Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Де Лео, Доказательство гипотезы Дынникова о расположении зон устойчивости в задаче Новикова о плоских сечениях периодических поверхностей, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 3, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1431>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:24:20

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ ДЫННИКОВА О РАСПОЛОЖЕНИИ
ЗОН УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ НОВИКОВА О ПЛОСКИХ
СЕЧЕНИЯХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Р. ДЕ ЛЕО

Задача Новикова об асимптотическом поведении слоения, индуцированного постоянной 1-формой в $\mathbb{R}^3$, ограниченной на 3-периодическую поверхность, широко изучалась [1]–[4] после постановки задачи в [5].

В частности фундаментальные результаты А. В. Зорича и И. А. Дынникова привели к следующей картине: множество направлений 1-форм, индуцирующих открытые слои на 3-периодической поверхности M^2 , вложенной в $\mathbb{R}^3$, в случае общего положения представляет собой несвязное объединение конечного числа открытых подмножеств $\{\mathcal{D}_l(M^2)\}$ в $\mathbb{RP}^2$, каждое из которых помечено точкой $l \in \mathbb{RP}^2$, являющейся рациональным направлением по отношению к любой тройке базисных векторов симметрии поверхности M^2 (т.е. любому набору образующих группы сдвигов, сохраняющих M^2). Соответствие между $\mathcal{D}$ и l задается следующим образом: открытые слои, порожденные 1-формой направления $\omega \in \mathcal{D}_l$, все имеют сильную асимптотику прямой линии, направление которой задается как пересечение плоскостей, дуальных к ω и к l (т.е. “ $\omega \times l$ ”). Почти все направления, находящиеся вне $\{\mathcal{D}_l\}$, порождают только замкнутые слои (не считая сепаратрис).

Мы называем $\{\mathcal{D}_l(M^2)\}$ множеством “зон устойчивости” поверхности M^2 . Как показал Дынников, зоны устойчивости, соответствующие непересекающимся поверхностям, совместимы, а именно, зоны, имеющие нетривиальное пересечение, должны иметь общую метку, поэтому можно ассоциировать семейство “зон устойчивости” $\{\mathcal{D}_l(f)\}$ с каждой 3-периодической функцией Морса f , определяя их как объединения зон устойчивости по всем уровням функции. В этом случае множество “зон устойчивости” либо содержит всего одну зону, покрывающую всю проективную плоскость, либо состоит из бесконечного счетного числа элементов, распределенных, грубо говоря, фрактальным образом.

Во втором случае множество $\bigcup \mathcal{D}_l(f)$ всюду плотно в $\mathbb{RP}^2$, но не покрывает $\mathbb{RP}^2$ целиком: его дополнение состоит из границ всех зон, а также “эргодических” направлений; эти направления образуют замкнутое совершенное множество с пустой внутренностью (и до сих пор не известной мерой). Каждое из этих направлений порождает слои со сложной топологией на единственном уровне функции f и только замкнутые слои на всех остальных уровнях. Недавно [6] автор показал, что предельные точки множества всех меток — это в точности все граничные точки зон и эргодические направления. Доказательство опиралось на утверждение, принадлежащее Дын-

никову, основанное на нестрогих аргументах. Цель настоящей заметки – дать полное доказательство этого утверждения.

Прежде всего отметим, что, как только выбран базис в группе трансляций поверхности M^2 , каждую метку l можно однозначно (с точностью до знака) представить тройкой L взаимно простых целых чисел. Это соответствие позволяет нам определить “норму” для этих точек (как норму соответствующих векторов L). Пусть теперь $d(l, l')$ обозначает расстояние в $\mathbb{RP}^2$, заданное как наименьший угол между прямыми l и l' .

ЛЕММА 1. *Для любой 3-периодической поверхности M найдется такая конечная положительная константа C , что $d(\mathcal{D}_l(M), l) \leq C/\|l\|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω – постоянная 1-форма, соответствующая направлению $l' \in \mathcal{D}_l(M^2)$ общего положения; тогда [2] все открытые слои, порождаемые ею на M^2 , лежат на периодических по отношению к подрешетке $\ker l$ ранга 2 подмногообразиях с краем $\tilde{N}_i(l')$, край которых состоит из краев изолированных друг от друга плоских дисков (критических слоев, отделяющих открытые орбиты от замкнутых). Заклеивая эти дырки естественным образом, мы получаем многообразия N_i рода нуль, являющиеся конечными деформациями плоскостей направления l .

Мы утверждаем, что $d(l, l') \leq C/\|l\|$ для некоторой конечной положительной константы C , зависящей только от M . Действительно, пусть N – фундаментальная область одного, произвольно выбранного, из N_i . Спроектируем ее ортогонально на плоскость π направления $l' \times (l \times l')$. С одной стороны, поскольку π перпендикулярна плоским дискам, входящим в N , мы получим следующую оценку сверху на площадь проекции: $\mathcal{A}(N_\pi) = \mathcal{A}((N \setminus \{\text{Discs}\})_\pi) \leq \mathcal{A}(N \setminus \{\text{Discs}\}) \leq \mathcal{A}(M^2) := C/2 < \infty$. С другой стороны, так как, повторяя N периодически, мы получаем поверхность, представляющую собой конечно деформированную плоскость направления l (фундаментальная область которой имеет площадь $\|l\|$), мы также имеем $\mathcal{A}(N_\pi) \geq \|l\| \sin d(l, l')$, так как конечная периодическая деформация плоскости может только увеличить площадь проекции в любом направлении. Из этих двух фактов следует, что $\sin d(l, l') \leq C/(2\|l\|)$, $\forall l' \in \mathcal{D}_l(M^2)$, а значит, $d(l, l') \leq qC/\|l\|$ для достаточно больших l .

ТЕОРЕМА 1. *Для любой 3-периодической функции Морса f имеется такая конечная константа C_f , что любая зона устойчивости $\mathcal{D}_l(f)$ содержится в круге радиуса $C_f/\|l\|$ с центром в l .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 1, мы видим, что для любого уровня $M_e = f^{-1}(e)$ множество $\mathcal{D}_l(M_e^2)$ содержится в круге радиуса $C_e = 2\mathcal{A}(M_e^2)$ с центром в l , поэтому $\mathcal{D}_l(f) = \bigcup_{e \in \mathbb{R}} \mathcal{D}_l(M_e^2)$ содержится внутри диска радиуса $C_f = \sup_{e \in \mathbb{R}} C_e$, который конечен, поскольку C_e является непрерывной функцией от e с компактной областью определения.

Автор глубоко признателен С. П. Новикову и И. А. Дынникову за их драгоценную поддержку посредством обсуждений и советов с самого начала его работы над данной задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Зорич // УМН. 1984. Т. 39. № 5. С. 235–236. [2] I. A. Dynnikov // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1997. V. 179. P. 45–73. [3] И. А. Дынников // УМН. 1999. Т. 54. № 1. С. 21–60. [4] R. De Leo // SIAM J. Appl. Dynam. Syst. 2003. V. 2. № 4. P. 517–545. [5] С. П. Новиков // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 3–49. [6] Р. Де Лео // УМН. 2003. Т. 58. № 5. С. 197–198.

University of Cagliari, University of Maryland
E-mail: roberto.deleo@ca.infn.it

Представлено И. А. Дынниковым
Принято редколлегией 23.03.2005