Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Чанга, Об одном теоретико-функциональном неравенстве, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 3, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1437>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 03:38:07

ОБ ОДНОМ ТЕОРЕТИКО-ФУНКЦИОНАЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ

М. Е. ЧАНГА

В этой заметке мы докажем теорему, позволяющую оценить снизу максимум модуля аналитической функции на отрезке через максимумы ее модуля в круговых областях.

ТЕОРЕМА. Пусть функция $f(s)$ аналитична в круге $|s| \leq R$ и не равна нулю тождественно. Пусть

$$M(r) = \max_{|s| \leq r} |f(s)|.$$

Тогда при $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ имеет место оценка

$$\max_{|t| \leq R} |f(it)| \geq (M(R))^{1 - \frac{1}{(1-a)^2}} (M(aR))^{\frac{1}{(1-a)^2}}.$$

Приведенное теоретико-функциональное неравенство находит свои применения в теории дзета-функции Римана. Так, используя эту идею, автор в [1] получил оценку

$$\max_{|t| \leq H} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + iT + it \right) \right| \geq T^{-\exp(-0.1H)}$$

при $40 \leq H \leq \ln \ln T$ и доказал эквивалентность гипотез, высказанных А. А. Карацубой в [2] и в [3]. Заметим также, что из нижней оценки максимума модуля $\zeta(s)$ в малом кружочке критической полосы, полученной А. А. Карацубой в [3] с помощью теоремы Адамара о трех кругах, сформулированная теорема сразу позволяет вывести оценку

$$\max_{|t| \leq \Delta} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + iT + it \right) \right| \geq T^{43 \ln \Delta}$$

при $0 < \Delta < \frac{1}{3}$. Подобные результаты получены также другими методами в [4] и [5].

Докажем вначале лемму, которая представляет и самостоятельный интерес.

ЛЕММА. Пусть функция $f(s)$ аналитична в полукруге $|s| \leq R$, $\operatorname{Re} s \geq 0$ и не равна нулю тождественно. Пусть

$$K(r) = \max_{|s| \leq r, \operatorname{Re} s \geq 0} |f(s)|.$$

Тогда при $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ имеет место оценка

$$\max_{|t| \leq R} |f(it)| \geq (K(R))^{1 - \frac{1}{(1-a)^2}} (K(aR))^{\frac{1}{(1-a)^2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В любом из следующих случаев лемма очевидна: $a = 0$; $f(s) \equiv \text{const}$; $K(aR)$ достигается на мнимой оси (правая часть не превосходит $K(aR)$). Будем считать, что $a > 0$, $f(s) \not\equiv \text{const}$ и что $K(aR)$ достигается в некоторой точке s_0 полуокружности $|s| = aR$, $\operatorname{Re} s > 0$.

Пусть ε – сколь угодно малое положительное число. Рассмотрим функцию

$$F(s) = f(s) \left(\frac{K(R)}{K(aR)} \right)^{((1-a)^{-2} + \varepsilon) \left(\frac{s^2}{R^2} - 2 \frac{s}{R} \right)}.$$

Имеем

$$|F(s)| = |f(s)| \left(\frac{K(R)}{K(aR)} \right)^{((1-a)^{-2} + \varepsilon) \left(\frac{\sigma^2 - t^2}{R^2} - 2 \frac{\sigma}{R} \right)}.$$

Легко видеть, что

$$\max_{|t| \leq R} |F(it)| \leq \max_{|t| \leq R} |f(it)|. \quad (1)$$

На полуокружности $|s| = R$, $\operatorname{Re} s > 0$ справедлива оценка

$$|F(s)| \leq K(R) \left(\frac{K(R)}{K(aR)} \right)^{((1-a)^{-2} + \varepsilon)(-1 - 2\frac{\sigma}{R}(1 - \frac{\sigma}{R}))} \leq K(R) \left(\frac{K(R)}{K(aR)} \right)^{-(1-a)^{-2} - \varepsilon}.$$

С другой стороны, имеем

$$|F(s_0)| = K(aR) \left(\frac{K(R)}{K(aR)} \right)^{((1-a)^{-2} + \varepsilon)(-a^2 - 2\frac{\sigma_0}{R}(1 - \frac{\sigma_0}{R}))}.$$

Пользуясь тем, что $\sigma_0 \leq aR \leq \frac{R}{2}$, находим

$$\begin{aligned} |F(s_0)| &\geq K(aR) \left(\frac{K(R)}{K(aR)} \right)^{((1-a)^{-2} + \varepsilon)((1-a)^2 - 1)} \\ &= K(R) \left(\frac{K(R)}{K(aR)} \right)^{-(1-a)^{-2} - \varepsilon + \varepsilon(1-a)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку $f(s) \not\equiv \text{const}$ и $K(aR)$ достигается внутри полукруга $|s| \leq R$, $\operatorname{Re} s \geq 0$, то $K(R) > K(aR)$. Следовательно,

$$|F(s_0)| > \max_{|s|=R, \operatorname{Re} s > 0} |F(s)|.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$|F(s_0)| \leq \max_{|t| \leq R} |F(it)|, \quad (3)$$

иначе мы пришли бы к противоречию с принципом максимума.

Объединяя оценки (1)–(3), получим

$$\max_{|t| \leq R} |f(it)| \geq K(R) \left(\frac{K(R)}{K(aR)} \right)^{-(1-a)^{-2} - \varepsilon + \varepsilon(1-a)^2}.$$

Доказательство завершается переходом к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Применяем лемму к функциям $f(s)$ и $f(-s)$, учитывая, что $K(R)$ в обоих случаях не превосходит $M(R)$, а наибольшее из значений $K(aR)$ равняется $M(aR)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Е. Чанга // Матем. заметки. 2004. Т. 76. № 6. С. 922–927. [2] А. А. Карацуба // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 1. С. 15–16. [3] А. А. Карацуба // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 5. С. 796–797. [4] А. А. Карацуба // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. № 6. С. 99–104. [5] М. Z. Garaev // Taiwanese J. Math. 2002. V. 6. № 4. P. 573–580.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией 23.03.2005