Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Каменецкий, Рациональность производящих функций ладейных полиномов и перманентов кронекеровых произведений тропических матриц и циркулянтов с матрицей J_k , *УМН*, 2005, том 60, выпуск 3, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1435>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:01:30

РАЦИОНАЛЬНОСТЬ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ ЛАДЕЙНЫХ ПОЛИНОМОВ И ПЕРМАНЕНТОВ КРОНЕКЕРОВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ТЁПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ И ЦИРКУЛЯНТОВ С МАТРИЦЕЙ J_k

А. М. КАМЕНЕЦКИЙ

Известно, что вся классическая теория перечисления перестановок с ограниченными позициями, восходящая еще к Эйлеру, Монмору (1713), Тэйту, Кэли, Мюиру (1878), Люка (1891), Тушару (1934) и Капланскому (1943), сводится к вычислению ладейных полиномов и перманентов $(0, 1)$ тёплицевых матриц и $(0, 1)$ -циркулянтов. Настоящая статья содержит обобщение результатов, полученных автором в [1]–[3].

Пусть $\text{Inj}(S, X)$ – множество вложений множества S в множество X .

Пусть $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, – прямоугольная матрица над коммутативным кольцом с единицей, $m \leq n$, $R(x; z; A) = 1 + \sum_{k=1}^m x^k \sum_{S \subseteq N_m, |S|=k} \sum_{\sigma \in \text{Inj}(S, N_n)} z^{|\sigma|} \prod_{i \in S} a_{i, \sigma(i)}$ – цикловой ладейный полином матрицы A , $\text{per}(z; A) = \sum_{\sigma \in \text{Inj}(N_m, N_n)} z^{|\sigma|} \prod_{i \in N_m} a_{i, \sigma(i)}$ – цикловой перманент матрицы A , $R(x; A) = R(x; 1; A)$, $\text{per}(A) = \text{per}(1; A)$, где $|\sigma|$ – число циклов инъективного отображения σ , $N_m = \{1, \dots, m\}$. Пусть $T_n^{(k)} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $P_n = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$,

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } j - i = k, \\ 0, & \text{если } j - i \neq k, \end{cases} \quad c_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } j - i \equiv 1 \pmod{n}, \\ 0, & \text{если } j - i \not\equiv 1 \pmod{n}. \end{cases}$$

Пусть $m_{\bar{\alpha}}(i)$ – число компонент вектора $\bar{\alpha}$, равных i , $i^{\langle l \rangle} = i, \dots, i$ (l раз),

$$G_t^{[k]} = \{(1^{\langle l_1 \rangle}, \dots, t^{\langle l_t \rangle}) \mid 0 \leq l_i \leq k, 1 \leq i \leq t\},$$

$$G_{r,t}^{[k]} = \left\{ (1^{\langle l_1 \rangle}, \dots, t^{\langle l_t \rangle}) \in G_t^{[k]} \mid \sum_{i=1}^t l_i = r \right\},$$

$0 \leq r \leq kt$. Тогда

$$|G_{r,t}^{[k]}| = \text{Coef}_{x^r}(1 + x + \dots + x^k)^t$$

$$= \sum_{\substack{\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = t \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + k\lambda_k = r}} \frac{t!}{\lambda_0! \lambda_1! \dots \lambda_k!} = \sum_{l=0}^{\lfloor r/(k+1) \rfloor} (-1)^l \binom{t}{l} \binom{t+r-l(k+1)-1}{t-1},$$

$$|G_t^{[k]}| = (k+1)^t.$$

На множестве $G_{r,t}^{[k]}$ определим квадратную матрицу $\Pi_{r,t}^{[k]}(a_0, a_1, \dots, a_t) = (a_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}})_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in G_{r,t}^{[k]}}$ следующим образом: $\Pi_{0,0}^{[k]}(a_0) = k! a_0^k$; если $t \geq 1$, $\bar{\alpha} = (1^{\langle l_1 \rangle}, \dots, t^{\langle l_t \rangle}) \in G_{r,t}^{[k]}$, то

$$a_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} = \begin{cases} k! \binom{k}{l_t + \sum_{i=1}^{t-1} p_i} \binom{l_1}{p_1} \dots \binom{l_{t-1}}{p_{t-1}} a_0^{k-l_t - \sum_{i=1}^{t-1} p_i} a_1^{p_1} \dots a_{t-1}^{p_{t-1}} a_t^{l_t}, & \text{если } \bar{\beta} = (1^{\langle l_t + \sum_{i=1}^{t-1} p_i \rangle}, 2^{\langle l_1 - p_1 \rangle}, \dots, t^{\langle l_{t-1} - p_{t-1} \rangle}), \\ 0 \leq p_i \leq l_i, \quad 1 \leq i \leq t-1, \quad \sum_{i=1}^{t-1} p_i \leq k - l_t, & \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

