Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Д. Арнольд, Локальная теорема существования решений d -мерной системы уравнений Навье–Стокса, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 3, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1433>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:43:38

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ d-МЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

М. Д. АРНОЛЬД

В этой работе рассматривается система уравнений Навье–Стокса, описывающая движение вязкой несжимаемой жидкости в d -мерном пространстве в отсутствие внешней силы:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \langle u(x, t), \nabla \rangle u(x, t) = \nu \Delta u(x, t) + \nabla p(x, t), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} u(x, t) = 0. \quad (2)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^d$, $u(x, t): \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ – d -мерный вектор скорости, ν – это кинематическая вязкость, которую для определенности полагают равной 1, скалярная функция $p(x, t): \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ – давление. Для преобразования Фурье функций $u(x, t)$, $p(x, t)$ система (1), (2) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} v(k, t) = |k|^2 v(k, t) + i \int_{\mathbb{R}^d} \langle k', v(k - k', s) \rangle P_k v(k', s) dk'. \quad (3)$$

Перепишав это уравнение в интегральной форме, получим

$$v(k, t) = v(k, 0) e^{-|k|^2 t} + i \int_0^t e^{-|k|^2(t-s)} ds \int_{\mathbb{R}^d} \langle k', v(k - k', s) \rangle P_k v(k', s) dk'. \quad (4)$$

В работах [1], [2] было введено пространство функций $\Phi(\alpha, \omega)$ таких, что для $f(k) \in \Phi(\alpha, \omega)$

- 1) $f(k) = c(k)/|k|^\alpha$ при $0 < |k| \leq 1$,
- 2) $f(k) = d(k)/|k|^\omega$ при $|k| \geq 1$,

где $c(k)$, $d(k)$ – непрерывные ограниченные функции. В этом пространстве также была введена норма $\|f(k)\|_{\alpha, \omega} = \sup_{0 < |k| \leq 1} f(k)|k|^\alpha + \sup_{|k| \geq 1} f(k)|k|^\omega$.

Имеют место следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < \alpha < d$, $\omega \geq d - 1$. Тогда для любой константы h и для любой функции $v(k)$ из $\Phi(\alpha, \omega)$ такой, что $\|v(k)\|_{\alpha, \omega} < h$, найдется такой момент времени $t_0 = t_0(h)$, что на отрезке $[0, t_0]$ существует решение задачи Коши для уравнения (4) с начальными данными $v(k)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < \alpha < d$, $\omega \geq d - 1$. Пусть задан момент времени t_0 . Тогда найдется такая константа $C = C(\alpha, \omega, d)$, что для любой функции $v(k)$ из $\Phi(\alpha, \omega)$ такой, что $\|v(k)\|_{\alpha, \omega} < C$, существует решение уравнения (4) на отрезке времени $[0, t_0]$ с начальными данными $v(k)$.

ТЕОРЕМА 3. Найдется такая константа C , что для любой функции $v(k)$ из $\Phi(d - 1, d - 1)$ такой, что $\|v(k)\|_{d-1, d-1} \leq C$, существует глобальное решение задачи Коши для уравнения (4) с начальными данными $v(k)$. Причем это решение единственно в классе функций $\Phi(\alpha, \omega)$.

Эти утверждения были доказаны в работе [1] для случая $d = 3$. Здесь мы покажем, что при помощи техники, развитой в работах [1], [2], эти результаты можно без особых усилий обобщить на случай любой конечной размерности $d > 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 и 2. Рассмотрим последовательность функций $\{v^{(n)}(k, t)\}$ следующего вида:

$$v^{(0)}(k, t) = e^{-|k|^2 t} v(k, 0),$$

$$v^{(n+1)}(k, t) = v^{(0)}(k, t) + i \int_0^t e^{-|k|^2(t-s)} ds \int_{\mathbb{R}^d} \langle k, v^{(n)}(k - k', s) \rangle P_k v^{(n)}(k', s) dk'. \quad (5)$$

