий обзор известных в то время свойств так называемых диссипативных слабо почти периодических функций (т.е. функций, среднее значение модуля которых равно нулю). В частности, приведен пример Рудина диссипативной функции на группе целых чисел, не допускающей равномерной аппроксимации преобразованиями Фурье–Стилтьеса элементов алгебры мер на окружности. Аналогичный пример приведен в [34], где также доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА К [34]. Пусть G – локально компактная топологическая группа, S – ее замкнутая некомпактная подполугруппа. Пусть пространство $\text{WAP}(S)$

имеет инвариантное среднее, а групповая операция непрерывна в каждой точке произведения $S \times S^w$, где S^w – слабо почти периодическая компактификация полугруппы S .

(I) Пусть $f \in WAP(S)$. Следующие условия равносильны:

- (1) каноническое непрерывное продолжение f^w функции f на S^w обращается в нуль на минимальном идеале (ядре) $K(S^w)$ полугруппы S^w ;
- (2) $M(|f|) = 0$, где M – единственное инвариантное среднее на $WAP(S)$;
- (3) нулевая функция принадлежит слабому замыканию орбиты функции f в $WAP(S)$;
- (4) для любого $\varepsilon > 0$ и любого компактного подмножества K в S существует такой элемент $s \in S$, что $\varepsilon > \sup\{|f(ks)| \mid k \in K\}$.

(II) Пусть, кроме того, подполугруппа S содержит единичный элемент группы G , а функция $f \in WAP(G)$ диссипативна (т.е. удовлетворяет эквивалентным условиям (1)–(4)). Пусть U_0 – компактная окрестность единичного элемента в G , и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует такая компактная окрестность $V = V(U_0, f, \varepsilon)$ единичного элемента в G , что для любого $s \in S$ существует элемент $r \in S$, удовлетворяющий условиям $(V + s) \cap (U_0 \cap S + r) \neq \emptyset$ и $\varepsilon > \sup\{|f(tr)| \mid t \in U_0 \cap S\}$.

Пусть G – бесконечная дискретная группа. Связь теории слабо почти периодических функций с теорией так называемых тонких множеств в G обсуждалась в [95], где рассматривались продолжения ограниченных непрерывных функций на подмножествах до почти периодических функций на группе, и в [57], где изучались связи между множествами Сидона в G , такими множествами $F \subset G$, что все пересечения вида $F \cap gF$ и $F \cap Fg$, $g \neq e$, конечны, и такими множествами $F \subset G$, что любая функция на G , обращающаяся в нуль вне F , слабо почти периодична как элемент пространства $l^\infty(G)$. Следующие важные количественные результаты об аддитивной полугруппе $\mathbb{N}$ неотрицательных целых чисел были получены в этом направлении в [185]. Пусть $W(\mathbb{N})$ – пространство слабо почти периодических функций на $\mathbb{N}$, $W_0(\mathbb{N}) = \{f \in W(\mathbb{N}) \mid \text{функция } |f| \text{ имеет нулевое среднее}\}$ – подпространство диссипативных функций. Пусть

$$W_{00}(\mathbb{N}) = \{f \in W_0(\mathbb{N}) \mid \text{если } k_n \rightarrow \infty \text{ и } f_{k_n} \rightarrow g \text{ слабо, то } g \rightarrow C_0(\mathbb{N})\},$$

где f_k обозначает сдвиг f на k при $k \in \mathbb{N}$. Напомним, что множество Сидона в $\mathbb{N}$ – это такое множество $E \subset \mathbb{N}$, что любой элемент пространства $c_0(E)$ последовательностей на E , стремящихся к нулю на бесконечности, есть ограничение на E последовательности коэффициентов Фурье суммируемой функции. Оказывается, если A – множество Сидона, то его характеристическая функция принадлежит пространству $W_{00}(\mathbb{N})$. На примерах показано, что $W_{00}(\mathbb{N})$ – правильная часть пространства $W_0(\mathbb{N})$; более того, существует такая функция $f \in W_0(\mathbb{N}) \setminus C_0(\mathbb{N})$, что $\|f_{k_n} - f\|_\infty \rightarrow 0$ по некоторой последовательности $k_n \rightarrow \infty$.

И условия сильной компактности, и условия слабой компактности подмножеств пространств почти периодических или слабо почти периодических функций являются частными случаями вопросов о компактности и слабой компактности подмножеств в пространствах ограниченных функций или (сильно или слабо) непрерывных функций и поэтому непосредственно связаны с общими задачами линейного анализа (см. [76],

[128], [129], [208]), но иногда бывает нужно располагать условиями компактности в тех или иных специальных терминах. В [29] приведен ряд условий того, что данная ограниченная последовательность почти периодических функций на числовой прямой слабо сходится. Эти условия позволяют охарактеризовать относительно слабо компактные подмножества в пространстве почти периодических функций на прямой. Распространение этих результатов на другие группы и на случай функций с векторными значениями представляет нерешенную задачу.

Родственной проблемой является аналог теоремы Дини для почти периодических функций. Пусть G – группа. Функция f называется почти периодической по Мааку, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие $G = \bigcup_i A_i$, $1 \leq i \leq n$, удовлетворяющее условию $|f(xay) - f(xby)| < \varepsilon$ для всех $x, y \in G$ и всех $a, b \in A_i$, $1 \leq i \leq n$. Согласно [98], если монотонно неубывающая последовательность (вещественных) почти периодических функций на группе G сходится поточечно к почти периодической функции, то эта последовательность сходится равномерно. Было бы интересно выяснить возможности распространения этой теоремы на другие классы почти периодических функций и прежде всего – на слабо почти периодические функции.

Область приложения теории почти периодических функций к дифференциальным уравнениям настолько обширна, что даже ссылок на указанные выше обзоры по частным вопросам [130], [196], [205] недостаточно, чтобы составить представление о богатстве этой тематики. Мы избегаем цитирования работ по теории дифференциальных уравнений, даже если они существенно используют аппарат почти периодических функций, но обсудим вопросы, важные для самой теории почти периодических функций и ее приложений в других областях. Так, вопрос о существовании почти периодического решения обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с почти периодической правой частью сводится к вопросу о скалярной почти периодичности неопределенного интеграла от скалярно почти периодической функции. Это – одна из центральных задач в книге Америко [2], где подробно рассматриваются почти периодические функции и скалярно почти периодические функции (последние – под названием “слабых” почти периодических функций, как и в книге [141]) и их приложения к теории дифференциальных уравнений. В частности, в [2] получено следующее обобщение теоремы Боля–Бора: если J – бесконечный или полубесконечный промежуток на $\mathbb{R}$ и если $f: J \rightarrow X$ – почти периодическая функция со значениями в равномерно выпуклом банаховом пространстве X с ограниченным неопределенным интегралом, то этот интеграл – почти периодическая функция. Полезное упражнение – вывести эту теорему при $J = \mathbb{R}$ из теоремы 1. Указание состоит в автоматической рефлексивности всех равномерно выпуклых банаховых пространств [66] и слабой компактности ограниченных подмножеств рефлексивных пространств.

Описанный выше спектральный подход работы [6] к теореме Кадеца об интеграле и о разностях и к теореме о почти периодичности ограниченной равномерно непрерывной функции на коммутативной локально компактной группе (в предположении, что спектр Арвесаона [8] этой функции дискретен) обобщался в другом направлении в [12] и в [15], где рассматривался неопределенный интеграл от функции со значениями в полном локально выпуклом топологическом векторном пространстве, изучались его общие свойства и рассматривались интегралы от функций со значениями в равномерно замкнутом инвариантном относительно сдвигов подпространстве пространства рав-

номерно непрерывных функций. В [18] был получен вариант теоремы о разностях для функций на топологической группе со значениями в пространстве Фреше A , связанный со следующей теоремой непрерывности. Пусть $\gamma \in G$ и функция $\Delta_\gamma f$ определена формулой $(\Delta_\gamma f)(t) = f(t\gamma) - f(t)$, $t \in G$. Пусть $\Delta_\gamma f$ непрерывна в единичном элементе e группы G для всех γ из некоторой окрестности элемента e . Тогда f непрерывна в e , если A не содержит подпространства, изоморфного c_0 , а f ограничена. Аналогичный результат получен, если A – локально выпуклое пространство и область значений f слабо относительно компактна. Сходные условия непрерывности были использованы в [158] в доказательстве почти периодичности функций (в духе [127]) при следующих предположениях. Пусть S – полутопологическая полугруппа с единичным элементом e , f – такая ограниченная непрерывная функция на S , что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое вполне ограниченное справа множество A (т.е. для любой окрестности V единичного элемента e существует такое натуральное число N и такие элементы $t_1, \dots, t_n \in A$, что $A \subset \bigcup \{Vt_i \mid 1 \leq i \leq n\}$), что множество $\{s \in A \mid \|L_s f - L_t f\| < \varepsilon\}$ непусто для всех $t \in S$. В [158] доказано, что если $\|L_{s_\alpha} f - f\| \rightarrow 0$ для любой сети s_α в S , сходящейся в S к e , то f – почти периодическая функция на S .

Хотя линейные дифференциальные уравнения высших порядков с почти периодическими коэффициентами могут не иметь почти периодических решений, некоторые задачи о линейных дифференциальных уравнениях с почти периодическими коэффициентами имеют большое значение и в самой теории, и в ее приложениях. Полугруппы операторов и периодические эволюционные системы образуют пограничную область между ядром теории и ее приложениями к топологической динамике и дифференциальным уравнениям. Результаты работы [188] особенно близки одной из основных тем настоящего обзора: там уточняются условия на банахово пространство X и асимптотическую траекторию $u: [0, \infty) \rightarrow X$ периодической эволюционной системы, обеспечивающие слабую почти периодичность траектории u . Этот результат, вместе с теорией де Лю–Гликсберга [67] почти периодических функций на полугруппах, позволяет распространить эргодические теоремы о сильных пределах на случай общих периодических эволюционных систем. Получены также условия слабой почти периодичности решений неавтономных (линейных и нелинейных) задач Коши и о существовании почти периодических и периодических решений таких задач. Как показывают примеры, условие периодичности системы здесь нельзя заменить условием почти периодичности. В связи с этим замечателен результат статьи [169], из которого следует, что все траектории неавтономного уравнения $\dot{X} = A(t)X$, где $X \in SO(n)$ и $A(t) \in so(n)$ – почти периодическая функция со значениями в косимметрических матрицах, бесконечно много раз возвращаются к начальному условию с заданной точностью (для условно периодического коэффициента есть количественная версия этого утверждения). Аналогичный результат справедлив на любой простой компактной связной группе Ли.

В применении к решениям дифференциальных уравнений, связь между компактностью множества значений решения абстрактного дифференциального уравнения с оператором, порождающим сильно непрерывную однопараметрическую группу ограниченных операторов в банаховом пространстве, и почти периодичностью этого решения была установлена уже в [235]. Условия принадлежности высших производных решения линейной дифференциально-разностной системы на прямой или полупрямой тому или иному классу функций со значениями в банаховом пространстве (в том чис-

ле классам почти периодических, асимптотически почти периодических, слабо почти периодических и равномерно непрерывных функций и различным классам эргодических функций) в связи с некоторыми наследственными свойствами классов почти периодических функций и их обобщений получены в [20]. Принадлежность решений полулинейных абстрактных дифференциальных уравнений $u'(t) = Au(t) + f(t, u(t))$ различным классам почти периодических функций, где A – порождающий оператор C_0 -полугруппы, и связанные с этим свойства почти периодических функций исследовались в большом числе работ. Современная библиография по этой теме приведена в [24].

7.4. Обобщения почти периодических функций и топологическая динамика.

Обобщения понятия почти периодической функции весьма многообразны. Это, в частности, асимптотически почти периодические функции, асимптотически слабо почти периодические функции, псевдо-почти периодические функции (см., например, [231], [232]), почти периодические функции Левитана (см., например, [11], [13], [14], [141]), равносильные почти автоморфным функциям Бохнера [41]–[43] (см. также [215]; так называемым *возмущениям* почти периодических функций Левитана и соответствующей теореме о неопределенном интеграле посвящена работа [21]), дистальные (мы кратко обсуждаем их ниже), рекуррентные (которые, оказывается, нужно отличать от эргодических [1]) и многие другие. В [176] класс почти периодических функций расширяется с помощью интегрирования по Данжуа.

Асимптотически почти периодические функции на правом луче $\mathbf{J} \subset \mathbb{R}$ могут быть определены несколькими способами: с помощью понятия почти периода, с помощью условия компактности (или слабой компактности) орбиты, отвечающей лучу, и как семейство сумм почти периодических (слабо почти периодических) функций и функций, стремящихся к нулю на бесконечности (ср. [22], [187]). Один из самых замечательных результатов статьи [187] состоит в том, что если X – банахово пространство, $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{J} = (a, +\infty)$, f – асимптотически почти периодическая функция на $\mathbf{J}$ со значениями в X , а $F: \mathbf{J} \rightarrow X$ определена формулой

$$F(t) = \int_a^t f(u) du, \quad t \in \mathbf{J},$$

и если либо образ функции F на $\mathbf{J}$ ограничен в X и X не содержит изоморфной копии пространства c_0 , либо образ функции F на $\mathbf{J}$ слабо относительно компактен в X , то F является асимптотически почти периодической функцией тогда и только тогда, когда f слабо почти периодична, а также тогда и только тогда, когда стремящееся к нулю слагаемое несобственно интегрируемо по Риману на $\mathbf{J}$. Аналогичный результат о слабой почти периодичности траекторий те же авторы получают в [188] для нелинейных полугрупп преобразований. В [52] указаны условия асимптотической почти периодичности функции $f: [0, \infty) \rightarrow X$, где X – банахово пространство, в терминах поведения преобразования Лапласа $\hat{f}$ функции f вблизи мнимой оси. В частности, если f ограничена и удовлетворяет некоторому условию типа эргодичности, а функция $\hat{f}$ имеет лишь счетное множество особенностей на мнимой оси, то f асимптотически почти периодична. Этот результат связан с изучением асимптотического поведения и устойчивости C_0 -полугрупп в банаховых пространствах, см. [5], [10], [148], [218].

Пусть X – банахово пространство, $\mathbf{J} \in \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\}$ и $\text{CB}(\mathbf{J}, X)$ – банахово пространство ограниченных непрерывных функций на $\mathbf{J}$ со значениями в X . В [26] введены классы функций в $\text{CB}(\mathbf{J}, X)$, содержащие некоторые известные классы функций типа почти периодических. В [25] изучаются эргодические функции в смысле Изеки, который ввел в [114] общее понятие эргодичности функции на абелевой полугруппе как условие, что средние арифметические некоторых сдвигов этой функции равномерно приближают некоторую постоянную. Это понятие позволяет расширить область применимости подхода Эберлейна [74] к эргодичности полугрупп операторов в X . Для инвариантных относительно сдвигов замкнутых подпространств $\mathcal{A}$ пространства всех ограниченных функций на J со значениями в X получена теорема о разностях (показано, что если $\mathcal{A}$ содержит постоянные функции и ϕ – эргодическая функция, разности которой лежат в $\mathcal{A}$, то $\phi \in \mathcal{A}$), положившая основу исследований в [16], [17], [22], результаты которых описаны выше в п. 7.3. Для псевдо-почти периодических функций вопросы интегрирования рассматривались в [231], [232]. В [23] понятие эргодичности распространено на случай неограниченных функций $\varphi: J \rightarrow X$, где J – подполугруппа локально компактной абелевой группы G и X – банахово пространство, а функции φ предполагаются непрерывными и мажорируемыми некоторым весом w на группе G . В частности, установлена полная эргодичность орбит (неограниченных) сильно непрерывных представлений $T: G \rightarrow L(X)$, дуальные представления которых не имеют точечного унитарного спектра. Изучение спектров функций использует технику алгебр Берлинга $L_w^1(G)$, для которых получено новое описание пространств максимальных примарных идеалов для неквазианалитических весов w . В терминах трансляционно инвариантных классов функций получены условия непустоты приведенного спектра Берлинга, обобщающие тауберovu теорему Винера.

