Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гришин, Структурные и алгоритмические вопросы в T -пространствах над полем характеристики $p > 0$, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 3, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1434>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 02:30:05

**СТРУКТУРНЫЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ
В T -ПРОСТРАНСТВАХ НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ $p > 0$**

А. В. Гришин

В работах [1], [2] было рассмотрено понятие предельного T -пространства в свободной (относительно свободной) алгебре над полем k простой характеристики. Оно по сути дела является некоторым частным случаем понятия *предельного подмодуля*. Напомним, что T -пространство, т.е. линейное подпространство в свободной ассоциативной счетно порожденной алгебре $F = k \langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$, устойчивое относительно эндоморфизмов алгебры F , согласно определению является унитарным правым модулем над полугрупповой алгеброй kT , где T – полугруппа эндоморфизмов алгебры. Вообще, под T -пространством (абстрактным) понимается унитарный правый kT -модуль (см. [2], [3]). Поле k будет предполагаться бесконечным, хотя для многих вопросов это ограничение не является существенным.

Назовем подмодуль L модуля M *предельным*, если сам он не является конечно порожденным, а любой содержащий его собственным образом подмодуль конечно порожден. Ясно, что любой подмодуль L_1 модуля M , содержащий L , обладает тем свойством, что M/L_1 – нётеров модуль.

Назовем не нётеров модуль L *факторно нётеровым*, если фактор-модуль M/L нётеров. Понятие факторной нётеровости существенно шире, чем понятие предельности. Нетривиальные примеры предельных подмодулей привести намного сложнее, чем факторно нётеровых. Легко видеть, что пересечение и сумма конечного числа факторно нётеровых модулей факторно нётерова. Из приведенных определений получаются определения предельного и факторно нётерова T -пространства, как соответствующего kT -подмодуля в свободной (относительно свободной) алгебре. Рассмотренные понятия содержательны для T -пространств только в характеристике $p > 0$, так как в случае поля нулевой характеристики все T -пространства, лежащие в свободной алгебре F , конечно порождены (см. [4]).

Назовем n -словом алгебры F такой ее одночлен, в который каждая переменная входит с кратностью n .

Пусть W_n – T -пространство, порожденное всеми n -словами свободной алгебры F над полем k характеристики $p > 0$,

$$U_p = W_p^* + V_p,$$

где W_p^* – унитарно замкнутое (т.е. выдерживающее такую подстановку единицы вместо переменной, которая не выводит за пределы F) T -пространство в F , порожденное всеми p -словами, V_p – T -идеал алгебры F , порожденный многочленами $[x_1, [x_2, x_3]]$ и x_1^m , где $m = p$, если $p > 2$, и $m = 4$, если $p = 2$. Если $p = 2$, то $W_p = W_p^*$.

Сначала для $p = 2$ в [5], а затем и для $p > 2$ в [6] было доказано, что U_p/V_p не является конечно порожденным T -пространством. Более конкретно, была указана бесконечная неприводимая система порождающих Σ_p , через которую можно явно выразить любые p -слова (следовательно, и любые элементы из W_p^*) по модулю V_p . В характеристике $p = 2$ система Σ_p имеет вид: $x_1^2, x_1^2 x_2^2, \dots, x_1^2 \dots x_n^2, \dots$; в характеристике $p > 2$ многочлены системы содержат коммутаторы и их вид несколько более сложен (см. [2]). В любом случае имеется алгоритм явного представления элементов из U_p через систему Σ_p и четыре порождающих V_p (как T -пространства).

В работе Е. А. Киреевой [1] (см. также [2]) установлено, что U_p – *предельное T -пространство* в F . Этот весьма интересный результат, как и приводимые ниже теоремы связан с исследованием так называемых *свойств экстремальности*, впервые рассмотренных в [7].

Для доказательства конечной порожденности ключевым является следующий факт, первоначально сформулированный автором для некоторых специальных случаев и доказанный в максимальной общности Е. А. Киреевой в [8].