Из (5) следует неравенство

$$|v^{(n+1)}(k, t)| \leq |v^{(0)}(k, t)| + \|v^{(n)}\|_{\alpha, \omega}^2 |k| \int_0^t e^{-|k|^2(t-s)} ds \left[\int_{\substack{|k'| \leq 1 \\ |k-k'| \leq 1}} \frac{dk'}{|k-k'|^\alpha |k'|^\alpha} + 2 \int_{\substack{|k'| \leq 1 \\ |k-k'| \geq 1}} \frac{dk'}{|k-k'|^\omega |k'|^\alpha} + \int_{\substack{|k'| \geq 1 \\ |k-k'| \geq 1}} \frac{dk'}{|k-k'|^\omega |k'|^\omega} \right]. \quad (6)$$

Рассматривая это неравенство в трех областях 1) $|k| \leq 1$; 2) $1 < |k| \leq 1/\sqrt{t_0}$; 3) $|k| \geq 1/\sqrt{t_0}$ и в каждой из них проводя оценки, получим для $v^{(n)} = \max_{0 \leq t \leq t_0} \|v^{(n+1)}(k, t)\|_{\alpha, \omega}$

$$v^{(n+1)} \leq v^{(0)} + A_1(\alpha, \omega, d)(v^{(n)})^2 t_0^{1/3}. \quad (7)$$

То есть при $4A_1(\alpha, \omega, d)v^{(0)}t_0^{1/3} \leq 1$ из условия $v^{(n)} \leq 2v^{(0)}$ следует $v^{(n+1)} \leq 2v^{(0)}$. Для доказательства теорем 1 и 2 нам осталось показать, что последовательность $\{v^{(n)}(k, t)\}$ фундаментальна в норме $\|\cdot\|_{\alpha, \omega}$. Воспользуемся здесь оценкой $\|v^{(n)}(k, t)\|_{\alpha, \omega} \leq 2v^{(0)}$ и следующим неравенством:

$$|v^{(n+1)}(k, t) - v^{(n)}(k, t)| \leq \int_0^t e^{-|k|^2(t-s)} ds \times \int_{\mathbb{R}^d} (|v^{(n)}(k', s)| + |v^{(n-1)}(k', s)|) |v^{(n)}(k - k', s) - v^{(n-1)}(k - k', s)| dk'. \quad (8)$$

Отсюда следует, что для некоторой константы $0 < \varepsilon < 1$ выполнено $\max_{0 \leq t \leq t_0} \|v^{(n+1)}(k, t) - v^{(n)}(k, t)\|_{\alpha, \omega} \leq \varepsilon \max_{0 \leq t \leq t_0} \|v^{(n)}(k, t) - v^{(n-1)}(k, t)\|_{\alpha, \omega}$. Доказательство теорем 1 и 2 закончено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. При $\alpha = \omega = d - 1$ имеем из (6)

$$\|v^{(n+1)}(k, t)\| \leq \|v^{(0)}(k, t)\| + |k|^d \|v^{(n)}(k, t)\|^2 \int_0^{t_0} e^{-|k|^2(t-s)} ds \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dk'}{|k'|^{d-1} |k - k'|^{d-1}}.$$

Оценив интеграл в правой части, получим

$$\|v^{(n+1)}(k, t)\| \leq \|v^{(0)}(k, t)\| + A_2(d) \|v^{(n)}(k, t)\|^2. \quad (9)$$

Причем оценка (9) верна при любом $t > 0$. Далее, воспользовавшись той же техникой, что и при доказательстве теорем 1 и 2, получаем, что при достаточно малых начальных данных существует единственное в классе функций $\Phi(d-1, d-1)$ решение задачи Коши для уравнения (4) на любом отрезке времени $[0, t]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ya. G. Sinai. On local and global existence and uniqueness of solutions of the 3D-Navier-Stokes system on $\mathbb{R}^3$ // Perspectives in Analysis. Conference in honor of Lennart Carleson's 75th birthday. Berlin: Springer-Verlag (to appear). [2] Ю. Ю. Бахтин, Е. И. Динабург, Я. Г. Синай // УМН. 2004. Т. 59. № 6. С. 55–72.

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики РАН
E-mail: maxim@darnold.mccme.ru

Представлено Я. Г. Синаем
Принято редколлегией 23.03.2005