Во многих случаях теорема 1 допускает распространение на более широкий класс представлений групп без изменения технических приемов за счет модификации топологии в функциональном пространстве. Например, пусть G – локально компактная хаусдорфова группа, снабженная левой мерой Хаара. Если $f \in L^1(G)$, то отображение $g \mapsto f * g$, $g \in L^\infty(G)$, задает линейное преобразование пространства $L^\infty(G)$. Обозначим через $\tau_c [\tau_w]$ слабейшую топологию на $L^\infty(G)$, в которой все эти преобразования становятся непрерывными отображениями в $(L^\infty(G), \|\cdot\|_\infty)$ [в $(L^\infty(G), \sigma)$, где σ означает слабую топологию на $L^\infty(G)$]. В [63] введено множество $R\text{-}\tau_c\text{-AP}$ [$R\text{-}\tau_w\text{-AP}$] функций из пространства $L^\infty(G)$, которые почти периодичны справа относительно τ_c [относительно τ_w] как функции, правые орбиты которых относительно τ_c -компактны [τ_w -компактны]. Показано, что множество $R\text{-}\tau_c\text{-AP}$ является τ_c -замыканием множества $AP(G)$, а $R\text{-}\tau_w\text{-AP}$ является τ_c -замыканием множества $WAP(G)$. (Если G бесконечна, то эти замыкания строго содержат $AP(G)$ и $WAP(G)$ соответственно.) Так как левый сдвиг τ_c -непрерывен, можно продолжить единственное (лево-) инвариантное относительно сдвигов среднее на $AP(G)$ до аналогичного среднего на $R\text{-}\tau_c\text{-AP}$. Полученное продолжение является топологически (лево-) инвариантным средним и оно единственно. Векторные аналоги этих классов почти периодических функций и слабо почти периодических функций выглядят естественной областью для проверки аналога теоремы разложения.

Есть и другие классы функций, обобщающие стандартные почти периодические функции и доказавшие свою продуктивность в гармоническом анализе, как почти периодические функции Бора–Френеля [175] и их обобщения на высшие порядки и про-

извольные локально компактные абелевы группы [199]. Если рассматриваемая полугруппа является аменабельной группой, то “равномерное” условие эргодичности по Изеки означает, что все инвариантные средние (неотрицательные непрерывные функционалы на пространстве ограниченных непрерывных функций на полугруппе, принимающие единичное значение на единичной функции и инвариантные относительно сдвигов на полугруппе) принимают на этой функции одно и то же значение (см., например, [201]). В 1978 г. Жиков [237] (см. также более подробное изложение в [236]) ввел эргодические алгебры в $\mathbb{R}^n$, используя неравномерный вариант определения среднего, применявшийся ранее Безиковичем [38] при введении его класса почти периодических функций. Опишем вариант конструкции Жикова в несколько более общей ситуации, а именно для сепарабельных аменабельных локально компактных групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть G – локально компактная группа с левоинвариантной мерой Хаара μ , K – компактное подмножество в G , а $\delta > 0$ – число. Компактное множество $F \subset G$ называется (K, δ) -инвариантным, если $\mu(F \Delta KF) < \delta \mu(F)$. Последовательность F_n , $n \in \mathbb{N}$, компактных подмножеств в G называется *последовательностью Фолнера*, если для любого компакта K в G и любого $\delta > 0$ множество F_n является (K, δ) -инвариантным при достаточно больших n . Последовательность $\{K_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, симметричных ($(K_n)^{-1} = K_n$) компактных подмножеств положительной меры в группе G , удовлетворяющих следующим условиям:

- (1) последовательность K_n монотонно возрастает по включению, т.е. $K_n \subset K_m$ при $n < m$,
- (2) последовательность K_n – исчерпывающая, т.е. $G = \bigcup \{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
- (3) предельное соотношение $\mu(gK_n \cap K_n)/\mu(K_n) \rightarrow 0$ выполняется равномерно на компактах,

называется *суммирующей последовательностью* [177].

Локально компактная группа G с левоинвариантной мерой Хаара μ называется *аменабельной*, если пространство $L^\infty(G)$ существенно ограниченных измеримых функций на G допускает (лево)инвариантное среднее. Оказывается (см., например, [177; утверждения 4.5–4.16 и упражнение 1-10]), для сепарабельной локально компактной группы G следующие условия равносильны:

- (1) группа G аменабельна,
- (2) группа G допускает последовательность Фолнера F_n , $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющую условию $\bigcup_n F_n = G$,
- (3) группа G допускает суммирующую последовательность.

Кроме того, каждая монотонно возрастающая (по включению) исчерпывающая последовательность Фолнера является суммирующей последовательностью.

Предположим, что задано биинвариантное действие группы G слева сохраняющими меру преобразованиями на лебеговском вероятностном пространстве $(X, \mathcal{A}, \nu)$ с $\nu(X) = 1$. Для функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим через $A(F, f)(x)$ среднее

$$A(F, f)(x) = \mu(F)^{-1} \int_F f(gx) d\mu(g).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Последовательность Фолнера F_n называется *умеренной*, если существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\mu\left(\bigcup_{k < n} F_k^{-1} F_n\right) \leq C \mu(F_n) \quad (10)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

Справедлива следующая эргодическая теорема.

ТЕОРЕМА L (индивидуальная эргодическая теорема для сепарабельных аменабельных локально компактных групп, [144]). Пусть G – сепарабельная аменабельная локально компактная группа, действующая на пространстве с мерой $(X, \mathcal{A}, \nu)$ сохраняющими меру преобразованиями, и пусть F_n – умеренная последовательность Фолнера. Тогда для любой функции $f \in L^1(\nu)$ существует такая G -инвариантная функция $\bar{f} \in L^1(\nu)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(F_n, f)(x) = \bar{f}(x) \quad \text{почти всюду.}$$

В частности, если действие группы G эргодично, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(F_n, f)(x) = \int_X f(x) d\nu(x) \quad \text{почти всюду.}$$

Известно, что некоторое ограничение на последовательность Фолнера F_n в этой теореме существенно, даже при $G = \mathbb{Z}$, но любая последовательность Фолнера имеет умеренную подпоследовательность Фолнера [144]. В частности, любая сепарабельная аменабельная локально компактная группа допускает умеренную последовательность Фолнера.

Перейдем к определению эргодических алгебр функций.

Пусть G – аменабельная локально компактная группа. Измеримая локально интегрируемая функция φ на G называется *усреднимой* к числу $M(\varphi)$, и $M(\varphi)$ называется *средним значением* функции φ , если последовательность

$$\mu(F_n)^{-1} \int_{F_n} \varphi(g) d\mu(g), \quad n \in \mathbb{N},$$

сходится к числу $M(\varphi)$ для любой умеренной последовательности Фолнера F_n в G . Инвариантная относительно сдвигов подалгебра X алгебры $UCB(G)$ ограниченных равномерно непрерывных функций на G называется *алгеброй со средним*, если X инвариантно относительно сдвига и каждая функция из X усреднима.

Рассмотрим совокупность всех измеримых по мере Хаара функций φ на G , локально интегрируемых по мере Хаара, для которых *p-преднорма Безикевича*

$$\|\varphi\|_p^p = \sup_{\{F_n\}} \limsup_{n \rightarrow \infty} (\mu(F_n))^{-1} \int_{F_n} |\varphi(g)|^p d\mu(g)$$

конечна, где верхняя грань берется по всем умеренным последовательностям Фолнера F_n в G . Функция φ называется *p-почти периодической* по Безиковичу, если она

является пределом конечных линейных комбинаций матричных элементов непрерывных неприводимых конечномерных унитарных представлений группы G по p -преднорме Безиковича. Семейство $B^2(G)$ функций, 2-почти периодических по Безиковичу, образует евклидово пространство относительно (полу)скалярного произведения, естественно определяемого средним значением. Нетрудно модифицировать известные доказательства полноты пространства $B^2(\mathbb{R}^n)$ [38], [236] и доказать полноту полученного евклидова пространства $B^2(G)$ (как мы увидим ниже на примере, имеет место нетривиальная зависимость преднорм вида

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{F_n} |\varphi(g)|^2 d\mu(g) \right)^{1/2}$$

на пространстве $B^2(G)$ от выбора умеренной исчерпывающей монотонной последовательности Фолнера $\{F_n\}$). Заметим, что функция F , являющаяся суммой локально равномерно сходящегося ряда по матричным элементам непрерывных неприводимых унитарных представлений, является почти периодической функцией Безиковича. Действительно, из построения предельной функции G для подпоследовательности частных сумм ряда, используемой в доказательстве полноты пространства $B^2(G)$, следует, что функция $F - G$ стремится к нулю на бесконечности на группе G , причем разность $F - G$ можно считать равномерно сколь угодно малой. Следовательно, F — почти периодическая функция по Безиковичу и исходный ряд есть ее ряд Фурье.

В связи с известной характеристикой равномерно непрерывных функций с единственным средним на сепарабельных аменабельных локально компактных группах [201], равномерной непрерывностью слабо почти периодических функций на группах и единственностью среднего на алгебре слабо почти периодических функций *каждая слабо почти периодическая функция на сепарабельной аменабельной локально компактной группе является почти периодической по Безиковичу*. Обратное неверно, поскольку функция, почти периодическая по Безиковичу, не обязана иметь единственное среднее (примером может служить функция из примечания к § 5 гл. VII в [236], т.е. функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sin(x/n), \quad x \in \mathbb{R};$$

она почти периодична по Безиковичу как сумма локально равномерно сходящегося тригонометрического ряда без свободного члена, но инвариантные средние принимают на этой функции и ненулевые значения, поскольку

$$T^{-1} \int_0^T f(x) dx \geq c_0$$

для всех $T > 1$ и некоторого $c_0 > 0$).

В общем случае замыкание W^2 алгебры со средним X по преднорме Безиковича есть гильбертово пространство, в котором естественно действует группа сдвигов на группе, и это действие непрерывно, поскольку функции из алгебры равномерно непрерывны по условию. Алгебра со средним X называется *эргодической*, если всякая инвариантная функция из соответствующего пространства W^2 эквивалентна постоянной, и локально интегрируемая функция f на G называется эргодической, если

она принадлежит пространству W^2 , отвечающему некоторой эргодической алгебре. (В частности, всякая функция, почти периодическая по Безиковичу, эргодична, поскольку сдвиги на группе оставляют на месте только свободный член ряда Фурье.) В [236] указаны применения эргодических алгебр к теории усреднения дифференциальных операторов.

Пусть X – банахово пространство, G – локально компактная и σ -компактная абелева группа с левой мерой Хаара μ , а T – слабо почти периодическое представление G в X . В [142] показано, что для любой последовательности эргодических вероятностных мер (μ_n) на G последовательность интегралов

$$\int w(t)T(t)x d\mu_n(t)$$

сходится сильно для любой 1-почти периодической функции Безиковича w на G и любого $x \in G$ (конечно, для слабо почти периодических функций w предел не зависит от выбора последовательности (μ_n)). Кроме того, из результатов в [142] следует, что для любой умеренной последовательности Фолнера F_n , любой функции $f \in L^1(X, \nu)$ и любой 1-почти периодической функции Безиковича w на G предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1/\mu(F_n)) \int_{F_n} w(t)f(tx) d\mu(t)$$

существует почти всюду (если w – слабо почти периодическая функция, то предел не зависит от выбора последовательности F_n).

Пусть G – локально компактная группа. Последовательность $\{\mu_n\}$ вероятностных мер на G называется *сильно (слабо) эргодической*, если последовательность $\{\pi(\mu_n)\xi\}$ сходится по норме (слабо) к элементу пространства $\{\xi \in H: \pi(g)\xi = \xi \text{ для всех } g \in G\}$ для любого непрерывного неприводимого унитарного представления π группы G в гильбертовом пространстве H и любого $\xi \in H$. В [134] получен ряд характеристик сильных и слабых эргодических последовательностей и показано, что существование сильной или слабой эргодической последовательности равносильно σ -компактности группы G . Пусть теперь группа G локально компактна и σ -компактна. Последовательность μ_n вероятностных мер на G называется *усредняющей*, если

$$\int \pi(g)x d\mu_n(g) \rightarrow P_\pi x \text{ слабо при } n \rightarrow \infty$$

для любого $x \in X$ и любого слабо почти периодического представления π группы G в банаховом пространстве X , где P_π – эргодический проектор, отображающий пространство X на подпространство π -инвариантных векторов. В [143] доказано следующее утверждение о связи между сильным и слабым усреднением: если $\{\mu_n\}$ – усредняющая последовательность мер и f – такая измеримая функция на G , что

$$\limsup_n \int |f|^r d\mu_n < \infty \text{ для некоторого } r > 1,$$

то последовательность интегралов

$$\int f(g)\pi(g)x d\mu_n(g)$$

сходится сильно для любого слабо почти периодического представления π и любого вектора x в пространстве представления π тогда и только тогда, когда последовательность интегралов

$$\int f(g)l(g) d\mu_n(g)$$

сходится для любой почти периодической функции l на G . Более специальные результаты получены для случая, когда f – почти периодическая функция Безиковича¹¹.

В теории дифференциальных уравнений полезен также класс функций, имеющих единственное модульное среднее над почти периодическими функциями (это условие также является условием типа эргодичности [22]). А именно, если G – топологическая группа, E – локально выпуклое пространство и M – такое векторное подпространство пространства $CB(G, E)$ непрерывных ограниченных E -значных функций, что $am \in M$ для любых $m \in M$ и любых скалярных почти периодических функций a на G , то говорят, что M допускает *единственное модульное среднее значение*, если все скалярные функции вида $aF(m)$, где $F \in E^*$, $a \in AP(G)$, $m \in M$, имеют единственное инвариантное среднее значение в обычном смысле. (Это условие можно также выразить в терминах векторнозначных средних (ср. [230]).) Иногда удается заменить этим метрическим свойством условие слабой компактности семейства сдвигов с сохранением характера утверждений [25]. Попытки проделать работу этого рода для рекуррентных и так называемых эргодических функций с помощью эргодических теорем предприняты в [65], где аналоги разложения Эберлейна получены за пределами класса слабо почти периодических функций. Свойства почти периодических точек динамической системы рассматриваются в [178]. Почти периодические функции в связи с динамическими системами на более общих топологических пространствах рассматривались в [170], что позволило унифицировать доказательства ряда известных теорем.

Функция на локально компактной группе, на которой все левоинвариантные средние (если G – некомпактная локально компактная группа, то на пространстве $L^\infty(G)$ заведомо имеется несчетно много левоинвариантных средних) принимают общее значение, называется *почти сходящейся слева* (и это свойство не совпадает с введенной выше усреднимостью). В [186] приведена характеристика почти сходящихся функций на группах, аменабельных в дискретной топологии (например, разрешимых). Справедливость этой характеристики может служить критерием того, что группа аменабельна в дискретной топологии [201]. Если G – бесконечная компактная группа, то множество инвариантных средних на пространстве $C(G)$ одноэлементно (в силу единственности нормированной меры Хаара), а множество инвариантных средних на пространстве $L^\infty(G)$ может содержать и несчетное семейство элементов (подробности можно найти в [177]), а может быть одноэлементным (см. [58] и п. 8.2 ниже), и в последнем случае все функции из $L^\infty(G)$ являются почти сходящимися слева. В любом случае, кроме непрерывных функций, почти сходящимися функциями на группе G являются и все функции, интегрируемые по Риману по мере Хаара. В [209] для метризуемых компактных групп указаны достаточные условия того, что почти сходящиеся функции на данной компактной группе не исчерпываются функциями, интегрируемыми по Риману по мере Хаара.