На множестве $G_t^{[k]}$ определим квадратную матрицу $K_t^{[k]}(a_0, a_1, \dots, a_t) = (a_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}})_{a_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \in G_t^{[k]}}$ следующим образом: $K_0^{[k]}(a_0) = \sum_{d=0}^k d! \binom{k}{d}^2 a_0^d$; если $t \geq 1$, $\bar{\alpha} = (1^{\langle l_1 \rangle}, \dots, t^{\langle l_t \rangle}) \in G_t^{[k]}$, то

$$a_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} = \begin{cases} \binom{l_1}{p_1} \dots \binom{l_{t-1}}{p_{t-1}} \binom{k}{v - \sum_{i=1}^{t-1} p_i} a_0^{v - \sum_{i=1}^{t-1} p_i} a_1^{p_1} \dots a_{t-1}^{p_{t-1}} \\ \quad \times \sum_{d=0}^{\min(l_t, k-v)} (d+v)! \binom{k}{d+v} \binom{l_t}{d} a_t^d, \\ \text{если } \bar{\beta} = (1^{\langle k-v + \sum_{i=1}^{t-1} p_i \rangle}, 2^{\langle l_1 - p_1 \rangle}, \dots, t^{\langle l_{t-1} - p_{t-1} \rangle}), \\ \quad 0 \leq p_i \leq l_i, \quad 1 \leq i \leq t-1, \quad \sum_{i=1}^{t-1} p_i \leq v \leq k, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если X – конечное множество мощности n , то обозначим символом $\mathcal{L}$ (в контексте конкретного рассматриваемого множества X) некоторую фиксированную биекцию X на N_n . Пусть J_k – квадратная матрица порядка k , все элементы которой равны 1.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 \leq r \leq t$, $a_{-r}, a_{-r+1}, \dots, a_{-r+t}$ – элементы из коммутативного кольца с единицей. Тогда для всех $n \geq 1$

$$\begin{aligned} & R\left(x; \left(\sum_{i=0}^t a_{-r+i} T_n^{(-r+i)}\right) \otimes J_k\right) \\ &= \sum_{\substack{\bar{\gamma} \in \bigcup_{l=r}^{kt} G_{l,t}^{[k]} \\ \{\bar{\gamma}\} \supseteq \{1^{\langle k \rangle}, \dots, r^{\langle k \rangle}\}}} (K_t^{[k]}(a_{-r}x, a_{-r+1}x, \dots, a_{-r+t}x))^n [\mathcal{L}(1^{\langle k \rangle}, \dots, r^{\langle k \rangle}) \mid \mathcal{L}(\bar{\gamma})], \\ & \text{per} \left(\left(\sum_{i=0}^t a_{-r+i} T_n^{(-r+i)} \right) \otimes J_k \right) \\ &= ((\Pi_{r,k,t}^{[k]}(a_{-r}, a_{-r+1}, \dots, a_{-r+t}))^n [\mathcal{L}(1^{\langle k \rangle}, \dots, r^{\langle k \rangle}) \mid \mathcal{L}(1^{\langle k \rangle}, \dots, r^{\langle k \rangle})]), \\ & R\left(x; \left(\sum_{i=0}^t a_{-r+i} P_n^{-r+i}\right) \otimes J_k\right) = \text{Tr}((K_t^{[k]}(a_{-r}x, a_{-r+1}x, \dots, a_{-r+t}x))^n), \\ & \text{per} \left(\left(\sum_{i=0}^t a_{-r+i} x^i P_n^{-r+i} \right) \otimes J_k \right) = \sum_{l=0}^{kt} (\text{Tr}((\Pi_{l,t}^{[k]}(a_{-r}, a_{-r+1}, \dots, a_{-r+t}))^n)) x^{ln}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k \geq 1$, $t \geq 1$, $a_0, a_1, \dots, a_t$ – переменные, $1 \leq n \leq t$. Тогда

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left(\left(\frac{\partial}{\partial a_0} K_t^{[k]}(a_0, a_1, \dots, a_t) \right) \cdot (K_t^{[k]}(a_0, a_1, \dots, a_t))^{n-1} \right) \\ &= \text{Tr} \left(\left(\frac{\partial}{\partial a_n} K_t^{[k]}(a_0, a_1, \dots, a_t) \right) \cdot (K_t^{[k]}(a_0, a_1, \dots, a_t))^{n-1} \right). \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Каменецкий // Деп. в ВИНТИ 14.08.1990, № 4620–В90; РЖМат. 1 А378. 1991.
- [2] А. М. Каменецкий // Деп. в ВИНТИ 19.08.1991, № 33487–В91; РЖМат. 12 А363. 1992.
- [3] А. М. Каменецкий // Деп. в ВИНТИ 28.08.1992, № 2695–В92; РЖМат. 2 А314. 1993.

Представлено А. В. Михалевым
Принято редколлегией 23.03.2005