Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Тюрин, Теорема существования для многообразия модулей бор-
зоммерфельдовых лагранжевых циклов, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 3, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1436>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 18:29:22

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЯ МОДУЛЕЙ БОР-ЗОММЕРФЕЛЬДОВЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ ЦИКЛОВ

Н. А. Тюрин

Настоящая короткая заметка посвящена вопросу существования бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов данного топологического типа. Напомним в двух словах общую постановку вопроса.

Многообразия модулей полувзвешенных бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов фиксированного топологического типа и объема были введены в работе [1]. Для произвольного компактного односвязного симплектического многообразия (M, ω) с целочисленной симплектической формой (т.е. $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$) такое многообразие модулей $\mathcal{B}_S^{hw,r}$ состоит из пар (S, θ) , где S – бор-зоммерфельдов лагранжев цикл фиксированного топологического типа, а θ – некоторый полувес на нем фиксированного объема. Стандартное условие лагранжевости (см., например, [2]) может быть дополнено условием Бора–Зоммерфельда относительно данных предквантования (см. [1]), которые представлены парой (L, a) , где L – линейное комплексное расслоение, a – эрмитова связность на L такие, что $c_1(L) = [\omega]$, $F_a = 2\pi i\omega$. В [1] определения и конструкции были объединены в новый предмет, названный алгебраической лагранжевой геометрией. Он оказался весьма полезным в задаче геометрического квантования (см. [3], [4]), однако одним из открытых вопросов остался вопрос существования бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов. Ситуация похожа на ту, что возникла вокруг многообразия модулей инстантов (см. [5]), когда построенная локальная теория была дополнена результатом К. Таубса, утверждавшим существование по меньшей мере одной гладкой точки многообразия модулей инстантов. В случае многообразия модулей бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов локальная теория, построенная в [1], должна быть дополнена подобной теоремой существования, иначе многообразия модулей могут оказаться виртуальными.

Цель настоящей заметки – доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА. Пусть (M, ω) – компактное односвязное $2n$ -мерное симплектическое многообразие с целочисленной формой ω . Пусть класс гомологий срединной размерности $[S] \in H_n(M, \mathbb{Z})$ реализуется ориентируемым лагранжевым подмногообразием фиксированного топологического типа S . Тогда найдется такое натуральное число $k \in \mathbb{Z}_+$, что для любого $k' \geq k$ многообразие модулей $\mathcal{B}_{S,k'}$ бор-зоммерфельдовых относительно данных предквантования $(L^{k'}, a_{k'})$ лагранжевых циклов топологического типа S непусто.

Простым следствием этого утверждения будет непустота и многообразия модулей полувзвешенных бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов $\mathcal{B}_{S,k}^{hw,r}$ в тех же предположениях, доказательство чего мы опускаем из-за его очевидности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $S \subset M$ – ориентируемый гладкий лагранжев цикл, представляющий класс $[S] \in H_n(M, \mathbb{Z})$, а (L, a) – данные предквантования. Тогда (см. [1]) ограничение $(L, a)|_S$ является топологически тривиальным расслоением с плоской связностью. Если характер $\chi_a(S): \pi_1(S) \rightarrow U(1)$, индуцируемый этой связностью, тривиален, то тогда S сам по себе является бор-зоммерфельдовым лагранжевым циклом (см. [1]). Пусть этот характер нетривиален:

$$\chi_a(S) \neq 1.$$

Тогда рассмотрим окрестность Дарбу–Вейнштейна лагранжева цикла S , т.е. такую трубчатую окрестность $N(S) \subset M$, что существует симплектоморфизм

$$\phi_{DW}: (N(S), \omega|_{N(S)}) \rightarrow (N_\varepsilon(T^*S), d\rho),$$

где $N_\varepsilon(T^*S)$ есть ε -окрестность нулевого сечения кокасательного расслоения T^*S , а $d\rho$ – каноническая симплектическая форма на T^*S (см. [6]). Тогда, согласно теореме Дарбу–Вейнштейна