¹¹Описание эргодических (усреднимых) векторов в банаховом пространстве представления полугруппы приведено в статье автора “Равномерное распределение, инвариантные средние и интеграл Римана” (Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 3. С. 144–154).

Семейство ограниченных непрерывных функций с единственным средним на некомпактной локально компактной группе не образует алгебру, и для этого пространства нет аналога разложения Эберлейна, но можно ожидать, что подалгебры в этом пространстве допускают такое разложение. Предварительные результаты в этом направлении получены в [199], [201].

Отметим, что почти периодические функции Бора на аменабельной локально компактной группе почти сходятся слева [164].

Родственный класс образуют дистальные функции, но мы здесь не касаемся обобщений понятия дистальности на случай функций на группе со значениями в локально выпуклых пространствах (напомним, что действие топологической группы G (с единицей e) на топологическом пространстве X — это такое непрерывное отображение $\alpha: G \times X \rightarrow X$, что $\alpha(e, x) = x$ для всех $x \in X$ и $\alpha(g_1 g_2, x) = \alpha(g_1, \alpha(g_2, x))$ для всех $g_1, g_2 \in G$ и всех $x \in X$ (тройка $\{X, G, \alpha\}$ называется G -пространством), действие группы G на компактном метрическом пространстве (X, d) называется *дистальным*, если для любых различных $x, y \in X$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $d(gx, gy) > \varepsilon$ для всех $g \in G$, а функция называется *дистальной*, если замыкание ее орбиты компактно и действие группы на этом компакте дистально). Класс дистальных функций и его связи с почти периодическими функциями обсуждаются, в частности, в [37], [121], [108], [136], [157]–[166]. Отметим еще два факта, связывающие рассматриваемые явления с топологической динамикой. Если G — польская (полная сепарабельная метризуемая) группа, то любое польское G -пространство можно (топологически) вложить в компактное польское G -пространство тогда и только тогда, когда группа G локально компактна [194]. Кроме того, напомним, что действие α топологической группы G на компактном пространстве X называется *слабо почти периодическим*, если α -орбита любой непрерывной функции на X слабо относительно компактна в $C(X)$. В [155] показано, что топологическая группа G предкомпактна (т.е. топологически изоморфна подгруппе компактной группы) тогда и только тогда, когда любое непрерывное действие группы G на компактном пространстве слабо почти периодически.

Класс почти периодических функций на полутопологических полугруппах существенно отличается от соответствующего класса на топологических группах и, в частности, это различие существенно на уровне существования средних. А именно, если S — полутопологическая полугруппа и $AP(S)$ — пространство почти периодических функций на S , то левоинвариантное среднее на $AP(S)$ существует тогда и только тогда, когда любое раздельно непрерывное, равностепенно непрерывное и аффинное действие полугруппы S на компактном выпуклом подмножестве K отделимого локально выпуклого пространства имеет общую неподвижную точку в K (см. [132]).

Разложение Эберлейна, являющееся центральным вопросом теории слабо почти периодических функций и одной из основных тем настоящего обзора, имеет многообразные приложения всюду, где возникает понятие почти периодичности. В частности, это разложение было успешно применено при изучении структуры почти периодических мультипликаторов (как элементов пространства $L^\infty(G)$) из пространства $L^1(G)$ в пространство $L^\infty(G)$ на локально компактной абелевой группе G в сильной или слабой операторной топологии в [64] как мультипликаторов, отображающих единичный шар пространства $L^1(G)$ в относительно компактное подмножество в $L^\infty(G)$ и при изучении мультипликаторов Ганкеля–Шура в пространстве Харди [3].

§ 8. Другие направления исследований, связанные с почти периодическими функциями

Круг вопросов, связанных с теорией почти периодических функций и представлений, далеко не сводится к перечисленным выше классическим задачам. Мы кратко опишем некоторые современные направления исследований в этой области.

8.1. Компактификация Бора, [MAP] группы и [FIR] группы.

Топологическая группа называется *максимальной почти периодической* ([MAP]), если она имеет достаточно много топологически неприводимых представлений в конечномерных гильбертовых пространствах. Строение групп этого класса известно для связанных локально компактных топологических групп еще с конца тридцатых годов, но даже в классе общих локально компактных групп полного описания этого класса нет. Замыкание K образа группы в прямой сумме всех топологически неприводимых непрерывных представлений данной топологической группы G в конечномерных гильбертовых пространствах есть компактная топологическая группа, так называемая *боровская компактификация* группы G . Отметим, что числовые почти периодические функции на G являются в точности ограничениями на G непрерывных функций на K (это было по существу отмечено уже в [222]), и было бы интересно выяснить условия полноты в классе локально выпуклых пространств, для которых почти периодические функции на G со значениями в этих пространствах допускают автоматическое продолжение до непрерывных функций на группе K . Вопросы продолжения числовых почти периодических функций с (в том числе плотных) подгрупп полутопологических полугрупп рассматривались, в частности, в [32], [47].

Свойствам боровских компактификаций и, в частности, связям между свойствами групп G и K посвящено много работ; см. обзорную статью [60]. Отметим, что из свойства сохранения компактности для локально компактных абелевых групп (класс множеств, компактных в исходной топологии, совпадает с классом множеств, компактных в топологии, определяемой почти периодическими функциями на группе [89]) следует, что счетная на бесконечности локально компактная абелева группа является множеством типа F_σ в своей боровской компактификации, а произвольная локально компактная абелева группа является борелевским подмножеством своей боровской компактификации K [60], и это подмножество имеет нулевую меру Хаара на K , если исходная группа G некомпактна. С помощью результатов статьи [182] о сохранении компактности при переходе к боровской компактификации для так называемых [FIR] групп (локально компактных групп, все топологически неприводимые унитарные представления которых конечномерны) оба утверждения допускают распространение на этот случай. Таким образом, *счетная на бесконечности локально компактная [FIR] группа является множеством типа F_σ в своей боровской компактификации, а произвольная локально компактная [FIR] группа является борелевским подмножеством своей боровской компактификации*, и это подмножество имеет нулевую меру Хаара на K , если исходная группа G некомпактна. Свойство сохранения компактности при переходе к боровской компактификации выполняется и для более общих топологических абелевых групп [111].

8.2. Геометрия групповых алгебр. Свойства Радона–Никодима, Данфорда–Петтиса, Асплунда, Шура.

Мы уже встречались со свойством Шура для банаховых пространств. Напомним теперь определения других полезных геометрических свойств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть T – топологическое пространство, d – некоторая метрика на T . Пространство T называется *фрагментируемым с помощью метрики d* , если любое подмножество пространства T содержит непустые относительно открытые подмножества сколь угодно малого диаметра относительно метрики d .

Пусть E – банахово пространство. Говорят, что пространство E имеет *свойство Радона–Никодима*, если для любого ограниченного множества $A \subset E$ существуют его подмножества вида $\{\xi \in A \mid f(\xi) > \sup f(A) - \varepsilon\}$, где $f \in E^*$ и $\varepsilon > 0$, имеющие сколь угодно малый диаметр. Говорят, что пространство E имеет *свойство Крейна–Мильмана*, если любое ограниченное замкнутое выпуклое подмножество в E есть замкнутая выпуклая оболочка множества своих крайних точек. Говорят, что пространство E имеет *свойство Данфорда–Петтиса*, если $f_n(x_n) \rightarrow 0$ для любой слабо стремящейся к нулю последовательности $\{x_n\}$ в E и любой слабо стремящейся к нулю последовательности $\{f_n\}$ в E^* . Говорят, что пространство E имеет *свойство Асплунда*, если любое сепарабельное подпространство в E имеет сепарабельное сопряженное пространство.

Эти свойства тесно связаны между собой, и каждое из них имеет много эквивалентных вариантов, подробно описанных в [70], [71], [226]. Известно, например, что следующие условия равносильны для любого банахова пространства E :

- (а) E имеет свойство Асплунда,
- (б) единичный шар в E^* , рассматриваемый в слабой* топологии, фрагментируем относительно метрики, определяемой нормой,
- (в) E^* имеет свойство Крейна–Мильмана,
- (г) E^* имеет свойство Радона–Никодима.

Как мы только что видели, [МАР] группы – это группы, на которых семейство неприводимых непрерывных конечномерных представлений разделяет точки группы, или, что то же, семейство непрерывных почти периодических функций разделяет точки группы. Любое непрерывное унитарное представление топологической группы можно рассматривать как отображение в замкнутый единичный шар пространства непрерывных линейных операторов в пространстве представления, а этот шар можно рассматривать как компактную полутопологическую полугруппу в слабой операторной топологии. Поэтому все матричные элементы всех непрерывных унитарных представлений являются слабо почти периодическими функциями на группе. Их линейные комбинации образуют (относительно поточечного умножения) так называемую *алгебру Фурье–Стилтьеса* $B(G)$ данной топологической группы G . Таким образом, $B(G) \subset WAP(G)$. Если группа G локально компактна, то семейство матричных элементов ее регулярного представления образует подалгебру $A(G)$ алгебры $B(G)$, так называемую *алгебру Фурье* локально компактной группы G . Если G – коммутативная локально компактная группа, то алгебра Фурье $A(G)$ изоморфна групповой алгебре $L^1(\hat{G})$ группы характеров группы G . Основным руководством по

алгебрам Фурье и Фурье–Стилтьеса локально компактных групп является статья Эймара [82]. Некоторые компактификации, связанные с операторными пространствами, определяемыми непрерывными унитарными представлениями, изучены в [225].

Принадлежность классу [FIR] (и даже более общему классу [MAP] топологических групп, все непрерывные унитарные представления которых принадлежат типу I и являются прямыми суммами представлений конечного типа) может быть охарактеризована в геометрических терминах [204; замечание 2].

ТЕОРЕМА М. Пусть G – топологическая группа, семейство унитарных представлений которой разделяет точки группы. Тогда следующие условия равносильны:

- (1) группа G допускает вложение в компактную группу, и любое непрерывное унитарное представление группы G определяется непрерывным унитарным представлением этой компактной группы;
- (2) алгебра Фурье–Стилтьеса $B(G)$ группы G одновременно имеет свойство Данфорда–Петтиса и свойство Радона–Никодима.

Таким образом, геометрические свойства групповой алгебры оказываются связаны с теорией матричных элементов непрерывных представлений группы или, что то же, с теорией почти периодических функций на этой группе. Приведем некоторые известные геометрические утверждения о групповых алгебрах.

В [96] рассматриваются свойства банаховых факторпространств алгебры Фурье $A(G)$. В частности, показано, что если J – замкнутый идеал в $A(G)$ с множеством нулей $F \subseteq G$ и если существует такая замкнутая подгруппа H в G , аменабельная как дискретная группа, что $F \cap H$ содержит совершенное множество, то факторалгебра $A(G)/J$ содержит копию пространства l^1 . Отсюда следует, что в пространстве, сопряженном к $A(G)/J$, не выполняется ни свойство Радона–Никодима, ни свойство Шура. Напротив, известно, что если группа G абелева и множество F компактно и разрежено, то $A(G)/J$ не содержит копии пространства l^1 , причем сопряженное пространство $(A(G)/J)^*$ имеет и свойство Радона–Никодима, и свойство Шура.

Пусть G – локально компактная группа и $VN(G)$ – алгебра фон Неймана, порожденная левым регулярным представлением группы G . Тогда алгебра Фурье $A(G)$ группы G естественно отождествляется с предвойственным пространством алгебры фон Неймана $VN(G)$, и $VN(G)$ является модулем над $A(G)$ относительно операции $\langle u \cdot T, v \rangle = \langle T, uv \rangle$, $T \in VN(G)$, $u, v \in A(G)$.

В [30] символ $UCB(\widehat{G})$ обозначает подпространство в $VN(G)$, порожденное элементами $\{u \cdot T : u \in A(G), T \in VN(G)\}$. Если $T \in VN(G)$ и множество $\{u \cdot T : \|u\|_{A(G)} \leq 1\}$ относительно (слабо) компактно в $VN(G)$, то элемент T называется (слабо) почти периодическим. Пусть $AP(\widehat{G})$ (соответственно $WAP(\widehat{G})$) обозначает пространство всех почти периодических (соответственно слабо почти периодических) элементов в $VN(G)$. При $x \in G$ обозначим через λ_x оператор левого сдвига на x в $L^2(G)$. Пусть $C_\delta^*(G)$ обозначает C^* -алгебру, порожденную семейством $\{\lambda_x : x \in G\}$. Тогда $C_\delta^*(G) \subseteq AP(\widehat{G}) \subseteq WAP(\widehat{G})$ и $C_\delta^*(G) \subseteq UCB(\widehat{G})$. В [30] доказано, что следующие условия равносильны: (группа G конечна) $\iff$ (C^* -алгебра $UCB(\widehat{G})$ разрежена) $\iff$ ($WAP(\widehat{G})$ имеет свойство Асплунда) $\iff$ ($AP(\widehat{G})$ имеет свойство Асплунда) $\iff$ (C^* -алгебра $C_\delta^*(G)$ разрежена), и что следующие условия также равносильны: ($VN(G)$ имеет свойство Данфорда–Петтиса) $\iff$ ($UCB(\widehat{G})$ имеет свойство

Данфорда–Петтиса) $\iff (C_\delta^*(G)$ имеет свойство Данфорда–Петтиса) $\iff (G$ имеет абелеву подгруппу конечного индекса). Эквивалентность $(VN(G)$ имеет свойство Данфорда–Петтиса) $\iff (G$ имеет абелеву подгруппу конечного индекса) имеет место для любой унитарно представимой топологической группы [204].

В [56] локально компактная некомпактная группа G называется *группой Эберлейна*, если любая непрерывная слабо почти периодическая функция на G может быть равномерно приближена функциями из $B(G)$. Показано, что если G нильпотентна или если в G имеется инвариантная компактная окрестность единичного элемента, то G не является группой Эберлейна. Абелевы группы тоже не являются группами Эберлейна. Примерами групп Эберлейна являются конечные прямые произведения евклидовых групп движений и некомпактные полупростые группы Ли с конечным центром. В [54] рассматривается связанная с этим задача о структуре равномерного замыкания алгебры Фурье–Стилтьеса $B(G)$ локально компактной группы G . Пусть H – замкнутый нормальный делитель в G и f – непрерывная функция на G , постоянная на классах смежности xH , $x \in G$. Показано, что если f может быть равномерно приближена функциями из $B(G)$ (замечим, что функция f автоматически слабо почти периодична), то она может быть равномерно приближена функциями из $B(G)$, постоянными на классах смежности вида xH , $x \in G$. Доказательство этого факта использует единственное инвариантное относительно сдвигов среднее на пространстве непрерывных слабо почти периодических функций на H . Если $h \in B(G)$ и $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$, то функция h' , получаемая усреднением функции h на каждом классе смежности, непрерывна (вследствие равномерной непрерывности функций из $B(G)$) и, более того, принадлежит алгебре $B(G)$, причем $\|f - h'\|_\infty < \varepsilon$.

