Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Зибенман, Возвращение к теореме Осгуда–Шёнфлиса, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 4, 67–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1445>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:34:33

ВОЗВРАЩЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ ОСГУДА–ШЕНФЛИСА

Л. ЗИБЕНМАН

В этой первой теореме незаузливания чисто топологической природы устанавливается, что каждое компактное подмножество евклидовой плоскости, гомеоморфное окружности, можно перевести в стандартную окружность автогомеоморфизмом плоскости. В статье отдается дань этой трудной столетней теореме и приводится частично новое элементарное доказательство вместе с первым, но предварительным исследованием ее сложной истории. Также намечены фундаментальные следствия этого доказательства и упомянуты некоторые обобщения.

Библиография: 88 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	67
2. Обозначения и их значения	69
3. Гомологически доказуемые результаты, на которые мы опираемся ...	71
4. Формулировка главного результата	73
5. Два инструмента нашего доказательства (ST) и (ST+)	74
6. Суть доказательства (ST) и (ST+)	75
6.1. Свойство евклидовой метрики	75
6.2. Построение замощения T в $\mathbb{B}^2$ и отображения $h: \mathbb{B}^2 \rightarrow B$	75
6.3. Доказательство, что $h: \mathbb{B}^2 \rightarrow B$ есть гомеоморфизм	78
7. Доказательство некоторых PL теорем шенфлисовского типа — см. раздел 5	81
8. Доказательство леммы об односторонней аппроксимации (SAL) — см. раздел 5	86
9. Некоторые следствия (ST) и (PLST)	89
Список литературы	93

1. Введение

Эта ретроспективная статья представляет собой элементарное и, как можно надеяться, ясное и прямое геометрическое доказательство того, что обычно называется (классической) теоремой Шенфлиса; она представлена как (ST) ниже в разделе 4, с упоминанием о ее ранней истории — включая вклад Осгуда. Эта (ST) состоит, существенным образом, в факте — удивительном ввиду известных фрактальных кривых,

– что каждое компактное подмножество евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, гомеоморфное окружности S^1 , необходимо есть граница в $\mathbb{R}^2$ компактного подмножества, которое гомеоморфно 2-диску. Однако “обобщенная теорема Шенфлиса” Б. Мазура [50] и М. Брауна [18] – доказанная пятью десятилетиями позже во всех размерностях – не влечет (ST), поскольку она требует условие плоскостности (или локальной плоскостности [18]).

Эта теорема Шенфлиса (ST) в трех отношениях доставляет неудобства больше других в равной мере известных и ключевых теорем плоской топологии, особенно таких, как теорема Жордана и теорема об инвариантности области, которые мы в разделе 3 именуем (JCT) и (IOD). Действительно, большинству доказательств (ST) недостает трех черт хорошо известных доказательств (JCT) и (IOD):

- (i) быть существенно гомологическим,
- (ii) быть применимым во всех размерностях для доказательства какого-либо важного результата,
- (iii) быть ясно мотивированным, запоминаемым и объяснимым.

Мне встретились и исключения из этих суждений неприятия. Разумеется, изложение Р. Х. Бинга [13] 1983 г. может претендовать на черту (iii); оно подобно изложению в [57], но более ясно. Затем, возможно, могло бы быть адаптировано, чтобы претендовать на черты (ii) и (iii), чрезвычайно оригинальное доказательство А. В. Чернавского [24] естественного переноса (ST) на размерности > 4 . Но я нахожу, что его рассуждение становится излишне запутанным после такой адаптации в размерности 2. Достоинство также особого внимания доказательство (ST) С. С. Кэрнса [19] (с участием Джона Нэша, тогда студента). То же относится к доказательствам, основанным на теории конформных отображений [60], [61], [20]–[22], [43]–[45], [72], [83], [25].¹ Что касается не конформных доказательств, они в учебной литературе имеются в [57], [35], [85], [54], [86], [52], а в монографиях в [83], [55], [87], [84], [46], [40], [13].

Представленное доказательство (ST) не добивается ни (i), ни (ii), но, может быть, за ним признают право на (iii). Оно исключительно в том отношении, что основано на использовании замечательного комбинаторного рисунка (рис. 6-а), хорошо известного в гиперболической геометрии; этот простой рисунок вскрывает самую суть доказательства, делая явным гомеоморфизм, устанавливающий (ST). Помимо этого, наша стратегия основана на классификации появляющихся по ходу дела PL- (= кусочно линейных) поверхностей; на это затрачивается немного дополнительных усилий в надежде на добавочное понимание. В остальном наша техника достаточно типична для доказательств из учебников – с использованием смеси из немного общей топологии и немного PL-топологии евклидова пространства; она имеет более чем просто методическое достоинство, поскольку преобладала в изучении топологических вложений многообразий в размерностях > 2 , ср. [40], [27].