Пусть $\mathcal{C}_n$ – T -идеал алгебры F , порожденный произведением коммутаторов $[x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]$, и k – произвольное нётерово кольцо (коммутативное, с единицей). Тогда в фактор-алгебре $F/\mathcal{C}_n$ любое T -пространство, порожденное многочленами, в каждый из которых все переменные входят с ограниченной кратностью, конечно порождено.

Условие ограниченности, как показывают примеры, существенно.

ТЕОРЕМА 1. (1) Пусть L – некоторое T -пространство в алгебре F , содержащее U_p . Тогда $U_p \neq L$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{C}_n \subset L$ для некоторого n .

(2) Существует алгоритм, распознающий принадлежность данного многочлена f к T -пространству U_p .

(3) Если f – полиоднородный многочлен степени n , не лежащий в U_p , то T -пространство $\{U_p, f\}^T$, порожденное многочленом f и элементами из U_p , содержит $\mathcal{C}_n$, причем существует алгоритм получения с помощью подстановок и линейных действий из порождающих T -пространства U_p и многочлена f многочлена

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] x_{2n+1}.$$

(4) Порождающими T -пространства $\{U_p, f\}^T$ являются порождающие T -пространства V_p (четыре элемента), многочлен f и многочлены из Σ_p , содержащие менее n коммутаторов, если $p > 2$, и менее n квадратов, если $p = 2$.

Для многих конкретных T -пространств, содержащих U_p , существует алгоритм отыскания конечной системы порождающих.

ТЕОРЕМА 2. Пусть I – некоторый T -идеал, содержащий собственным образом T -идеал V_p . Тогда I – факторно нётерово T -пространство в алгебре F .

По отношению к T -идеалу V_p имеются аналоги утверждений (1)–(4).

Пусть теперь $\overline{F} = F/([x_1, x_2], x_3)^T$. Через $\overline{a}$ будем обозначать образ объекта a из F при каноническом гомоморфизме на $\overline{F}$. Рассмотрим цепочку T -идеалов $\overline{V}_p^n$ алгебры $\overline{F}$, где n – произвольное натуральное число. Ясно, что $\overline{V}_p^n = \{\overline{x}_1^m \dots \overline{x}_n^m\}^T + \{\overline{x}_1^m \dots \overline{x}_n^m \overline{x}_{n+1}\}^T$. С данным разложением связана прямая сумма: $\{\overline{x}_1^m \dots \overline{x}_n^m\}^T \oplus \{\overline{x}_1^m \dots \overline{x}_n^m \overline{\mathcal{C}}_1\}^T$, компоненты которой обладают следующими свойствами.

ТЕОРЕМА 3. Для любого n

(1) $\{\overline{x}_1^m \dots \overline{x}_n^m\}^T$ – нётеров kT -модуль;

(2) если $x_1, \dots, x_n$ – переменные алгебры F , не входящие в систему Σ_p (с точностью до перенумерации переменных), то T -пространство $\{\overline{x}_1^m \dots \overline{x}_n^m \overline{\Sigma}_p\}^T + \overline{V}_p^{n+1}$ не является конечно порожденным.

(3) $\{\overline{x}_1^m \dots \overline{x}_n^m \overline{\mathcal{C}}_1\}^T$ – факторно нётерово T -пространство в $\overline{V}_p^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. А. Киреева. Предельные T -пространства // Деп. в ВИНТИ 25.02.2004. № 320-В2004. [2] Е. В. Аладова, А. В. Гришин, Е. А. Киреева // Чебышевский сборник. Т. 5. № 4 (12), 2004. С. 39–57. [3] А. В. Гришин // Фундам. прикл. матем. 1995. Т. 1. № 3. С. 669–700. [4] В. В. Щиголев // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 5. С. 191–224. [5] А. В. Гришин // Фундам. прикл. матем. 1999. Т. 5. С. 101–118. [6] В. В. Щиголев // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 3. С. 143–160. [7] А. В. Гришин, С. В. Урбаханов // Чебышевский сборник. Т. 3. № 2 (4), 2002. С. 34–42. [8] Е. А. Киреева, А. Н. Красильников. О некоторых экстремальных многообразиях ассоциативных алгебр // Матем. заметки (в печати).

Московский педагогический
государственный университет

Представлено А. В. Михалевым
Принято редколлегией 23.03.2005