(см. там же), лагранжевы подмногообразия, содержащиеся в $N(S)$, под действием ϕ_{DW} отображаются в графики замкнутых 1-форм на S в T^*S . Используя ϕ_{DW} в обратную сторону, можно строить лагранжевы подмногообразия в M , достаточно близкие к S . При этом нетрудно видеть, что если самому подмногообразию S соответствует характер $\chi_a(S)$ относительно данных предквантования (L, a) , то для лагранжева подмногообразия $S_1 = \phi_{DW}^{-1}(\tau)$, индуцируемого замкнутой 1-формой $\tau \in Z_S^1$, такого, что график $\Gamma_\tau \in N_\varepsilon(T^*S)$, такой характер будет иметь вид

$$\chi_a(S_1): \pi_1(S_1) = \pi_1(S) \rightarrow U(1),$$

$$\chi_a(S_1) = \chi_a(S) + \exp\left(2\pi i \int_{\phi_{DW}(\gamma)} \tau\right),$$

где γ – ориентированная петля, представляющая соответствующий класс из $\pi_1(S_1)$ (ср. [1]).

Нетрудно видеть, что для любого $\chi_a(S) \in U(1)$ найдется замкнутая 1-форма τ такая, что соответствующее отображение $\chi_a(S) + \exp\left(2\pi i \int_{\phi_{DW}(\gamma)} \tau\right)$ будет тривиально на $\pi_1(S)$. Проблема заключается в том, что такая форма τ может не удовлетворять условию $\Gamma_\tau \in N_\varepsilon(T^*S)$ (т.е. ε может оказаться слишком малым, чтобы можно было скомпенсировать характер $\chi_a(S)$).

Существование окрестности $N(S)$ Дарбу–Вейнштейна позволяет определить следующее подмножество в пространстве всех характеров:

$$\Delta \subset \Xi = \{\chi: \pi_1(S) \rightarrow U(1)\},$$

а именно:

$$\Delta(S, \phi_{DW}) = \left\{ \chi = \exp\left(2\pi i \int_{\phi_{DW}(\cdot)} \tau\right) \mid \Gamma_\tau \in N_\varepsilon(T^*S), \tau \in Z_S^1 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что Δ есть стягиваемое подмножество в якобиане $\Xi = H^1(S, \mathbb{R})/H^1(S, \mathbb{Z})$, расположенное вокруг нуля.

С другой стороны, при переходе к данным предквантования уровня k :

$$(L^k, a_k), \quad c_1(L^k) = k\omega, \quad F_{a_k} = 2\pi i k\omega,$$

характер, индуцируемый на лагранжевом подмногообразии S , изменяется следующим образом:

$$\chi_{a_k}(S) = (\chi_a(S))^{1/k},$$

где под последним выражением имеется в виду примитивный корень k -й степени. Отсюда видно, что найдется такое натуральное число $k \in \mathbb{Z}_+$, что для любого $k' \geq k$

$$\chi_{a_{k'}}(S) \in \Delta(S, \phi_{DW}).$$

Отсюда следует, что для каждого $k' \geq k$ характер $\chi_{a_{k'}}(S)$ может быть скомпенсирован достаточно малой замкнутой формой, а значит, утверждение теоремы 1 доказано.

Заметим, что приведенные выше несложные рассуждения не отвечают на вопрос о существовании многообразия модулей бор-зоммерфельдовых циклов “вообще”, а только сводят проблему существования $\mathcal{B}_S$ и $\mathcal{B}_S^{hw,r}$ к стандартной проблеме симплектической геометрии и классической механики – проблеме отыскания лагранжева подмногообразия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Л. Горodenцев, А. Н. Тюрин // Изв. АН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 3. С. 15–50.
 [2] В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь. Симплектическая геометрия. М.: Мир, 1987. [3] Н. А. Тюрин // Изв. АН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 4. С. 191–204. [4] Н. А. Тюрин // Изв. АН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 3. С. 175–196. [5] S. Donaldson, P. Kronheimer. The Geometry of Four-manifolds. Oxford: Clarendon Press, 1990. [6] A. Weinstein // Ann. of Math. (2). 1973. V. 98. P. 377–410.

Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова
 Объединенный институт ядерных исследований (Дубна),
 Московский государственный университет путей сообщения

Представлено А. Г. Сергеевым
 Принято редколлегией 23.03.2005