Интересно, что в самой размерности 2 в значительной части прошлого столетия преобладали конформные методы – благодаря инициативе В. Ф. Осгуда [60] 1903 г. и К. Каратеодори [22] 1913 г. Последний ввел теорию “простых концов” (ср. [72],

¹А также доказательства в учебниках комплексного переменного, например, А. И. Маркушевича или Е. Хилла. Далее некоторые решения проблемы Плато (по существу, конформные) дают в применении к плоским кривым доказательство (ST), см. книги Р. Куранта (1950), М. Struwe (1988) и J. Jost (1994), любезно указанные последним.

[45], [83]), которая обобщает (ST), требуя анализа границы любого связного открытого множества со связным дополнением в замкнутом 2-многообразии M , – теорию, которая с тех пор получила важные применения в динамике, ср. [48], [8], [32].

В 1982 г. Дж. Мезер [49] дал доступное чисто топологическое толкование топологических аспектов “простых концов”, дополняющее более ранние (но с трудом разыскиваемые) работы Урысона [80] (ср. [77]–[79]) 20-х годов и Ньюмена [57], 1939 г. Мезер пишет: “Не представляется возможным кратко изложить теорию Каратеодори, не опираясь на какую-либо [другую] глубокую теорию”. Это служит предупреждением для одних читателей и вызовом для других. Он привел замечательное следствие (ср. [57], [14]), обобщающее (ST): любое ограниченное стягиваемое открытое подмножество U в M имеет естественную “концевую” компактификацию $\widehat{U}$, которая есть 2-диск, а если его граница δU в M локально связна, то его замыкание $\overline{U}$ в M оказывается естественным фактором $\partial\widehat{U}$ при непрерывном отображении граничной окружности $\partial\widehat{U}$ на границу δU . В высших размерностях в настоящее время имеются близкие исследования, касающиеся “окрестностей-цилиндров отображения”, см. [63] и [27; § 47].

Чисто топологические методы привели к другим глубоким результатам, связанным с (ST), именно к нескольким характеристикам 2-многообразий (ср. [56], [87], [9]), например, к характеристике 2-сферы, данной Л. Ципшином (см. [88], [35]), которая грубо формулируется так: пеановский континуум B , в котором имеется хотя бы одна жорданова кривая и в котором справедливо утверждение теоремы Жордана (JCT), необходимо гомеоморфен 2-сфере. Ср. эдвардсовскую характеристику многообразий размерности больше 4 в [47], [27].

Оставляя в стороне эти трудные расширения (ST), в последнем разделе 9 мы дадим, в основном в виде упражнений, некоторые важные следствия (ST) и ее легкий PL- (= кусочно линейный) аналог. Одно следствие состоит в PL-аппроксимируемости чисто непрерывных гомеоморфизмов между PL-многообразиями.

Я собрал много ссылок на раннюю литературу, касающуюся (ST), с помощью недавно созданной электронной версии по годам 1868–1942 реферативного журнала [37]. Эта литература любопытным образом разрознена – например: *самая ранняя* явная ссылка, которую мне удалось обнаружить, на оригинальное (хотя и частичное) доказательство Шенфлиса (ST) 1906 г. [68], оказалась в монографии Людмилы Келдыш [40] 1966 г.!

Я признателен Алексею Чернавскому за ободрение и Жану Серфу за критику, которая позволила улучшить в нескольких местах мое изложение. Люсьен Гийю указал мне на прекрасное описание истории (JCT) в [30], [34] и библиографию там. При переводе этой статьи для русского издания проф. Чернавский представил не только порядочную коллекцию опечаток, но еще несколько интересных ссылок, именно, на воспоминания П. С. Александрова [5] и цитированные выше работы Урысона о простых концах.

2. Обозначения и их значения

Все пространства будут у нас метризуемыми топологическими, если противоположное не оговорено. **Компонента** X будет означать связное и одновременно открыто-замкнутое подмножество. Подмножество пространства X **ограничено**, если

его замыкание в X компактно.

Следующая “лемма о пересечении границы” из общей топологии (восходящая к Брауэру [15], если не раньше) будет часто использоваться без упоминания.

(FCL) Пусть Y – подпространство пространства X . Если связное множество C в X содержит точки как из Y , так и из $X \setminus Y$, то C содержит также точки из границы δY множества Y в X .

