Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Г. Оруджев, Спектральный анализ дифференциальных операторов с кратными характеристиками на полуоси, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 2, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 10:52:19

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ НА ПОЛУОСИ

Э. Г. ОРУДЖЕВ

В данной работе исследуется спектр, резольвента, кратное разложение по собственным и присоединенным функциям дискретного спектра и по главным функциям непрерывного спектра дифференциального оператора

$$l(Y) \equiv Y^{(2n)} + \sum_{i=1}^{2n} P_i(x, \lambda) Y^{(2n-i)}, \quad P_i(x, \lambda) = \sum_{k=0}^i \lambda^{i-k} P_{i,i-k}(x), \quad i = \overline{1, 2n},$$

с нормированными краевыми условиями в нуле в пространстве $L_2(0, \infty)$.

Ранее подобные операторы изучались в [1], [2], в случае, когда дифференциальное выражение, определяющее оператор, при $\lambda \rightarrow \infty$ близко двучленному $Y^{(2n)} - \lambda^{2n} Y$. Случай кратных корней характеристического уравнения не был изучен. Ему и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим на интервале $0 \leq x \leq \infty$ дифференциальное уравнение

$$(1) \quad Y^{(2n)} + P_1(x, \lambda) Y^{(2n-1)} + \dots + P_{2n}(x, \lambda) Y = 0,$$

где

$$(2) \quad P_i(x, \lambda) = \sum_{k=0}^i P_{ik}(x) \lambda^k, \quad i = \overline{1, 2n},$$

$P_{ii}, i = \overline{1, 2n}$, — постоянные числа, функции $P_{ik}(x)$ определены и непрерывны в $[0, \infty)$, интегрируемы в $[0, \infty)$ в предположении, что характеристическое уравнение

$$(3) \quad \theta^{2n} + P_{1,1} \theta^{2n-1} + \dots + P_{2n-1,2n-1} \theta + P_{2n,2n} = 0$$

имеет два различных корня θ_1, θ_2 , каждый кратности n , и $\operatorname{Re} \lambda \theta_1 \leq 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \theta_2$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются следующие условия:

1) существуют производные $P_{i,i-1}^{(\nu)}(x), i = \overline{1, 2n}, \nu = \overline{0, 2n-1}; P_{i,i-2}^{(\nu)}(x), i = \overline{2, 2n}, \nu = \overline{0, 2n-2}, \dots, P_{i,i-n+1}^{(\nu)}(x), i = \overline{n-1, 2n}, \nu = \overline{0, n+1}$, непрерывные на множестве $a \leq x < \infty$, их пределы при $x \rightarrow \infty$ конечны и

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{2n} P_{i,i-1} \theta_k^{2n-i} = 0, \quad \sum_{i=2}^{2n} P_{i,i-2} \theta_k^{2n-i} = 0, \quad \dots, \quad \sum_{i=n-1}^{2n} P_{i,i-(n-1)} \theta_k^{2n-i} = 0, \quad k = 1, 2;$$

2) для каждой области $|\lambda| \geq \Gamma, a \leq x < \infty$ интегралы

$$(5) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma^{n-1}} \int_a^\infty \Gamma^{1+m} |P_{n,0}^{(\nu)}(x)| dx, \quad m = 0, \quad \nu = \overline{0, n}, \\ & \frac{1}{\Gamma^n} \int_a^\infty \Gamma^{1+m} |P_{n+1,m}^{(\nu)}(x)| dx, \quad m = 0, 1, \quad \nu = \overline{0, n-1}, \\ & \frac{1}{\Gamma^{n+1}} \int_a^\infty \Gamma^{1+m} |P_{n+2,m}^{(\nu)}(x)| dx, \quad m = 0, 1, 2, \quad \nu = \overline{0, n-2}, \dots, \\ & \frac{1}{\Gamma^{2n-1}} \int_a^\infty \Gamma^{1+m} |P_{2n,m}^{(\nu)}(x)| dx, \quad m = \overline{0, 1, \dots, n}, \end{aligned}$$

существуют и меньше единицы.

Тогда дифференциальное уравнение (1) в каждой из полуплоскостей $\pi_{\pm} = \{\pm\theta_k\lambda : \operatorname{Re}\theta_k\lambda \geq 0\}$ при всех $x \in [0, \infty)$ имеет асимптотические решения, представимые в виде:

$$(6) \quad Y_i(x, \lambda) = \left[g_{i0}^{(0)}(x) + \frac{1}{\lambda} g_{i0}^{(1)}(x) + \dots + \frac{1}{\lambda^{n-1}} g_{i0}^{(n-1)}(x) + \frac{E(x, \lambda)}{\lambda^n} \right] e^{\theta_k \lambda x},$$

$k = 1$ при $i = \overline{1, n}$; $k = 2$ при $i = \overline{n+1, 2n}$, где $g_{i0}^{(0)}(x)$, $i = \overline{1, n}$, и $g_{i0}^{(0)}(x)$, $i = \overline{n+1, 2n}$, образуют фундаментальную систему решений дифференциальных уравнений n -го порядка, $g_{i0}^{(\nu)}(x)$, $\nu = \overline{1, n-1}$, определены и непрерывны на интервале $[0, \infty)$ и имеют абсолютно непрерывные производные до порядка $2n-1$ включительно. Функция $E(x, \lambda)$ ограничена в области $a \leq x < \infty$, $|\lambda| \geq \Gamma$.