В [58] через $AP(\hat{G})$ обозначено множество всех таких $T \in VN(G)$, что оператор $u \mapsto u \cdot T$ из $A(G)$ в $VN(G)$ компактен, а через $C_\delta^*(G)$ обозначена C^* -алгебра, порожденная семейством $\{\lambda(x) \mid x \in G\}$. Известно, что $C_\delta^*(G) \subset AP(\hat{G})$, причем $C_\delta^*(G) = AP(\hat{G})$ (его иногда называют свойством *дуальной аппроксимации Бора*, поскольку в абелевом случае C^* -алгебра $C_\delta^*(G)$ совпадает с равномерным замыканием тригонометрических многочленов на группе характеров $\hat{G}$ группы G), если G – локально компактная абелева группа или дискретная аменабельная группа. Показано, что любое расширение локально компактной абелевой группы с помощью аменабельной дискретной группы тоже имеет свойство дуальной аппроксимации Бора, и существует такая бесконечная компактная группа G , что $C_\delta^*(G) \subsetneq AP(\hat{G})$. Если G – компактная группа, то одномерный оператор E в $L^2(G)$, определенный формулой $E(f) = (\int f(t) dt)1$, $f \in L^2(G)$, удовлетворяет условию $E \in C_\delta^*(G)$ тогда и только тогда, когда $L^\infty(G)$ имеет единственное левоинвариантное среднее, или тогда и только тогда, когда G полупроста [58], [59].

Родственный вопрос о структуре ограничений функциональных пространств на локально компактной группе на некоторую замкнутую подгруппу рассматривался в [61]. Пусть G – локально компактная группа и $E(G)$ – либо пространство ограниченных лево- и право-равномерно непрерывных функций на G , либо пространство слабо почти периодических функций на G , либо алгебра Фурье–Стилтьеса группы G . Если H – замкнутая подгруппа в G , то, вообще говоря, семейство ограничений $E(G)|_H$ является правильной частью $E(H)$. Получено изящное необходимое и достаточное условие того, что функция из $E(H)$ принадлежит $E(G)|_H$, если H – нормальный делитель. Более точно, если N – замкнутый нормальный делитель в G , $x \in E(N)$

и $g \in G$, то можно определить элемент $x^g \in E(N)$ формулой $x^g(n) = x(g^{-1}ng)$. Показано, что функция x из $E(N)$ принадлежит $E(G)|_N$ тогда и только тогда, когда отображение $g \rightarrow x^g$ группы G в $E(N)$ непрерывно в точке $e \in G$. Отсюда можно вывести много утверждений о продолжениях функций из $E(N)$. Кроме того, показано, что если H – замкнутая подгруппа [SIN]-группы G (т.е. локально компактной группы, имеющей фундаментальную систему окрестностей единичного элемента, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов), то $E(G)|_H = E(H)$. В частности, если G – связная группа Ли, то (1) $E(G)|_N = E(N)$ для любого замкнутого нормального делителя N в G тогда и только тогда, когда радикал группы G централен, (2) $E(G)|_H = E(H)$ для любой замкнутой подгруппы H в G тогда и только тогда, когда G – прямое произведение векторной группы и компактной группы.

Подмножество E локально компактной абелевой группы G называется I -множеством, если любая ограниченная комплексная функция на E может быть продолжена до почти периодической функции на G (или, что равносильно, до непрерывной функции на компактификации Бора группы G). Следующие утверждения доказаны в [94]. Если G – дискретная абелева группа и K – компактификация Бора группы G , то существует точка $y_0 \in K \setminus G$, не принадлежащая K -замыканию никакого I -множества E в G ; кроме того, любая дискретная абелева группа G содержит I -множество, порождающее группу G . Интересно, справедливы ли эти утверждения для неабелевых дискретных групп.

Структура замыканий алгебр Фурье–Стилтьеса связана также с асимптотическим поведением матричных элементов. Локально компактная группа называется *минимальной*, если любой непрерывный изоморфизм этой группы на любую топологическую группу открыт, и *вполне минимальной*, если любой сюръективный непрерывный гомоморфизм открыт. Основным руководством по теории минимальных топологических групп является книга [72]. Теория минимальных групп связана с асимптотическим поведением матричных элементов представлений этих групп. В [152] показано, что связные вполне минимальные группы – это группы с компактным нормальным делителем, факторгруппа по которому является полупрямым произведением односвязной нильпотентной группы и связной редуктивной группы, действующей на нильпотентной части без нетривиальных неподвижных точек. Кроме того, получены некоторые результаты о стремлении к нулю на бесконечности матричных элементов представлений минимальной группы и показано, что для связных групп условие полной минимальности равносильно свойству Эберлейна, обсужденному выше (равномерное замыкание алгебры Фурье–Стилтьеса матричных элементов унитарных непрерывных представлений есть вся C^* -алгебра слабо почти периодических функций).

Слабо почти периодические компактификации (см. теорему D) минимальных топологических групп изучены в [151]. Установлено соответствие между идемпотентами в $w(G)$ и замкнутыми нормальными делителями в G . Это соответствие основано на наблюдении, что пространство $w(G)$ можно разложить на G -орбиты идемпотентов в $w(G)$, если G вполне минимальна. Отсюда следует, что каждое непрерывное унитарное представление такой группы разлагается в ортогональную сумму двух представлений – конечномерного и (по модулю ядра) сильно перемешивающего.

8.3. Свойства слабо почти периодических компактификаций групп и полугрупп.

Полугрупповой компактификацией полутопологической полугруппы T называется

пара (ε, S) , где S – компактная полугруппа, а ε – непрерывный гомоморфизм полугруппы T в S с плотным образом. Одной из полугрупповых компактификаций является пространство $T^{\mathcal{WAP}}$ максимальных идеалов алгебры слабо почти периодических функций на T (с естественным отображением ε), т.е. введенная в теореме D слабо почти периодическая компактификация полугруппы T , и это – наибольшая из ее полугрупповых компактификаций (см. теорему D и [36], [37], [88], [135]).

Пусть G – локально компактная группа и N – замкнутый нормальный делитель в G с компактной факторгруппой G/N . Полугрупповая компактификация X группы N называется *согласованной* с группой G , если любой автоморфизм нормального делителя N , определяемый сопряжением с элементом группы G , продолжается до непрерывного отображения пространства X в себя. В [135] показано, что слабо почти периодическая компактификация нормального делителя сдвигов в группе G движений плоскости не согласована с G . С другой стороны, любая полугрупповая компактификация замкнутой подгруппы любой абелевой группы G согласована с G (этот факт позволяет получить явное описание структуры слабо почти периодической компактификации числовой прямой [135]).

Пусть G – топологическая группа, $G^{\mathcal{LUC}}$ – ее LUC -компактификация (см. п. 9.5), а $G^{\mathcal{WAP}}$ – WAP -компактификация. Согласно знаменитой теореме Вича (см. [37] и [216]), если G – локально компактная группа с единичным элементом e , то $gx \neq x$ для любого $x \in G^{\mathcal{LUC}}$ и любого $g \in G$, $g \neq e$ (в частности, любая локально компактная группа свободно действует на некотором компакте). Следующий результат является WAP -аналогом теоремы Вича. В [84] показано, что если G – $[SIN]$ -группа, и если рассматривать полугруппу $G^{\mathcal{WAP}}$ как фактор правой полугруппы $G^{\mathcal{LUC}}$ (определяемой ниже в этом разделе), то существует открытое плотное подмножество в $G^{\mathcal{LUC}} \setminus G$, состоящее из точек единственности для отображения факторизации (но это свойство может не выполняться для IN -групп).

В [34] изучается связь между полугрупповой компактификацией и ее слабо почти периодической компактификацией. Вообще говоря, полученная при этой компактификации компактная полугруппа не является топологической компактификацией исходной полугруппы, так как каноническое вложение не всегда оказывается гомеоморфизмом на образ вложения. Получены достаточные условия того, что почти периодическая компактификация данной локально компактной полугруппы является топологической компактификацией. В частности, для многих дискретных полугрупп слабо почти периодическая компактификация является топологической. Показано также, что слабая почти периодическая компактификация любой замкнутой подполугруппы локально компактной группы является топологической компактификацией. Кроме того, получено описание слабо почти периодических функций на замкнутой подполугруппе топологической группы, описаны классы слабо почти периодических функций на группе целых чисел $\mathbb{Z}$ и на натуральном ряде $\mathbb{N}$ и показано на примере, что слабо почти периодическая компактификация полугруппы $\mathbb{N}$ не является замыканием множества $\mathbb{N}$ в слабо почти периодической компактификации группы $\mathbb{Z}$.

По мере накопления подобных патологических фактов становилось ясно, что слабо почти периодическая компактификация сохраняет большой объем информации об исходной некомпактной группе или полугруппе и отражает специфику объекта в форме патологических свойств. Тем не менее результат работы [48], вынесенный в ее заго-

ловок, вызвал сильный интерес. Пусть $w\mathbb{Z}$ – слабо почти периодическая компактификация аддитивной группы целых чисел $\mathbb{Z}$; $w\mathbb{Z}$ – компактная хаусдорфова полутопологическая полугруппа, содержащая плотную копию группы $\mathbb{Z}$ и являющаяся наибольшей в том смысле, что любая полутопологическая полугрупповая компактификация группы $\mathbb{Z}$ есть непрерывная гомоморфная копия $w\mathbb{Z}$. Трудности изучения полугруппы $w\mathbb{Z}$ были связаны прежде всего с отсутствием набора нетривиальных примеров ограниченных слабо почти периодических функций на $\mathbb{Z}$; напомним, что ограниченная функция f на $\mathbb{Z}$ слабо почти периодична тогда и только тогда, когда для любых последовательностей (x_n) и (y_m) в $\mathbb{Z}$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} f(x_n + y_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n + y_m),$$

если эти повторные пределы существуют. Положение изменилось с появлением работы [190], в которой были построены новые ограниченные слабо почти периодические функции, поскольку до нее единственными примерами слабо почти периодических функций были функции, стремящиеся к нулю на бесконечности, почти периодические функции и функции с носителями в тонких множествах (например, множествах Сидона) [55].

Компактная полутопологическая полугруппа $w\mathbb{Z}$ имеет 2^c различных идемпотентов. С помощью функций Рупперта [190] удалось доказать, что семейство этих идемпотентов не является замкнутым. Следующие факты существенны. Во-первых, слабо почти периодическая функция на $\mathbb{Z}$ может быть не ограниченной, но ограниченная функция на $\mathbb{Z}$ со значениями в $[0, \infty]$ имеет непрерывное продолжение на $w\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда эта функция слабо почти периодична. Во-вторых, любое целое число $x \in \mathbb{Z}$ имеет единственное разложение в виде

$$x = \sum_{i \in \omega} x(i)(-2)^i,$$

где $x(i) = 1$ на не более чем конечном множестве индексов i и $x(i) = 0$ в остальных точках. Показано, что если c – невозрастающая последовательность неотрицательных вещественных чисел, стремящаяся к нулю, то функция g_c на $\mathbb{Z}$ со значениями в $[0, \infty]$, определенная формулой

$$g_c(x) = \sum_{i \in \omega} c(i)x(i), \quad (11)$$

слабо почти периодична. Рассмотрим компактную подполугруппу

$$H = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{x : \sup x \geq n\}}$$

полугруппы $w\mathbb{Z}$, где $\sup x = \{i : x(i) \neq 0\}$. Пусть Γ – счетное множество дизъюнктивных бесконечных строго возрастающих последовательностей в ω . Для любого $\gamma \in \Gamma$ определен соответствующий идемпотент e^γ в H и некоторая специальная последовательность c^γ , для которой слабо почти периодическая функция g_{c^γ} (определенная формулой (11)) удовлетворяет условию

$$g_{c^\gamma}(e^\eta) = \begin{cases} \infty, & \text{если } \gamma = \eta, \\ 0, & \text{если } \gamma \neq \eta. \end{cases}$$

Тогда функция

$$G(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} (g^\gamma \wedge 1),$$

определенная на $\mathbb{Z}$, где $g^\gamma \wedge 1$ – функция, определенная на $w\mathbb{Z}$ формулой

$$(g^\gamma \wedge 1)(x) = \min\{g^\gamma(x), 1\},$$

оказывается слабо почти периодической функцией.

Пусть ξ – некоторая точка прикосновения множества (e^γ) . Можно показать, что $G(\xi) = 1$, но $G(\xi + \xi) = 2$, потому что g^γ – гомоморфизм на H . Таким образом, ξ – не идемпотент, и тем самым множество идемпотентов в $w\mathbb{Z}$ не замкнуто. Аналогичный результат справедлив для $w\mathbb{N}$.

Правой полугрупповой компактификацией (бесконечной) локально компактной группы G называется пара (ε, S) , где S – такая полугруппа с компактной топологией, что отображение $s \mapsto st$, $s \in S$, непрерывно для любого t в S , а ε – такой непрерывный гомоморфизм группы G в S с плотным образом, что отображение $s \mapsto \varepsilon(g)s$, $s \in S$, непрерывно для любого $g \in G$ [181]. Одной из правых полугрупповых компактификаций является пространство $G^{\mathcal{LUC}}$ максимальных идеалов алгебры равномерно непрерывных слева ограниченных функций на G с естественным отображением ε (и это – наибольшая из правых полугрупповых компактификаций). Как показано в [137], каждый минимальный левый идеал в S есть алгебраическое прямое произведение $L = E \times H$, где H – группа и E – множество идемпотентов в L (один из идемпотентов, e_0 , есть единица группы H). Оказывается, L никогда не является группой, так что E содержит более одного элемента, а если G почти связна или боровская компактификация группы G бесконечна, то множество E содержит подмножество, равномощное множеству подмножеств прямой и группа H незамкнута.

§ 9. Близкие задачи и приложения

9.1. Геометрия банаховых и локально выпуклых пространств.

Определение почти периодических и слабо почти периодических представлений и функций включает условия относительной компактности и слабой относительной компактности орбит и потому связано с условиями относительной компактности и слабой относительной компактности в пространствах векторных функций. В качестве примера приведем некоторые общие результаты об условиях слабой компактности в пространстве $L^\infty(\mu, X)$, где X – банахово пространство. В [4] показано, что если X – банахово пространство со свойством Шура и μ – конечная мера, то слабо сходящиеся последовательности в $L^\infty(\mu, X)$ сходятся по норме почти всюду, любое рефлексивное подпространство в $L^\infty(\mu, X)$, на котором топологии пространств $L^p(\mu, X)$ и $L^\infty(\mu, X)$ согласованы при некотором p , $1 \leq p < \infty$, конечномерно, и если W – слабо компактное подмножество в $L^\infty(\mu, X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество E , мера дополнения которого $< \varepsilon$, что множество $\{f|_E \mid f \in W\}$ относительно компактно в $L^\infty(\mu, X)$. Важно отметить, что условие Шура необходимо для справедливости этих утверждений.

В [133] изучались вопросы дополняемости некоторых подпространств пространств $L^\infty(G)$ и $LUC(G)$ для локально компактной группы G . В частности, показано, что

(1) замкнутое подпространство пространства $WAP(G)$ ($CB(G)$), содержащее $C_0(G)$, не дополняемо в $L^\infty(G)$, если группа G бесконечна (недискретна), (2) если G некомпактна, то $WAP(G)$ не дополняема в $LUC(G)$, (3) пространство $AP(G)$ дополняемо в $LUC(G)$ тогда и только тогда, когда G/N компактна, где N – ядро естественного гомоморфизма группы G в ее компактификацию Бора. Доказательство использует существование сжимающего линейного проектора пространства $CB(G)$ на пространство $CB(G/H)$, где H – замкнутая подгруппа в G . Факторпространства, связанные с естественными включениями, часто несепарабельны (например, факторпространство пространства ограниченных равномерно непрерывных функций на некомпактной локально компактной группе по подпространству слабо почти периодических функций при некоторых условиях содержит линейную изометрическую копию пространства l^∞); с другой стороны, есть некомпактные локально компактные группы, для которых запас диссипативных слабо почти периодических функций состоит только из непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности [53], [224].

