Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алимов, Геометрическое строение чебышёвских множеств в пространствах $\ell^\infty(n)$, c_0 и c , *УМН*, 2005, том 60, выпуск 3, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1432>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:47:20

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ ЧЕБЫШЕВСКИХ МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВАХ $\ell^\infty(n)$, c_0 И c

А. Р. АЛИМОВ

Подмножество $M \neq \emptyset$ линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$ называется *чебышёвским множеством*, если для каждой точки $x \in X$ множество $P_M x$ ее ближайших точек из M состоит из одной точки. Мы интересуемся геометрическим строением чебышёвских множеств, а также солнц и строгих солнц в пространствах последовательностей $X = \ell^\infty(n)$, c_0 и c . Работа продолжает исследования из [1]–[7].

Пусть $I \subset \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$. Положим $H = \{x \in X \mid x^{(i)} = a_i, i \in I\}$. Для $k \in \mathbb{N}$ определим $\text{cAff}_k(X) = \{H \mid I \subset \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, i \in I, \text{card } \mathbb{N} \setminus I = k\}$, $\text{cAff}_{\omega-k}(X) = \{H \mid I \subset \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, i \in I, \text{card } I = k\}$ – множество *координатных аффинных подпространств* в X конечной размерности k и, соответственно, конечной коразмерности k .

Далее, пусть $M \subset X$, P, Q – аффинные подпространства в X , $Q \subset P$, коразмерность Q в P равна 1. Говорим, что Q – *локально опорная гиперплоскость* к множеству M в подпространстве P ($Q \in \text{locTan}_P(M)$), если найдется точка $x \in P \cap M$ и ее окрестность $\mathcal{O}(x)$ в P такие, что Q является опорной гиперплоскостью к $M \cap \mathcal{O}(x)$ в P . Утверждение, что Q – *опорная гиперплоскость* к множеству $M \cap P$ в подпространстве P будет пониматься обычным образом и записываться в виде $Q \in \text{Tan}_P(M)$.

Положим $T(M) = \{x \mid \text{card } P_M x = 1\}$, $U(M) = \{x \mid \text{card } P_M x \leq 1\}$, $AC(M)$ – множество точек аппроксимативной компактности для M (см. [8]).

Пусть $H \in \text{cAff}_{\omega-1}(X)$ – координатная гиперплоскость, $0 \in H$, $h \in X^*$, $\|h\| = 1$, $h|_H = 0$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \leq b$. Посредством $h(a, b) = \{x \in X \mid a \leq h(x) \leq b\}$ обозначим слой аффинных координатных гиперплоскостей “между a и b ” по отношению к функционалу h . К примеру, $h(0, 0) = H$, $h(-\infty, \infty) = X$.

Рассмотрим пересечение чебышёвского множества с конечным пересечением координатных слоев $h(a, b)$: $\Pi = \bigcap_{k=1}^m h_k(a_k, b_k)$, $h_k \in X^*$, $\text{Ker } h_k \in \text{cAff}_{\omega-1}(X)$, $a_k, b_k \in \overline{\mathbb{R}}$, $a_k \leq b_k$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – аппроксимативно компактное чебышёвское множество в пространстве $X = c$, c_0 или $\ell^\infty(n)$. Тогда если $M \cap \Pi \neq \emptyset$, то $\Pi \subset T(M \cap \Pi) \cap AC(M \cap \Pi)$.

Каждая точка из параллелепипеда Π имеет единственную ближайшую точку $M \cap \Pi$.

Пусть $X = c$. Для $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \leq \beta$, посредством $l(\alpha, \beta) = \{x \in c \mid \alpha \leq \lim x \leq \beta\}$ обозначим слой обобщенных аффинных координатных гиперплоскостей “от α до β ”.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – аппроксимативно компактное чебышёвское множество в пространстве $X = c$ и пусть $\Pi' = h(a, b) \cap l(\alpha, \beta)$ – слой обобщенных координатных подпространств. Тогда если $M \cap \Pi' \neq \emptyset$, то $\Pi' \subset U(M \cap \Pi')$; если M – ограниченно компактное чебышёвское множество, то $\Pi' \subset T(M \cap \Pi')$.

ТЕОРЕМА 3 (Ходулёв–Алимов, см. [4]). Множество M является чебышёвским в $\ell^\infty(n)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия: а) множество M замкнуто; б) множество $M \cap P$ связно для любых $k = 1, \dots, n$ и $P \in \text{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$; в) для любых $k = 2, \dots, n$, $P \in \text{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$ и $Q \in \text{cAff}_{k-1}(P)$ из условия $Q \in \text{locTan}_P(M)$ вытекает, что $Q \in \text{Tan}_P(M)$ и пересечение $Q \cap M$ одноточечно.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $M \subset c_0$ аппроксимативно компактно. Тогда M является чебышёвским множеством в c_0 тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: а) пересечение $M \cap H$ связно для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $H \in \text{cAff}_{\omega-k}(c_0)$; б) для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $H \in \text{cAff}_{\omega-k}(c_0)$ и $Q \in \text{cAff}_{\omega-(k+1)}(H)$ из условия, что $Q \in \text{locTan}_H(M)$, вытекает, что $Q \in \text{Tan}_H(M)$ и пересечение $Q \cap M$ одноточечно.

Напомним, что множество M в функциональном пространстве X называется *монотонно линейно связным*, если любые две точки $x, y \in M$ могут быть соединены кривой $k(\cdot) \subset M$ – “монотонной дугой” – координатные функции $k^{(i)}(t)$, $i \in \mathbb{N}$, монотонны по t при каждом i .