При $x \rightarrow \infty$ равномерно относительно λ : $\{\lambda \in \pi_{\pm}, |\lambda| \geq \Gamma\}$ уравнение (1) имеет ф.с.р., допускающую асимптотическое представление:

$$(7) \quad Y_i(x, \lambda) = [g_{i0}^{(0)}(x) + O(1)]e^{\theta_k \lambda x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \begin{array}{l} k = 1 \text{ при } i = \overline{1, n}, \\ k = 2 \text{ при } i = \overline{n+1, 2n}. \end{array}$$

Определим оператор L_{α} так: его область определения есть D_{α} и $L_{\alpha}Y = l(y)$ при $Y \in D$.

Рассмотрим полуплоскость π_{-} ($\operatorname{Re}\theta_1\lambda \leq 0$). Обозначим $A_n(\lambda) = \det \|U_i(Y_k)\|_{i,k=1}^n$. При условии $\operatorname{Re}\theta_1\lambda < 0$ все решения $Y_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, n}$, принадлежат пространству $L_2(0, \infty)$, а на прямой $l_1 = \{\lambda : \operatorname{Re}\theta_1\lambda = 0\}$ ни одна $Y_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, n}$, не принадлежит пространству $L_2(0, \infty)$. Как показано в [3], при предположении $A_n(\lambda) \neq 0$ каждая точка λ , лежащая на прямой l_1 , принадлежит непрерывному спектру оператора L_{α} , а дискретный спектр, состоящий из нулей определителя $A_n(\lambda)$, образует конечное множество. Если при $\lambda_0 \in l_1$ имеет место $A_n(\lambda_0) = 0$, то точка λ_0 является спектральной особенностью оператора L_{α} .

Возьмем окружность $\Gamma_N = \{\lambda : |\lambda| = N\}$ большого радиуса N с центром в начале координат. Положим $\Gamma_N = \Gamma'_N + \Gamma''_N$, где Γ'_N – замкнутый контур в полуплоскости π_{+} , образованный полуокружностью Γ_N и прямой $\operatorname{Re}\theta_1\lambda = +\varepsilon$, и Γ''_N – контур, образованный полуокружностью, находящейся в полуплоскости π_{-} , и прямой $\operatorname{Re}\theta_1\lambda = -\varepsilon$.

Применяя методику из [2; с. 240–253], придем к теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия (4), (5), а собственные значения оператора L_{α} не попадают на непрерывный спектр. Пусть функции $\Phi_i(x)$, $i = \overline{0, 2n-1}$, финитны в окрестности нуля и бесконечности, дифференцируемы $(3n-i)$ раз. Положим

$$\Gamma(x, \lambda) = \lambda^{2n-1}\Phi_0(x) + \dots + \Phi_{2n-1}(x) + \sum_{i=1}^{2n} \sum_{l=1}^{2n} P_{il}(x) \frac{d^{2n-i}}{dx^{2n-i}} (\lambda^{l-1}\Phi_0(x) + \dots + \Phi_{2n-1}(x)).$$

Тогда имеет место формула $2n$ -кратного разложения

$$\frac{\theta_1^n \theta_2^n}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_{N,\varepsilon}} \lambda^s d\lambda \int_0^{\infty} K(x, \xi, \lambda) \Gamma(\xi, \lambda) d\xi = \Phi_s(x), \quad s = \overline{0, 2n-1},$$

сходимость равномерна при всех $x \in [0, \infty)$.

Автор благодарен академику АН Азербайджанской Республики М.Г. Гасимову за ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фунтаков В. А. // Изв. АН Азерб. ССР. 1960. №6. С. 3–19; 1961. №1. С. 3–21.
[2] Максудов Ф. Г. Пучки операторов с непрерывным спектром. Баку: ЭЛМ, 1992. [3] Оруджев Э. Г. // Труды ИММ АН Азербайджана. 1997. Т. 6. С. 148–160.

Университет “Хазар”, департамент “математика”,
г. Баку, Азербайджан
E-mail: hi@kuni.v.Baku.az

Принято редколлегией
03.12.1998