Согласно [69], описание компактных и слабо компактных операторов из банахова пространства X в пространство числовых почти периодических функций $AP(S)$ на топологической полугруппе S непосредственно следует из общих теорем линейного анализа. Это приводит к описанию компактных и слабо компактных мультипликаторов на пространстве $AP(S)$ в терминах равномерной непрерывности отображения $s \mapsto \mu_s$, где μ_s – единственная векторная мера, соответствующая сдвинутому оператору T_s ($T_s(x) = (Tx)_s$). В [62] изучена связь между (слабой) почти периодичностью элементов образа оператора, сплетающего два банаховых представления группы, и (слабой) почти периодичностью самого сплетающего оператора (“мультипликатора”) [64].

Некомпактная локально компактная группа G называется *минимально слабо почти периодической*, если любая слабо почти периодическая функция на G может быть представлена в виде суммы почти периодической функции и функции, стремящейся к нулю на бесконечности. В [55] показано, что группа движений n -мерного евклидова пространства и группа $SL(2, \mathbb{R})$ являются минимально слабо почти периодическими, а некомпактная локально компактная связная разрешимая группа G является минимально слабо почти периодической тогда и только тогда, когда факторгруппа группы G по наибольшему компактному нормальному делителю изоморфна группе движений плоскости.

В [192] введена так называемая представимая компактификация полутопологических полугрупп (полугруппа называется представимой, если она имеет достаточно много равномерно ограниченных представлений в конечномерных гильбертовых пространствах) и отмечены общие аппроксимационные свойства, связанные с этим понятием.

9.2. Приложения слабо почти периодических функций и представлений к теории чисел.

Почти периодические функции имеют теоретико-числовые приложения с момента введения их в обиход (см., например, [81], [214]). Приведем два более современных приложения.

В [87] введена специальная слабо почти периодическая функция, с помощью которой получено следующее обобщение теоремы Боля–Серпинского–Вейля о равномерном распределении mod 1. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0, 1)$, $a_1, \dots, a_n$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ веществен-

ны и числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ рационально независимы, то множество P всех целых чисел n , удовлетворяющих условию $a_i \leq \alpha_i n \leq a_i + \lambda_i \bmod 1$ при $1 \leq i \leq n$, имеет слабо почти периодическую характеристическую функцию 1_P (на аддитивной группе $\mathbb{Z}$ целых чисел) со средним значением

$$M(1_P) = \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \sum_1^m 1_P(k) = \lambda_1 \cdots \lambda_n > 0,$$

так что множество P бесконечно. Указано обобщение на случай $\mathbb{Z}^m$. Доказательство использует слабую почти периодичность функции 1_P при $P = \{n \in \mathbb{Z}: f(n) \leq \beta\}$ за исключением не более чем счетного множества значений β , если $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ слабо почти периодична.

Кронекеров признак рациональности состоит в том, что арифметическая функция g рекуррентна тогда и только тогда, когда лишь конечное число определителей Ганкеля

$$\det \begin{pmatrix} g(1) & g(2) & \cdots & g(m) \\ g(2) & g(3) & \cdots & g(m+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g(m) & g(m+1) & \cdots & g(2m-1) \end{pmatrix}$$

отлично от нуля. С помощью этого критерия в [146] показано, что следующие условия эквивалентны для любой рекуррентной последовательности g (отвечающей многочлену $f(z)$, множество нулей которого мы обозначим через A).

- (a) $g(n) = o(n)$.
- (b) $|\alpha| \leq 1$ для любого $\alpha \in A$ и $f'(\alpha) \neq 0$ для любого α , удовлетворяющего условию $|\alpha| = 1$.
- (c) $g(n) = O(1)$.
- (d) Среднее значение $M(g)$ существует.

Отсюда следует, что если g – такая 1-почти-периодическая арифметическая функция, что среднее значение функции $n \mapsto g(n) \cdot e^{2\pi i n \theta}$ отлично от нуля для бесконечного множества значений $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, то последовательность g не рекуррентна. Эти результаты развиты далее в [39].

Применения аналога “неравномерного” усреднения на полугруппе натуральных чисел к изучению свойств арифметических функций рассматривались в [113].

9.3. Приложения к гармоническому анализу.

Среди многочисленных прямых и косвенных приложений почти периодических функций в задачах гармонического анализа мы выделим несколько вопросов: изучение введенного и изученного в [106], [108], [109] подкласса “строго” слабо почти периодических функций, результат о структуре функций, в известном смысле двойственных почти периодическим функциям [138], аналог теоремы Бора об аргументе почти периодической функции [91], [210] и эргодические теоремы в гармоническом анализе [31], [68], [184].

Пусть $\{x_n\}$ – последовательность элементов $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Согласно критерию Германа Вейля, последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена (р.р.) в $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда для любой функции $f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ выполняется равенство

$$\mu(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_1^N f(x_n).$$

Можно заменить факторгруппу $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ другой группой G , алгебру непрерывных функций $CB(G)$ – другим функциональным пространством $\mathcal{M}$, а μ – некоторым линейным функционалом на $\mathcal{M}$ и использовать критерий Вейля как определение последовательностей $\{x_n\}$, р.р. относительно $(\mathcal{M}, m)$. Если $\mathcal{B}(G)$ – пространство почти периодических функций Бора на G и m – однозначно определенное среднее, а G локально компактна, то можно указать условия на группу G , достаточные для существования последовательности, р.р. относительно $\mathcal{B}(G)$. В [106] рассматривается локально компактная группа G с $\mathcal{M} = WAP(G)$ и однозначно определенным средним m . Доказано, что если G сепарабельна, то существует последовательность $\{x_n\}$, р.р. относительно $(\mathcal{W}(G), m)$. Доказательство использует эргодическую теорему фон Неймана и свойства пределов последовательностей в метризуемых локально выпуклых пространствах.

Пусть G – локально компактная топологическая группа, $CB(G)$ – C^* -алгебра комплекснозначных ограниченных непрерывных функций на G , $WAP(G)$ – пространство слабо почти периодических элементов пространства $CB(G)$. Пусть $M(f)$ – единственное среднее значение функции f для любой $f \in WAP(G)$. Напомним, что последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ называется отлично распределенной (о.р.) относительно подмножества W' пространства $WAP(G)$, если

$$n^{-1} \sum_{i=k+1}^{k+n} f(x_i) \rightarrow M(f) \quad \text{для всех } f \in W' \text{ равномерно по } k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $WS(G)$ – семейство таких функций $f \in WAP(G)$, что множество $\{f_g^h \mid g, h \in G\}$ слабо относительно компактно в $CB(G)$, где f_g^h обозначает функцию $x \mapsto f(gxh)$ на группе G со значениями в $\mathbb{C}$. В предположении, что группа G сепарабельна, в [106] явно строится такая последовательность $\{x_n\}$, что

$$n^{-1} \sum_{i=k+1}^{k+n} f(gx_ih) \rightarrow M(f)$$

равномерно по $k \in \mathbb{N}$ и $g, h \in G$ для всех функций $f \in WS(G)$. Показано, что семейство $C_0(G)$ всех функций $f \in CB(G)$, стремящихся к нулю на бесконечности, содержится в $WS(G)$ тогда и только тогда, когда левая и правая равномерные структуры на G совпадают. В [108], [109] показано, что $WS(G) = W(G)$ по крайней мере в двух важных частных случаях: когда группа G – [FIR] группа и когда группа G почти связна и левая и правая равномерные структуры на G совпадают.

Что касается второй из упомянутых выше задач, то функции, в известном смысле двойственные к почти периодическим, изучались в [138], где рассматривались ограниченные измеримые функции на локально компактной абелевой группе G с группой характеров $\widehat{G}$ и было установлено, что если пространство $L^\infty(G)$ содержит хотя бы одну функцию $f \neq 0$, для которой орбита под действием поточечных умножений $O(f) = \{\chi \cdot f \mid \chi \in \widehat{G}\}$ относительно слабо компактна в $L^\infty(G)$, то G дискретна, а если G дискретна, то орбита $O(f)$ относительно слабо компактна в $L^\infty(G)$ (слабо или сильно) тогда и только тогда, когда f стремится к нулю на бесконечности.

Обобщение теоремы Бора [46] имеет следующий вид. Пусть A – коммутативная банахова алгебра с единичным элементом, $\mathcal{E}(A)$ – группа единиц (т.е. обратимых элементов [92]) алгебры A и $\text{Aut}(A)$ – группа непрерывных автоморфизмов алгебры A ,

снабженная сильной операторной топологией. Пусть G – связная компактная группа и $T: G \rightarrow \text{Aut}(A)$ – непрерывный гомоморфизм. Элемент $\chi \in \mathcal{E}(A)$ называется *квази-собственным*, если существует такой непрерывный гомоморфизм $t: G \rightarrow \mathcal{E}(A)$, что $T(g)\chi = \chi t(g)$ для всех $g \in G$. В [91] доказано, что для любого $f \in \mathcal{E}(A)$ существует такой квазисобственный элемент $\chi \in A$ и такой элемент $\varphi \in A$, что $f = \chi \exp \varphi$. Следствием этого результата является аналог теоремы Бора об аргументе для не обрашающихся в нуль почти периодических функций Левитана на связной локально компактной абелевой группе [91].

В [31] для локально компактной абелевой группы G построено пространство C функций, включающее непрерывные почти периодические функции и (не обязательно непрерывные) положительно определенные функции на G , для которого доказан аналог эргодической теоремы в предположении, что данная сеть $\{L_\alpha \mid \alpha \in A\}$ положительных равномерно ограниченных линейных преобразований равномерного пространства функций C сходится на характерах группы G к нулю, за исключением единичного характера, на котором эта сеть сходится к единице. Поскольку непрерывные почти периодические функции равномерно порождены линейными комбинациями непрерывных характеров, утверждение чрезвычайно близко к статистической эргодической теореме для дискретных групп. Более тонкие результаты связаны с предположениями типа измеримости положительно определенных функций. Например, как показано в [68], если π – представление топологической группы G в строго выпуклом банаховом пространстве, если π -образ окрестности единичного элемента e в G имеет слабо относительно компактные орбиты в X и если

$$\lim_{g \rightarrow e} \|\Pi(g)\| = 1,$$

то пространство X разлагается в прямую сумму замкнутых подпространств X_e и X_0 , где ограничение представления π на X_e слабо непрерывно, а замкнутая выпуклая оболочка π -образа любой окрестности единичного элемента e в G содержит нулевой элемент пространства X . Относительный вариант теоремы о разложении, в котором речь идет о положительно определенных функциях на локально компактной группе, почти периодических (соответственно усреднимых к нулю) относительно естественного действия замкнутого нормального делителя, получен в [184].

9.4. Приложения к устойчивости представлений абелевых полугрупп и к спектральной теории.

Пусть G – σ -компактная локально компактная абелева группа, X – локально выпуклое, секвенциально слабо полное топологическое векторное пространство с двойственностью $\langle X, Y \rangle$. Пусть $T: G \rightarrow \text{Aut}(X)$ – представление группы G автоморфизмами пространства X . Ненулевой вектор $x \in X$ называется *собственным вектором* представления T , если существует такой характер χ группы G , что $T(g)x = \chi(g)x$ для всех $g \in G$. В [126] указаны условия существования полного семейства собственных векторов представления T в X . В частности, такое семейство существует, если T – почти периодическое представление, и можно использовать условия почти периодичности скалярно почти периодических представлений. Указаны приложения теории почти периодических функций к изучению условий полноты системы собственных векторов обобщенно нормальных операторов.

9.5. Теоремы о неподвижной точке и инвариантные подпространства.

В [131] изучались конечномерные инвариантные подпространства полугрупп линейных операторов в локально выпуклых пространствах. Представление $\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$ полутопологической полугруппы S линейными операторами в отделимом локально выпуклом пространстве E называется *раздельно непрерывным*, если отображение $(s, x) \mapsto T_s x$ произведения $S \times E$ в E непрерывно по каждому переменному. Оно называется *совместно непрерывным* на множестве $K \subset E$, если оно непрерывно на произведении $S \times K$. Пусть n – натуральное число. Рассмотрим множество всех таких раздельно непрерывных представлений $\mathcal{S}$ топологической полугруппы S в пространстве E , которые непрерывны (непрерывны по совокупности переменных) на компактных выпуклых подмножествах пространства E . Пусть $\mathcal{L}_n(X)$ – семейство всех n -мерных подпространств пространства E , которые содержатся в данном подмножестве X пространства E . Говорят, что полугруппа S имеет свойство $P(n)$, если для любого такого представления $\mathcal{S}$ и любого такого подмножества $X \subset E$, что существует замкнутое $\mathcal{S}$ -инвариантное подпространство H в E коразмерности n , для которого множество $x + H \cap X$ компактно и выпукло для любого $x \in E$, из условия, что $\mathcal{L}_n(X)$ непусто и $\mathcal{S}$ -инвариантно, следует, что существует такое подпространство $L_0 \in \mathcal{L}_n(X)$, что $T_s(L_0) = L_0$ для каждого $s \in S$. Доказывается, что если S левоаменабельна (т.е. пространство $LUC(S)$ леворавномерно непрерывных функций на S имеет левоинвариантное среднее), то S имеет свойство $P(n)$ для всех n . Обратно, если S имеет свойство $P(1)$, то S левоаменабельна (и поэтому имеет свойство $P(n)$ для всех n). Этот результат является аналогом и обобщением утверждения Фань Сюя [83]. Аналогичные результаты получены для почти периодических функций (элементов пространства $AP(S)$) и представлений, равномерно непрерывных на компактных выпуклых подмножествах, а также для слабо почти периодических функций (элементов пространства $WAP(S)$) и представлений, квазиравномерно непрерывных на компактных выпуклых подмножествах.

§ 10. Заключительные замечания

Теория числовых почти периодических функций на группах связана с проблемой представимости топологических групп, т.е. существования семейства унитарных представлений данной группы, разделяющего точки группы, которая положительно решена для локально компактных групп теоремой Гельфанда–Райкова, и положительное решение легко распространяется на случай локально вполне ограниченных групп (информацию об этом классе можно найти, в частности, в [60]), но границы класса унитарно представимых групп неясны. Известно, что любая хаусдорфова топологическая группа имеет точное представление в банаховом пространстве [211]¹², но пространство этого представления не обязано быть ни гильбертовым, ни даже рефлексивным. Кроме того, имеются как отрицательные результаты, показывающие, что есть топологические группы, не допускающие унитарных представлений в гильбертовом пространстве (см. обзорную часть в [204]), так и критерии того, что топологическая группа имеет достаточно много представлений в рефлексивных банаховых пространствах [198] (заметим, что в [154] показано, что топологическая группа, имеющая

¹²Если G – произвольная хаусдорфова топологическая группа, то утверждение следствия 2 в [147; § 1 гл. III] ошибочно, а если дискретная, то это утверждение очевидно.

достаточно много представлений в рефлексивных банаховых пространствах, может иметь недостаточно много представлений в гильбертовых пространствах), но общая картина далека от полной ясности. Последние успехи в этом направлении связаны с описанием локально вполне ограниченных топологических групп, все топологически неприводимые представления которых в гильбертовом пространстве конечномерны, и полным описанием представимых топологических групп, размерности топологически неприводимых представлений которых в гильбертовом пространстве конечны и ограничены в совокупности [204].

Приложения

Приложение 1. Полнота по фон Нейману и свойство Крейна.

Напомним определение полноты локально выпуклых пространств по Муру (сам Мур называл эту полноту “вафельной полнотой” (wafer complete space), ср. [76; предложение 8.14.3]), или, что то же, определение свойства Крейна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Локально выпуклое пространство E называется *имеющим свойство Крейна* или *полным по Муру* [168; гл. 2], если слабо замкнутая уравновешенная выпуклая оболочка любого слабо компактного подмножества в E является слабо компактным множеством.