ТЕОРЕМА 5. Если M – ограниченно компактное чебышёвское множество в пространстве c , то: а) пересечение $M \cap H$ монотонно линейно связно для любого $H \in \text{clAff}_{\omega-k}(c)$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$; б) для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $H \in \text{clAff}_{\omega-k}(c)$ и $Q \in \text{clAff}_{\omega-(k+1)}(H)$

из условия, что $Q \in \text{locTan}_H(M)$, вытекает, что $Q \in \text{Tan}_H(M)$ и пересечение $Q \cap M$ одноточечно.

Здесь $\text{clAff}_{\omega-k}(c)$ состоит из аффинных подпространств H вида $\{z \in c \mid z^{(i_1)} = a_{i_1}, \dots, z^{(i_{k-1})} = a_{i_{k-1}}, \lim z = \alpha, \text{ где } \alpha, a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}} \in \mathbb{R}, \text{ и } j_j \neq i_{j'}, j \neq j'\}$.

Напомним (см. [8]), что множество $M \subset X$ называется *солнцем*, если для каждой точки $x \in X \setminus M$ существует точка $y \in P_M x$ такая, что $y \in P_M[(1-\lambda)y + \lambda x]$ для всех $\lambda \geq 0$. Подмножество $M \subset X$ называется *строгим солнцем*, если для каждой точки $x \in X \setminus M$ множество $P_M x$ непусто и $y \in P_M[(1-\lambda)y + \lambda x]$ выполнено для всех $y \in P_M x$ и $\lambda > 0$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n-1$ и $H \in \text{sAff}_k(\mathbb{R}^n)$ – координатное аффинное подпространство, норма на H индуцирована нормой $\|\cdot\|_\infty$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть $M \cap H \neq \emptyset$. Тогда: а) если M – чебышёвское множество в $\ell^\infty(n)$, то $M \cap H$ – чебышёвское множество в H ; б) если M – солнце в $\ell^\infty(n)$, то $M \cap H$ – солнце в H ; в) если M – строгое солнце в $\ell^\infty(n)$, то возможны два варианта (оба – реализуемые): или $M \cap H$ – строгое солнце в H , или $M \cap H$ – солнце, но не строгое солнце в H , в последнем случае найдется опорный конус $K = \dot{K}(\xi, \zeta) \subset \ell^\infty(n)$ линейной размерности $\geq k$ такой, что $H \subset \text{bd } K$ и $\text{int } K \cap M = \emptyset$, при этом $M \not\subset H$.

Здесь опорный конус $\dot{K}(y, x)$ к шару $B(x, \|x - y\|)$ в его граничной точке y определяется как $\dot{K}(y, x) = \bigcup_{r>0} \dot{B}(-ry + (r+1)x, (r+1)\|x - y\|)$; $\dot{B}(x, r) = \{z \mid \|x - z\| < r\}$ – открытый шар, $\text{bd } A$ и $\text{int } A$ – граница и, соответственно, внутренность множества A . Напомним, что под линейной размерностью выпуклого множества C понимается размерность максимального аффинного подпространства, содержащегося в C .

В теореме 6 утверждения а) и в) доказаны в [4], а б) – в [2] и [3].

Для $M \subset X$ пусть $\text{m}(M)$ – оболочка Банаха–Мазура множества M , т.е. пересечение всех замкнутых шаров $B(x, r)$ в X , содержащих M . Подмножество $M \subset X$ называется *m-связным* (см. [3]), если $\text{m}(\{x, y\}) \cap M \neq \{x, y\}$ для любых различных точек $x, y \in M$.

ТЕОРЕМА 7. 1) Аппроксимативно компактное чебышёвское множество в $\ell^\infty(n)$ или c_0 m-связно и монотонно линейно связно. В пространстве с аппроксимативно компактным чебышёвским множеством m-связно, ограничено компактное чебышёвское множество – монотонно линейно связно. 2) m-связное аппроксимативно компактное непустое подмножество пространства $\ell^\infty(n)$ или c_0 является солнцем; m-связное ограниченно компактное непустое подмножество пространства с является солнцем. 3) Каждое солнце в $\ell^\infty(n)$ и c_0 m-связно и монотонно линейно связно.

В случае $\ell^\infty(n)$ утверждения теоремы 7 установлены в [2] и [3]. Второе утверждение в п. 2) установлено К. Франчетти и С. Роверси.

СЛЕДСТВИЕ. 1) Пусть M – аппроксимативно компактное солнце в c_0 и $H \in \text{sAff}_{\omega-k}(c_0)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Если $M \cap H \neq \emptyset$, то $M \cap H$ – аппроксимативно компактное солнце в H . 2) Пусть M – солнце в $X = c$, c_0 или ℓ^∞ и $H \in \text{sAff}_k(X)$. Если $M \cap H \neq \emptyset$, то $M \cap H$ – солнце в H , являющееся m-связным и монотонно линейно связным множеством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ch. B. Dunham // J. Approx. Theory. 1969. V. 2. P. 374–383. [2] H. Berens, L. Hetzelt // Aequat. Math. 1984. V. 27. P. 274–287. [3] A. L. Brown // Math. Ann. 1987. V. 279. P. 87–101. [4] А. Р. Алимов // Функциональный анализ и его прил. 2005. Т. 39. № 1. С. 1–10. [5] А. Р. Алимов // J. Approx. Theory. 2004. V. 129. P. 217–229. [6] А. Р. Алимов // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 1. С. 3–11. [7] А. Р. Алимов // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69. № 4 (в печати). [8] Л. П. Власов // УМН. 1973. Т. 28. № 6. С. 3–66.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Представлено В. М. Тихомировым
Принято редколлегией 23.03.2005