Классическая теорема Крейна утверждает, что любое банахово пространство имеет свойство Крейна (т.е. полно в смысле Мура). Хорошо известно (см, например, теорему 8.13.1 в [76] и IV.11.5 в [168]), что слабо замкнутая выпуклая (уравновешенная) оболочка компактного множества в хаусдорфовом локально выпуклом пространстве E компактна тогда и только тогда, когда эта оболочка полна в топологии Макки $\tau(E, E^*)$. В частности, любое квазиполное локально выпуклое пространство имеет свойство Крейна.¹³

Теория почти периодических функций в топологических (в частности, локально выпуклых) векторных пространствах начиналась [219] с другого условия полноты, введенного фон Нейманом специально для этого случая в [220].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Локально выпуклое пространство E называется *полным по фон Нейману* или *полным в смысле фон Неймана*, если замыкание любого предкомпактного множества в E компактно.

Очевидно, что наличие свойства Крейна (условие полноты по Муру) следует из условия полноты по фон Нейману в слабой топологии, но это последнее условие чрезвычайно сильно. Нетрудно заметить, что банахово пространство полно по фон Нейману в слабой топологии тогда и только тогда, когда оно рефлексивно. Другое условие на топологические векторные пространства, используемое фон Нейманом в [219], [220], состоит в существовании последовательности открытых окрестностей нуля, пересечение которых содержит только сам нулевой элемент. Как мы видим, эти два условия, высказанные фон Нейманом в [220], т.е. за пределами статьи [219] о почти периодических функциях, весьма ограничительны.

¹³ Следует заметить, что если B – замкнутая уравновешенная выпуклая оболочка слабо компактного подмножества хаусдорфова локально выпуклого пространства E , то B слабо компактно тогда и только тогда, когда B полно относительно некоторой (или, что равносильно, любой) топологии, согласованной с двойственностью между E и E^* (см. [168; гл. 2, теорема 6]).

Приложение 2. Интегрирование операторных функций.

В этой части приложения мы напоминаем некоторые фольклорные факты об условиях существования и свойствах так называемого “слабого интеграла” от векторных и операторных функций со значениями в локально выпуклом пространстве. Пусть X – компактное хаусдорфово пространство и μ – регулярная борелевская мера на X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть X – компактное топологическое пространство, μ – регулярная борелевская мера на X , а E – локально выпуклое пространство. Для любой слабо непрерывной функции $f: X \rightarrow E$ формула

$$F(x) = \int_X x(f(t)) d\mu(t), \quad x \in E^*, \quad (12)$$

корректно определяет линейный функционал F на пространстве E^* и если локально выпуклое пространство E имеет свойство Крейна, то этот линейный функционал определен элементом E , т.е. существует такой элемент $y \in E$, что

$$F(x) = x(y) \quad \text{для любых } x \in E^*. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [76; теорема 8.13.1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. В ситуации, описанной в предложении 1, элемент y , определенный формулой (13), называется “слабым интегралом” от функции f . Положим

$$y = \int_X f(t) d\mu(t). \quad (14)$$

Список стандартных свойств этого интеграла приведен в [76; гл. 8, § 14] и в [147; гл. 2].

Докажем теперь, что можно интегрировать и непрерывные линейные операторы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (интегрирование линейных операторов). Пусть E – локально выпуклое пространство, F – пространство Макки со свойством Крейна, а $\mathcal{L}(E, F)$ – пространство непрерывных линейных операторов из E в F . Введем в пространстве $\mathcal{L}(E, F)$ слабую операторную топологию. Пусть X – компактное топологическое пространство и μ – регулярная борелевская мера на X . Введем в пространстве $C(X, \mathcal{L}(E, F))$ равномерность, определенную естественной равномерностью на $\mathcal{L}(E, F)$ [195; I.1.4], т.е. окружения в $C(X, \mathcal{L}(E, F))$ – множества вида $O_V = \{(f_1, f_2) \in C(X, \mathcal{L}(E, F)) \times C(X, \mathcal{L}(E, F)) \mid (f_1(\xi), f_2(\xi)) \in V \text{ для любых } \xi \in X\}$, где V пробегает семейство всех окружений в равномерном пространстве $\mathcal{L}(E, F)$. Для любого элемента $f \in C(X, \mathcal{L}(E, F))$ и любого вектора $\xi \in E$ функция f_ξ на X , определенная формулой $f_\xi(x) = f(x)\xi$, $x \in X$, $\xi \in E$, задает непрерывную функцию на X со значениями в пространстве F . Для любых $f \in C(X, \mathcal{L}(E, F))$ и $\xi \in E$ обозначим через $y(f, \xi)$ элемент $y(f, \xi) \in F$, однозначно определенный (согласно предложению 1) формулой

$$x(y(f, \xi)) = \int_X x(f_\xi(t)) d\mu(t), \quad x \in F^*.$$

В этом случае существует такой слабо непрерывный линейный оператор $z_f \in \mathcal{L}(E, F)$, что отображение $(f, \xi) \mapsto y(f, \xi)$, $f \in \text{CB}(X, \mathcal{L}(E, F))$, $\xi \in E$, задается формулой $y(f, \xi) = z_f \xi$, $f \in C(X, \mathcal{L}(E, F))$, $\xi \in E$, и отображение $z: C(X, \mathcal{L}(E, F)) \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$, определенное формулой $z(f) = z_f$, $f \in C(X, \mathcal{L}(E, F))$, непрерывно в указанных выше топологиях равномерной сходимости в слабой операторной топологии на $C(X, \mathcal{L}(E, F))$ и слабой операторной топологии на $\mathcal{L}(E, F)$.

Именно ради свойства непрерывности в предложении 2 введено предположение, что локально выпуклое пространство E есть пространство Макки. Напомним, что любое бочечное пространство является пространством Макки [195; теорема IV.3.4].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Из определения слабой операторной топологии на $\mathcal{L}(E, F)$ следует, что эта топология индуцирована системой полунорм вида $T \mapsto |f(Tx)|$, $x \in E$, $f \in F^*$ (где F^* , как всегда, обозначает пространство, сопряженное к F).

Докажем сначала, что оператор $z(f)$ непрерывен для любой функции $f \in C(X, \mathcal{L}(E, F))$, если E снабжено топологией Макки, а F — слабой топологией. Достаточно доказать, что оператор z непрерывен в нуле. По предположению для любых $\xi \in E$ функция $t \mapsto f(t)\xi$, $t \in X$, непрерывна на X , если пространство F снабжено слабой топологией. Отсюда следует, что функция $t \mapsto F(f(t)\xi)$ непрерывна на X для любых $\varphi \in F^*$ и $x \in E$, и, следовательно, функция $t \mapsto f(t)^*\varphi$ непрерывна на X по отношению к слабой топологии на пространстве E^* для любых $\varphi \in E^*$, где $f(t)^*$ — оператор, сопряженный к $f(t)$. Поэтому множество $f(X)^*\varphi$, образованное значениями функции $f(\cdot)^*\varphi$ на пространстве X , слабо* компактно (т.е. компактно в $\sigma(E^*, E)$ -топологии). Если ограниченная сеть ξ_α стремится к нулю в E в топологии Макки (это означает, что ξ_α стремится к нулю в топологии равномерной сходимости на слабо компактных выпуклых уравновешенных множествах в пространстве E^*), то отсюда следует (так как E предполагалось имеющим свойство Крейна), что ξ_α стремится к нулю в топологии равномерной сходимости на слабо* компактных множествах в E^* и, в частности, сеть ξ_α равномерно стремится к нулю на множестве $f(X)^*\varphi$. Переходя к пределу в скалярных интегралах

$$\varphi(z(f)\xi_\alpha) = \int_X \varphi(f(t)\xi_\alpha) d\mu(t), \quad \varphi \in F^*, \quad \xi_\alpha \in E, \quad f \in C(X, \mathcal{L}(E, F)),$$

с помощью равномерной сходимости подынтегральных выражений к нулю на всем пространстве X , мы видим, что $\varphi(z(f)\xi_\alpha)$ стремится к нулю для любых $\varphi \in F^*$. Следовательно, функция $z(f)\xi_\alpha$ стремится к нулю в слабой топологии на F . Это доказывает, что для любых $f \in C(X, \mathcal{L}(E, F))$ линейное отображение $z(f)$ из E в F непрерывно, если E снабжено топологией Макки (мы будем писать E_τ , чтобы указать, что E снабжено топологией $\tau(E, E^*)$), а F — слабой топологией (мы будем писать F_σ , чтобы указать, что F снабжено топологией $\sigma(F, F^*)$). Но этого условия непрерывности достаточно для того, чтобы сопряженный оператор был определен на всем пространстве F_σ^* (как непрерывное отображение сопряженных пространств, а именно пространства F_σ^* в E_τ^*). По запасу элементов эти пространства совпадают с F^* и E^* соответственно (с точностью до топологий, которые могут быть различными) и, следовательно, сопряженное к $z(f)$ отображение переводит F^* в E^* для любых $f \in C(X, \mathcal{L}(E, F))$. Со-

гласно теореме IV.2.1 в [195], отсюда следует, что $z(f)$ непрерывно в слабых топологиях на E и F . По предположению E и F — пространства Макки и, следовательно, линейный оператор из E в F непрерывен тогда и только тогда, когда он слабо непрерывен [195; теорема IV.7.4]. Таким образом, $z(f)$ непрерывен для любых $f \in C(X, \mathcal{L}(E, F))$, что завершает доказательство первого из утверждений.

Утверждение о непрерывности отображения $z: C(X, \mathcal{L}(E, F)) \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ в топологиях, указанных в теореме, доказывается аналогично. Мы опустим подробности, поскольку мы не пользуемся этой частью утверждения в основном тексте статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Ю. Александров. О существовании асимптотически рекуррентных движений динамических систем // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 4. С. 720–722.
- [2] L. Amerio. Almost-periodic functions in Banach spaces // Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 1989. V. 42. № 3. P. 25–33.
- [3] M. E. Andersson. The counterpart for Hankel–Schur multipliers of Eberlein’s decomposition // Research Reports in Mathematics № 2. Stockholm: Stockholm University, Department of Mathematics, 2002.
- [4] K. T. Andrews, J. J. Uhl, Jr. Weak compactness in $L^\infty(\mu, X)$ // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30. № 6. P. 907–915.
- [5] W. Arendt, C. J. K. Batty. Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 306. № 2. P. 837–852.
- [6] W. Arendt, S. Schweiker. Discrete spectrum and almost periodicity // Taiwanese J. Math. 1999. V. 3. № 4. P. 475–490.
- [7] J. Arias de Reyna, J. Diestel, V. Lomonosov, L. Rodríguez-Piazza. Some observations about the space of weakly continuous functions from a compact space into a Banach space // Quaest. Math. 1992. V. 15. № 4. P. 415–425.
- [8] W. Arveson. The harmonic analysis of automorphism groups // Proc. Sympos. Pure Math. 1982. V. 38. P. 199–269.
- [9] Banach, S.. Théorie des opérations linéaires. Warszawa: Subwencji Funduszu Narodowej, 1932.
- [10] Bart, H., Goldberg, S.. Characterizations of almost periodic strongly continuous groups and semigroups // Math. Ann. 1978. V. 236. № 2. P. 105–116.
- [11] Б. Р. Басит. Связь между почти периодическими функциями Левитана и почти автоморфными функциями // Вестник МГУ. Сер. I матем., мех. 1971. № 4. С. 11–15.
- [12] Б. Р. Басит. Обобщение двух теорем М. И. Кадеца о неопределенном интеграле абстрактных почти периодических функций // Матем. заметки. 1971. Т. 9. С. 311–321.
- [13] B. Basit. Note on a theorem of Levitan for the integral of almost periodic functions // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. 1973. V. 5. P. 9–14.
- [14] B. Basit. Les fonctions abstraites presque automorphiques et presque périodiques au sens de Levitan, et leurs différences // Bull. Sci. Math. (2). 1977. V. 101. № 2. P. 131–148.
- [15] B. Basit. On the indefinite integrals of abstract functions // An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Sect. I a Mat. 1983. V. 29. № 3, suppl. P. 49–54.
- [16] B. Basit. Some problems concerning different types of vector valued almost periodic functions // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 1995. V. 338.
- [17] B. Basit. Harmonic analysis and asymptotic behavior of solutions to the abstract Cauchy problem // Semigroup Forum. 1997. V. 54. № 1. P. 58–74.
- [18] B. Basit, M. Emam. Differences of functions in locally convex spaces and applications to almost periodic and almost automorphic functions // Ann. Polon. Math. 1983. V. 41. № 3. P. 193–201.
- [19] B. Basit, H. Günzler. Asymptotic behavior of solutions of systems of neutral and convolution equations // J. Differential Equations. 1998. V. 149. № 1. P. 115–142.

- [20] B. Basit, H. Günzler. Generalized Esclangon–Landau results and applications to linear difference-differential systems in Banach spaces // *J. Differ. Equations Appl.* 2004. V. 10. № 11. P. 1005–1023.
- [21] B. Basit, H. Günzler. A difference property for perturbations of vector-valued Levitan almost periodic functions and analogues // *Russian J. Math. Phys.* 2005. V. 12. № 4 (to appear).
- [22] B. Basit, A. J. Pryde. Ergodicity and differences of functions on semigroups // *J. Austral. Math. Soc. Ser. A.* 1998. V. 64. № 2. P. 253–265.
- [23] B. Basit, A. J. Pryde. Ergodicity and stability of orbits of unbounded semigroup representations // *J. Austral. Math. Soc.* 2004. V. 77. № 2. P. 209–232.
- [24] B. Basit, A. J. Pryde. Asymptotic behavior of orbits of C_0 -semigroups and solutions of linear and semilinear abstract differential equations // *Russian J. Math. Phys.* 2005. V. 12. № 4 (to appear).
- [25] B. Basit, C. Zhang. New almost periodic type functions and solutions of differential equations // *Canad. J. Math.* 1996. V. 48. № 6. P. 1138–1153.
- [26] Б. Р. Басит, В. В. Жиков. Почти периодические решения интегро-дифференциальных уравнений в пространстве Банаха // *Вестник МГУ. Сер. И матем., мех.* 1971. № 2. С. 29–33.
- [27] А. Г. Баскаков. Спектральные признаки почти периодичности решений функциональных уравнений // *Матем. заметки.* 1978. Т. 24. № 2. С. 195–206.
- [28] А. Г. Баскаков. Гармонический анализ косинуса и показательной операторной функции // *Матем. сб.* 1984. Т. 124 (166). № 1. С. 68–95.
- [29] J. Batt, M. V. Deshpande. Weak convergence and weak compactness in the space of almost periodic functions on the real line // *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* 1996. V. 106. № 1. P. 1–11.
- [30] A. Belanger, B. E. Forrest. Geometric properties of some subspaces of $VN(G)$ // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1994. V. 122. № 1. P. 131–133.
- [31] J.-M. Belley. An ergodic theorem in harmonic analysis // *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada.* 1981. V. 3. № 4. P. 203–208.
- [32] J. F. Berglund. On extending almost periodic functions // *Pacific J. Math.* 1970. V. 33. P. 281–289.
- [33] J. F. Berglund. Dissipative weakly almost periodic functions // *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.* 1989. V. 42. № 3. P. 77–80.
- [34] J. F. Berglund, N. Hindman. Filters and the weak almost periodic compactification of a discrete semigroup // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1984. V. 284. № 1. P. 1–38.
- [35] J. F. Berglund, K. H. Hofmann. Compact Semitopological Semigroups and Weakly Almost Periodic Functions. Berlin: Springer-Verlag, 1967. (Lecture Notes in Math. V. 42.)
- [36] J. F. Berglund, H. D. Junghenn, P. Milnes. Compact Right Topological Semigroups and Generalizations of Almost Periodicity. Berlin: Springer-Verlag, 1978. (Lecture Notes in Math. V. 663.)
- [37] J. F. Berglund, H. D. Junghenn, P. Milnes. Analysis on Semigroups. New York: Wiley, 1989.
- [38] A. S. Besicovitch. Almost Periodic Functions. New York: Dover, 1955.
- [39] J.-P. Bézivin. Sur les suites presque-périodiques // *Arch. Math. (Basel).* 1998. V. 70. № 6. P. 447–454.
- [40] J. Blot. Le théorème de Markov–Kakutani et la presque-périodicité // *Fixed Point Theory and Applications* (Marseille, 1989). Harlow: Longman, 1991. P. 45–56. (Pitman Res. Notes Math. Ser. V. 252.)
- [41] S. Bochner. A new approach to almost periodicity // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 1962. V. 48. P. 2039–2043.
- [42] S. Bochner. General almost automorphy // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 1975. V. 72. № 10. P. 3815–3818.
- [43] S. Bochner, J. von Neumann. Almost periodic functions in groups. II // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1935. V. 37. P. 21–50; рус. пер.: Почти периодические функции на группах. II // *Дж. фон Нейман. Избранные труды.* Т. I. М.: Наука, 1987. С. 146–170.

- [44] Н. Н. Боголюбов. О некоторых статистических методах в математической физике. Львов: Изд-во АН УССР, 1945.
- [45] P. Bohl. Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie // Crelles J. 1906. V. 131. P. 268–321.
- [46] H. Bohr. Collected Mathematical Works. V. II, III. København: Dansk Matematisk Forening, 1952.
- [47] B. Bordbar, J. Pym. The weakly almost periodic compactification of a direct sum of finite groups // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1998. V. 124. № 3. P. 421–449.
- [48] B. Bordbar, J. Pym. The set of idempotents in the weakly almost periodic compactification of the integers is not closed // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. № 2. P. 823–842.
- [49] J. Bourgain, M. Talagrand. Compacité extrême // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 80. № 1. P. 68–70.
- [50] G. Brown, I. Glicksberg, E. Hewitt. Indicator functions with large Fourier transforms // Pacific J. Math. 1983. V. 105. № 1. P. 11–20.
- [51] R. B. Burckel. Weakly Almost Periodic Functions on Semigroups. New York: Gordon and Breach, 1970.
- [52] R. Chill. Tauberian theorems for vector-valued Fourier and Laplace transforms // Studia Math. 1998. V. 128. № 1. P. 55–69.
- [53] C. Chou. Weakly almost periodic functions and almost convergent functions on a group // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 206. P. 175–200.
- [54] C. Chou. Uniform closures of Fourier–Stieltjes algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1979. V. 77. № 1. P. 99–102.
- [55] C. Chou. Minimally weakly almost periodic groups // J. Funct. Anal. 1980. V. 36. № 1. P. 1–17.
- [56] C. Chou. Weakly almost periodic functions and Fourier–Stieltjes algebras of locally compact groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 274. № 1. P. 141–157.
- [57] C. Chou. Weakly almost periodic functions and thin sets in discrete groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 321. № 1. P. 333–346.
- [58] C. Chou. Almost periodic operators in $VN(G)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 317. № 1. P. 229–253.
- [59] C. Chou, A. T.-M. Lau, J. Rosenblatt. Approximation of compact operators by sums of translations // Illinois J. Math. 1985. V. 29. № 2. P. 340–350.
- [60] W. W. Comfort. Topological groups // Handbook of Set-theoretic Topology. Amsterdam: North-Holland, 1984. P. 1143–1263.
- [61] M. Cowling, P. Rodway. Restrictions of certain function spaces to closed subgroups of locally compact groups // Pacific J. Math. 1979. V. 80. № 1. P. 91–104.
- [62] G. Crombez. Compactness and almost periodicity of multipliers // Canad. Math. Bull. 1983. V. 26. № 1. P. 58–62.
- [63] G. Crombez. Subspaces of $L_\infty(G)$ with unique topological left invariant mean // Czechoslovak Math. J. 1984. V. 34 (109). № 2. P. 178–182.
- [64] G. Crombez, W. Govaerts. Strongly and weakly almost periodic multipliers from $L_1(G)$ to $L_\infty(G)$ // Bull. Soc. Math. Belg. Ser. B. 1980. V. 32. № 2. P. 179–188.
- [65] C. Datry, G. Muraz. Analyse harmonique dans les modules de Banach, II: presque-périodicité et ergodicité // Bull. Sci. Math. 1996. V. 120. № 6. P. 493–536.
- [66] М. М. Дэй. Нормированные линейные пространства. М.: ИЛ, 1961.
- [67] K. de Leeuw, I. Glicksberg. Applications of almost periodic compactifications // Acta Math. 1961. V. 105. P. 63–97.
- [68] K. de Leeuw, I. Glicksberg. The decomposition of certain group representations // J. Analyse Math. 1965. V. 15. P. 135–192.
- [69] M. V. Deshpande, M. N. Parekh. Compact operators on a Banach space into the space of almost periodic functions // Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 1990. V. 100. № 1. P. 25–36.

- [70] J. Diestel. A survey of results related to the Dunford–Pettis property // Proceedings of the Conference on Integration, Topology, and Geometry in Linear Spaces (Univ. North Carolina, Chapel Hill, N.C., 1979). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1980. P. 15–60. (Contemp. Math. V. 2.)
- [71] J. Diestel, J. J. Uhl, Jr. Vector Measures. Providence, RI: American Mathematical Society, 1977. (Mathematical Surveys. V. 15.)
- [72] D. N. Dikranjan, I. R. Prodanov, L. N. Stoyanov. Topological Groups. Characters, Dualities and Minimal Group Topologies. New York: Dekker, 1990. (Monogr. Textbooks Pure Appl. Math. V. 130.)
- [73] L. Drewnowski. On subspaces of locally convex spaces with unconditional Schauder bases // Colloq. Math. 1987. V. 52. № 2. P. 239–245.
- [74] W. F. Eberlein. Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 67. P. 217–240.
- [75] W. F. Eberlein. The point spectrum of weakly almost periodic functions // Michigan Math. J. 1955–56. V. 3. P. 137–139.
- [76] Р. Эдвардс. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
- [77] R. Ellis. Locally compact transformation groups // Duke Math. J. 1957. V. 24. P. 119–125.
- [78] R. Ellis. Lectures on topological dynamics. New York: Benjamin, 1969.
- [79] R. Ellis. The enveloping semigroup of projective flows // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1993. V. 13. № 4. P. 635–660.
- [80] Р. Энгелькинг. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [81] P. Erdős, M. Kac, E. R. van Kampen, A. Wintner. Ramanujan sums and almost periodic functions // Studia Math. 1940. V. 9. P. 43–53.
- [82] R. Eymard. L’algèbre de Fourier d’un groupe localement compact // Bull. Soc. Math. France. 1964. V. 92. P. 181–236.
- [83] Ку Fan [Сюй Фань]. Invariant subspaces for a semigroup of linear operators // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. V. 68 = Indag. Math. 1965. V. 27. P. 447–451.
- [84] S. Ferri, D. Strauss. A note on the WAP-compactification and the LUC-compactification of a topological group // Semigroup Forum. 2004. V. 69. № 1. P. 87–101.
- [85] A. M. Fink, G. H. Meisters. On Δ - m sets, almost periodic functions and group topologies // Rocky Mountain J. Math. 1972. V. 2. № 2. P. 225–233.
- [86] E. Følner. On groups with full Banach mean value // Math. Scand. 1946. V. 3. P. 243–254.
- [87] E. Følner. Some special W -almost periodic sets on the integers // Math. Scand. 1983. V. 53. № 2. P. 185–192.
- [88] J. Gil de Lamadrid, L. N. Argabright. Almost periodic measures // Mem. Amer. Math. Soc. 1990. V. 85. № 428.
- [89] T. A. Gillespie, T. T. West. Weakly compact groups of operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 49. P. 78–82.
- [90] I. Glicksberg. Uniform boundedness for groups // Canad. J. Math. 1962. V. 14. P. 269–276.
- [91] S. Goldberg, P. Irwin. Weakly almost periodic vector-valued functions // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.). 1979. V. 157.
- [92] Е. А. Горин. Функционально-алгебраический вариант теоремы Бора–ван Кампена // Матем. сб. 1970. Т. 82 (124). № 2. С. 260–272.
- [93] Е. А. Горин. Некоторые замечания о теореме Гельфанда о группе обратимых элементов банаховой алгебры // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. № 1. С. 70–71.
- [94] H. Gottschalk, G. A. Hedlund. Topological Dynamics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1955.
- [95] C. C. Graham, T. Ramsey. Three results on I -sets // Colloq. Math. 1987. V. 51. P. 141–147.
- [96] E. E. Granirer. The Schur property and the WRNP for submodules of the dual of the Fourier algebra $A(G)$ // C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. 1997. V. 19. № 1. P. 15–20.
- [97] Ф. Гринлиф. Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. М.: Мир, 1973.

- [98] W. Greve. Dini's theorem for almost periodic functions // J. Austral. Math. Soc. 1961/1962. V. 2. P. 143–146.
- [99] С. А. Григорян. Обобщенные аналитические функции // УМН. 1994. Т. 49. №2. С. 3–42.
- [100] A. Grothendieck. Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux // Amer. J. Math. 1952. V. 74. P. 168–186.
- [101] H. Günzler. Integration of almost periodic functions // Math. Z. 1967. V. 102. P. 253–287.
- [102] H. Günzler. Vector valued functions on semigroups with almost periodic differences // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8). 1967. V. 42. P. 775–781.
- [103] H. Günzler. Means over countable semigroups and almost-periodicity in l^1 // J. Reine Angew. Math. 1968. V. 232. P. 194–206.
- [104] H. Günzler. On the countability of the spectrum of weakly almost periodic functions // Proceedings of the International Conference on Partial Differential Equations dedicated to Luigi Amerio on his 70th birthday (Milan/Como, 1982). Milan: Univ. Studi Milano, 1985. P. 109–147. (Rend. Sem. Mat. Fis. Milano. V. 52.)
- [105] A. E. Hamza, G. L. Muraz. Spectral criteria of abstract functions; integral and difference problems // Acta Math. Vietnam. 1998. V. 23. №1. P. 171–184.
- [106] G. Hansel, J.-P. Troallic. Suites uniformément distribuées et fonctions faiblement presque-périodiques // Bull. Soc. Math. France. 1980. V. 108. №2. P. 207–212.
- [107] G. Hansel, J.-P. Troallic. Points de continuité à gauche d'une action de semi-groupe // Semigroup Forum. 1983. V. 26. №3–4. P. 205–214.
- [108] G. Hansel, J.-P. Troallic. On a class of weakly almost periodic mappings // Semigroup Forum. 1990. V. 41. №3. P. 357–372.
- [109] G. Hansel, J.-P. Troallic. Moore groups have the WS-property // Semigroup Forum. 1993. V. 46. №2. P. 146–151.
- [110] D. Helmer. Continuity of semigroup actions // Semigroup Forum. 1981. V. 23. №2. P. 153–188.
- [111] S. Hernández, S. Macario. Invariance of compactness for the Bohr topology // Topology Appl. 2001. V. 111. №2. P. 161–173.
- [112] Э. Хьюитт, К. А. Росс. Абстрактный гармонический анализ. Т. I. М.: Наука, 1975.
- [113] К.-Н. Indlekofer. On some spaces of arithmetical functions. I // Anal. Math. 1992. V. 18. №3. P. 203–221.
- [114] K. Iséki. Vector-space valued functions on semi-groups. I, II, III // Proc. Japan Acad. 1955. V. 31. P. 16–19, 152–155, 699–701.
- [115] K. Jacobs. Ergodentheorie und fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen // Math. Z. 1956. V. 64. P. 298–338.
- [116] K. Jacobs. Fastperiodizitätseigenschaften allgemeiner Halbgruppen in Banach-Räumen // Math. Z. 1957. V. 67. P. 83–92.
- [117] B. E. Johnson. Cohomology of Banach Algebras. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1972. (Mem. Amer. Math. Soc. V. 127.)
- [118] H. D. Junghenn. Weakly almost periodic representations of semigroups by Markov operators // Semigroup Forum. 1987. V. 35. №2. P. 195–205.
- [119] H. D. Junghenn. Direct sums of spaces of functions on semigroups // Semigroup Forum. 1994. V. 49. №1. P. 115–123.
- [120] H. D. Junghenn. Operator semigroup compactifications // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 348. №3. P. 1051–1073.
- [121] H. D. Junghenn, P. Milnes. Distal compactifications of group extensions // Rocky Mountain J. Math. 1999. V. 29. №1. P. 209–227.
- [122] М. И. Кадец. Об интегрировании почти периодических функций со значениями в пространстве Банаха // Функци. анализ и его прил. 1969. Т. 3. №3. С. 71–74.
- [123] М. И. Кадец. О связи между сильной и скалярной почти периодичностью банаховых представлений группы вещественных чисел // Функци. анализ и его прил. 1995. Т. 29. №4. С. 75–77.

- [124] М. И. Кадец, К. Д. Кюрстен. Счетность спектра слабо почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве // Теория функций, функц. анализ и прил. 1980. Т. 33. С. 45–49.
- [125] М. И. Кадец, Ю. И. Любич. О связи между различными формами почти периодичности представлений групп // Теория функций, функц. анализ и прил. 1990. Т. 53. С. 3–5.
- [126] М. И. Караханян. Условия полноты системы собственных векторов обобщенно нормального оператора // Ереван. гос. ун-т. Учен. зап. Естеств. науки. 1988/1989. № 3. С. 3–8.
- [127] Т. Кауано. Almost periodic functions on topological semigroups // Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. 1979. V. 13. P. 45–53.
- [128] S. S. Khurana. Pointwise compactness and measurability // Pacific J. Math. 1979. V. 83. № 2. P. 387–391.
- [129] S. S. Khurana, J. Vielma. Weak sequential convergence and weak compactness in spaces of vector-valued continuous functions // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 195. № 1. P. 251–260.
- [130] Д. В. Косыгин, А. А. Минасов, Я. Г. Синай. Статистические свойства спектров операторов Лапласа–Бельтрами на поверхностях Лиувилля // УМН. 1993. Т. 48. № 4. С. 3–130.
- [131] A. T.-M. Lau. Finite-dimensional invariant subspaces for a semigroup of linear operators // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 97. № 2. P. 374–379.
- [132] A. T.-M. Lau. Amenability of semigroups // The Analytical and Topological Theory of Semigroups. Berlin: de Gruyter, 1990. P. 313–334. (de Gruyter Exp. Math. V. 1.)
- [133] A. T.-M. Lau, V. Losert. Complementation of certain subspaces of $L_\infty(G)$ of a locally compact group // Pacific J. Math. 1990. V. 141. № 2. P. 295–310.
- [134] A. T.-M. Lau, V. Losert. Ergodic sequences in the Fourier–Stieltjes algebra and measure algebra of a locally compact group // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. V. 351. № 1. P. 417–428.
- [135] A. T.-M. Lau, P. Milnes, J. S. Pym. Compactifications of locally compact groups and closed subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 329. № 1. P. 97–115.
- [136] A. T.-M. Lau, P. Milnes, J. S. Pym. Flows on invariant subsets and compactifications of a locally compact group // Colloq. Math. 1998. V. 78. № 2. P. 267–281.
- [137] A. T.-M. Lau, P. Milnes, J. Pym. On the structure of minimal left ideals in the largest compactification of a locally compact group // J. London Math. Soc. (2). 1999. V. 59. № 1. P. 133–152.
- [138] A. T.-M. Lau, J. C. S. Wong. Weakly almost periodic elements in $L_\infty(G)$ of a locally compact group // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 107. № 4. P. 1031–1036.
- [139] J. D. Lawson. Joint continuity in semitopological semigroups // Illinois J. Math. 1974. V. 18. P. 275–285.
- [140] Б. М. Левитан. Очерк истории теории почти периодических функций // Историко-математические исследования. 1980. Т. 25. С. 156–166.
- [141] Б. М. Левитан, В. В. Жиков. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
- [142] M. Lin, J. Olsen. Besicovitch functions and weighted ergodic theorems for LCA group actions // Convergence in Ergodic Theory and Probability (Columbus, OH, 1993). Berlin: de Gruyter, 1996. P. 277–289. (Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ. V. 5.)
- [143] M. Lin, A. Tempelman. Averaging sequences and modulated ergodic theorems for weakly almost periodic group representations // J. Anal. Math. 1999. V. 77. P. 237–268.
- [144] E. Lindenstrauss. Pointwise theorems for amenable groups // Invent. Math. 2001. V. 146. № 2. P. 259–295.
- [145] L. H. Loomis. The spectral characterization of a class of almost periodic functions // Ann. of Math. (2). 1960. V. 72. P. 362–368.
- [146] L. G. Lucht. Recurrent and almost-periodic sequences // Arch. Math. (Basel). 1997. V. 68. № 1. P. 22–26.
- [147] Ю. И. Любич. Введение в теорию банаховых представлений групп. Харьков: Вища школа, 1985.

- [148] Yu. I. Lyubich, Vũ Quốc Phóng. Asymptotic stability of linear differential equations in Banach spaces // *Studia Math.* 1988. V. 88. № 1. P. 37–42.
- [149] W. Maak. Fastperiodische Funktionen. Berlin: Springer-Verlag, 1967. (Grundlehren Math. Wiss. V. 61.)
- [150] A. A. Markov. Stabilität im Liapounoffschen Sinne und Fastperiodizität // *Math. Z.* 1933. V. 36. P. 708–738.
- [151] M. Mayer. Strongly mixing groups // *Semigroup Forum.* 1997. V. 54. № 3. P. 303–316.
- [152] M. Mayer. Asymptotics of matrix coefficients and closures of Fourier–Stieltjes algebras // *J. Funct. Anal.* 1997. V. 143. № 1. P. 42–54.
- [153] M. G. Megrelishvili. Fragmentability and continuity of semigroup actions // *Semigroup Forum.* 1998. V. 57. № 1. P. 101–126.
- [154] M. Megrelishvili. Generalized Heisenberg groups and Shtern’s question // *Georgian Math. J.* 2004. V. 11. № 4. P. 775–782.
- [155] M. G. Megrelishvili, V. G. Pestov, V. V. Uspenskij. A note on the precompactness of weakly almost periodic groups // *Nuclear Groups and Lie Groups (Madrid, 1999)*. Lemgo: Heldermann, 1985. P. 209–216. (Res. Exp. Math. V. 24.)
- [156] J. Mendoza. Necessary and sufficient conditions for $C(X; E)$ to be barrelled or infrabarrelled // *Simon Stevin.* 1983. V. 57. № 1–2. P. 103–123.
- [157] P. Milnes. On vector-valued weakly almost periodic functions // *J. London Math. Soc.* (2). 1980. V. 22. № 3. P. 467–472.
- [158] P. Milnes. Almost periodic functions on semitopological semigroups // *Rocky Mountain J. Math.* 1982. V. 12. № 2. P. 265–269.
- [159] P. Milnes. Semigroup compactifications of direct and semidirect products // *Canad. Math. Bull.* 1983. V. 26. № 2. P. 233–239.
- [160] P. Milnes. The Bohr almost periodic functions do not form a linear space // *Math. Z.* 1984. V. 188. № 1. P. 1–2.
- [161] P. Milnes. Minimal and distal functions on semidirect products of groups. II // *Math. Scand.* 1986. V. 58. № 2. P. 215–226.
- [162] P. Milnes. On Bohr almost periodicity // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1986. V. 99. № 3. P. 489–493.
- [163] P. Milnes. Minimal and distal functions on semidirect products of groups // *Colloq. Math.* 1988. V. 55. № 2. P. 267–275.
- [164] P. Milnes. Bohr almost periodicity and functions of dynamical type // *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.* 1989. V. 42. № 3. P. 113–118.
- [165] P. Milnes. On distal and equicontinuous compact right topological groups // *Int. J. Math. Math. Sci.* 1994. V. 17. № 2. P. 379–388.
- [166] P. Milnes, J. S. Pym. Function spaces on semitopological semigroups // *Semigroup Forum.* 1980. V. 19. № 4. P. 347–354.
- [167] M. R. Miri, M. A. Pourabdollah. Minimally weakly almost periodic semigroups // *Far East J. Math. Sci.* 1998. Special Volume. Part II. P. 191–202.
- [168] R. T. Moore. Measurable, continuous and smooth vectors for semigroup and group representations // *Mem. Amer. Math. Soc.* 1968. V. 78.
- [169] Н. Г. Мошевитин. Дифференциальные уравнения с почти и условно периодическими коэффициентами: возвращаемость и приводимость // *Матем. заметки.* 1998. Т. 64. № 2. С. 229–237.
- [170] G. Muni. Functions of $\mathfrak{S}$ almost periodic with respect to a homeomorphic group // *Boll. Unione Mat. Ital. (B)* (5). 1980. V. 17. № 1. P. 232–243.
- [171] M. A. Naimark, A. I. Štern [Shtern]. *Theory of Group Representations*. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [172] I. Namioka. Separate continuity and joint continuity // *Pacific J. Math.* 1974. V. 51. P. 515–531.
- [173] I. Namioka, R. R. Phelps. Banach spaces which are Asplund spaces // *Duke Math. J.* 1975. V. 42. № 4. P. 735–750.

- [174] K.-H. Neeb, D. Pickrell. Supplements to the papers entitled: "On a theorem of S. Banach" by Neeb and "The separable representations of $U(H)$ " by Pickrell // J. Lie Theory. 2000. V. 10. № 1. P. 107–109.
- [175] В. Ф. Осипов. Почти периодические функции Бора–Френеля. СПб.: СПбГУ, 1992.
- [176] B. K. Pal, S. N. Mukhopadhyay. The Cesàro–Denjoy–Bochner scale of almost periodicity // Anal. Math. 1991. V. 17. № 4. P. 307–331.
- [177] A. L. T. Paterson. Amenability. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988.
- [178] V. Pestov. Independence of almost periodicity upon the topology of the acting group // Topology Appl. 1998. V. 90. № 1–3. P. 223–225.
- [179] А. Пич. Ядерные локально выпуклые пространства. М.: Мир, 1967.
- [180] A. R. Plastino, A. Plastino. Tsallis' entropy, Ehrenfest theorem and information theory // Phys. Lett. A. 1993. V. 177. № 3. P. 177–179.
- [181] J. Пум. Semigroup structure in Stone–Čech compactifications // J. London Math. Soc. (2). 1987. V. 36. № 3. P. 421–428.
- [182] D. Remus, F. J. Trigos-Arrieta. The Bohr topology of Moore groups // Topology Appl. 1999. V. 97. № 1–2. P. 85–98.
- [183] S. Romanelli. A generalized notion of almost periodicity in connection with vector means and compactifications // Boll. Unione Mat. Ital. B (6). 1986. V. 5. № 2. P. 639–659.
- [184] S. Romanelli. A Godement-type decomposition for positive definite functions // Harmonic Analysis (Luxembourg, 1987). Berlin: Springer-Verlag, 1988. P. 242–251. (Lecture Notes in Math. V. 1359.)
- [185] J. Rosenblatt, W. M. Ruess, D. Sentilles. On the critical part of a weakly almost periodic function // Houston J. Math. 1991. V. 17. № 2. P. 237–249.
- [186] J. Rosenblatt, Z. Yang. Functions with a unique mean value // Illinois J. Math. 1990. V. 34. № 4. P. 744–764.
- [187] W. M. Ruess, W. H. Summers. Integration of asymptotically almost periodic functions and weak asymptotic almost periodicity // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.). 1989. V. 279.
- [188] W. M. Ruess, W. H. Summers. Weak almost periodicity and the strong ergodic limit theorem for periodic evolution systems // J. Funct. Anal. 1990. V. 94. № 1. P. 177–195.
- [189] W. Ruppert. Compact Semitopological Semigroups: An Intrinsic Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1984. (Lecture Notes in Math. V. 1079.)
- [190] W. A. F. Ruppert. On signed $\mathfrak{a}$ -adic expansions and weakly almost periodic functions // Proc. London Math. Soc. (3). 1991. V. 63. № 3. P. 620–656.
- [191] C. Ryll-Nardzewski. On fixed points of semigroups of endomorphisms of linear spaces // Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Berkeley, CA, 1965/66). V. II: Contributions to Probability Theory, Part 1. Berkeley: Univ. California Press, 1967. P. 55–61.
- [192] K. Sakai. On almost periodic compactifications of semitopological semigroups // Sci. Rep. Kagoshima Univ. 1989. V. 38. P. 39–48.
- [193] A. Satyanarayan Rao. On the successive integration of Stepanov-almost periodic functions // Math. Student. 1985. V. 49. № 2–4. P. 153–156.
- [194] T. Scarr. Topological and Borel compactifications of Polish G -spaces // Topology Appl. 2000. V. 105. № 1. P. 113–119.
- [195] Х. Шефер. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
- [196] М. Б. Севрюк. Некоторые проблемы теории КАМ: условно-периодические движения в типичных системах // УМН. 1995. Т. 50. № 2. С. 111–124.
- [197] А. И. Штерн. Stoicheia и платоновы многогранники // Античная культура и современная наука. М.: Наука, 1984. С. 36–43.
- [198] A. I. Shtern. Compact semitopological semigroups and reflexive representability of topological groups // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2. № 1. P. 131–132.
- [199] A. I. Shtern. Analog of the Eberlein–de Leeuw–Glicksberg theorem and algebras with unique mean value on amenable groups // Russian J. Math. Phys. 2001. V. 8. № 2. P. 246–249.

- [200] А. И. Штерн. Критерии слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах // Матем. сб. 2002. Т. 193. №9. С. 139–156.
- [201] A. I. Shtern. Values of invariant means, left averaging, and criteria for a locally compact group to be amenable as discrete group // Russian J. Math. Phys. 2003. V. 10. №2. P. 185–198.
- [202] A. I. Shtern. Representations of topological groups in locally convex spaces: continuity properties and weak almost periodicity // Russian J. Math. Phys. 2004. V. 11. №1. P. 81–108.
- [203] A. I. Shtern. Weakly almost periodic representations of topological groups in Mackey locally convex spaces // Adv. Stud. Contemp. Math. 2005. V. 10. №2 (to appear).
- [204] А. И. Штерн. Топологические группы с конечными алгебрами фон Неймана типа I // Матем. сб. 2005. Т. 196. №3. С. 143–160.
- [205] М. А. Шубин. Спектральная теория и индекс эллиптических операторов с почти периодическими коэффициентами // УМН. 1979. Т. 34. №2. С. 95–135.
- [206] C. Stegall. The Radon–Nikodým property in conjugate Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 206. P. 213–223.
- [207] C. Stegall. The duality between Asplund spaces and spaces with the Radon–Nikodým property // Israel J. Math. 1978. V. 29. №4. P. 408–412.
- [208] S. Stoński. On compactness in variation of almost periodic functions // Demonstratio Math. 1998. V. 31. №1. P. 131–134.
- [209] M. Talagrand. Some functions with a unique invariant mean // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 82. №2. P. 253–256.
- [210] J. L. Taylor. Measure Algebras. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1973. (CBMS Reg. Conf. Ser. Math. V. 16.)
- [211] S. Teleman. Sur la représentation linéaire des groupes topologiques // Ann. Sci. École Norm. Sup. (3). 1957. V. 74. P. 319–339.
- [212] J.-P. Troallic. Une approche nouvelle de la presque-périodicité faible // Semigroup Forum. 1981. V. 22. №3. P. 247–255.
- [213] J.-P. Troallic. Semigroupes semitopologiques et presque-périodicité // Recent Developments in the Algebraic, Analytical, and Topological Theory of Semigroups (Oberwolfach, 1981). Berlin: Springer-Verlag, 1983. P. 239–251. (Lecture Notes in Math. V. 998.)
- [214] E. R. van Kampen, A. Wintner. On the almost periodic behavior of multiplicative number-theoretical functions // Amer. J. Math. 1940. V. 62. P. 613–626.
- [215] W. A. Veech. Almost automorphic functions on groups // Amer. J. Math. 1965. V. 87. P. 719–751.
- [216] W. A. Veech. Topological dynamics // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. №5. P. 775–830.
- [217] K. Venkataraman. Boolean valued almost periodic functions: existence of the mean // J. Indian Math. Soc. (N.S.). 1979. V. 43. №1–4. P. 275–283.
- [218] E. Vesentini. Spectral properties of weakly asymptotically almost periodic semigroups // Adv. Math. 1997. V. 128. №2. P. 217–241.
- [219] J. von Neumann. Almost periodic functions in a group. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. V. 36. №2. P. 445–492.
- [220] J. von Neumann. On complete topological groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1935. V. 37. P. 1–20.
- [221] B. Weiss. Single Orbit Dynamics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000 (CBMS Reg. Conf. Ser. Math. V. 95.).
- [222] H. Weyl. Almost periodic invariant vector sets in a metric vector space // Amer. J. Math. 1949. V. 71. P. 178–205.
- [223] T. S. Wu. Left almost periodicity does not imply right almost periodicity // Bull. Amer. Math. Soc. 1966. V. 72. P. 314–316.
- [224] G. Xu. Herz–Schur multipliers and weakly almost periodic functions on locally compact groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 349. №6. P. 2525–2536.
- [225] Xu, Q.. Representations and compactifications of locally compact groups // Math. Japon. 2000. V. 52. №2. P. 323–329.

- [226] D. Yost. Asplund spaces for beginners // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 1993. V. 34. №2. P. 159–177.
- [227] N. J. Young. Periodicity of Functionals and Representations of Normed Algebras on Reflexive Spaces // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2). 1976/77. V. 20. №2. P. 99–120.
- [228] S. D. Zaidman. Almost-periodic Functions in Abstract Spaces. Boston, MA: Pitman, 1985.
- [229] C.-Y. Zhang. Vector-valued means and weakly almost periodic functions // Int. J. Math. Math. Sci. 1994. V. 17. №2. P. 227–237.
- [230] C.-Y. Zhang. Vector-valued means and their applications in some vector-valued function spaces // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.). 1994. V. 334. P. 1–35.
- [231] C.-Y. Zhang. Integration of vector-valued pseudo-almost periodic functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 121. №1. P. 167–174.
- [232] C.-Y. Zhang. Vector-valued pseudo almost periodic functions // Czechoslovak Math. J. 1997. V. 47. №3. P. 385–394.
- [233] C.-y. Zhang. Ergodicity and its applications. I. Basic properties // Acta Anal. Funct. Appl. 1999. V. 1. №1. P. 28–39.
- [234] C.-y. Zhang. Ergodicity and its applications. II. Averaging method of some dynamical systems // Acta Anal. Funct. Appl. 1999. V. 1. №2. P. 146–159.
- [235] В. В. Жиков. Об одной задаче Бохнера и фон Неймана // Матем. заметки. 1968. Т. 3. №5. С. 529–538.
- [236] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
- [237] В. В. Жиков, Е. В. Кривенко. Усреднение сингулярно возмущенных эллиптических операторов // Матем. заметки. 1983. Т. 33. №4. С. 571–582.