Обратим внимание, что δY зависит от X , хотя наше обозначение на это не указывает; граница Y в самом Y всегда пуста.

Для (возможно, не непрерывного) отображения $f: X \rightarrow Y$ и конечного набора X_i замкнутых подмножеств в X , $X = \bigcup_i X_i$, отображение f непрерывно, если и только если непрерывны все ограничения $f|_{X_i}: X_i \rightarrow Y$.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств называется **сюрьективным** (соответственно **инъективным**), если для каждой точки y в Y имеется по меньшей мере одна точка (соответственно не более одной точки) x в X , для которой $f(x) = y$. Говорят, что отображение f **биективно** или **взаимно однозначно**, если оно одновременно и инъективно, и сюрьективно.

Вложение $f: X \rightarrow Y$ есть инъективное непрерывное отображение топологических пространств, которое дает гомеоморфизм X на его образ $f(X)$.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств **открыто**, если для каждого открытого подмножества A в X его образ $f(A)$ открыт в Y . Заменяя “открытый” на “замкнутый” в этом предложении, получаем определение **замкнутого** отображения.

Образ компактного множества при непрерывном отображении необходимо компактен. Следовательно, сюрьективное непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ компактного пространства замкнуто. И если это отображение f биективно, то оно открыто и является гомеоморфизмом.

Если противоположное не указано, отображения пространств будут, как правило, считаться непрерывными.

По поводу PL-объектов и PL-отображений см., например, первые страницы в [65]. Каждый метризуемый PL-объект (обычно называемый полиэдром) PL-гомеоморфен локально конечному симплициальному комплексу. Символ $\cong$ будет обозначать PL-гомеоморфизм, а $\approx$ обычный гомеоморфизм. Край многообразия M обозначается ∂M , а его внутренность (как многообразия) $M \setminus \partial M$ обозначается $\text{Int } M$. Через Δ будет обозначаться n -симплекс, всегда отождествляемый с n -мерной выпуклой оболочкой $(n + 1)$ точек в вещественном линейном пространстве. Эти точки и/или размерность могут уточняться в качестве аргументов, например, для 1-симплекса: $\Delta^1(p, q)$. Формальная граница $\partial \Delta$ симплекса есть объединение всех его граней размерностей $< n$, и она совпадает с его краем $\partial \Delta$ как PL- n -многообразие.

Для размерностей $n \geq 1$ стандартный PL (= кусочно линейный) n -диск B^n есть $[-1; 1]^n \in \mathbb{R}^n$, а его граница есть PL- $(n - 1)$ -сфера S^{n-1} . Внутренность B^n есть $\text{Int } B^n = (-1; 1)^n = B^n - S^{n-1}$.

Мы также встретимся с гладким n -шаром $\mathbb{B}^n$ (соответственно n -сферой $\partial \mathbb{B}^n = S^{n-1}$), состоящими из всех точек в $\mathbb{R}^n$ на евклидовом расстоянии ≤ 1 (соответственно ровно 1) от начала $\mathbb{R}^n$. Они не имеют естественной PL-структуры. Однако имеется гомеоморфизм $\rho: B^n \rightarrow \mathbb{B}^n$, переводящий S^{n-1} в S^{n-1} ; с некоторым усилием его можно сделать PL на $B^n - S^{n-1}$.

Было бы вполне возможно работать с $\mathcal{C}^\infty$ -многообразиями и отображениями вместо PL-объектов и отображений, см. [51]; требующаяся здесь техника слегка менее элементарна, хотя, возможно, и более существенна для студентов.

Нас интересуют, главным образом, вложения в S^2 и $\mathbb{R}^2$. Поскольку $\mathbb{R}^2$ PL-гомеоморфно дополнению к любой точке в S^2 , мы можем изучать любой компакт X в S^2 , в котором отсутствует хотя бы одна точка из S^2 , как компакт в $\mathbb{R}^2$, и обратно.

Жорданова кривая (соответственно **дуга**) C в S^2 есть образ вложения S^1 (соответственно B^1) в S^2 . Эти определения вполне сохраняют свое значение в любом пространстве, гомеоморфном S^2 или $\mathbb{R}^2$.

Если d_n , $n = 1, 2, \dots$, – последовательность вещественных чисел, то неортодоксальная фраза “ d_n сходится $\theta(n)$ ” будет означать, что d_n сходится к 0, когда n стремится к бесконечности.

3. Гомологически доказуемые результаты, на которые мы опираемся

Доказательства следующих базовых результатов, использующих в основном теорию гомологий, как правило, понимаются легко (даже студентами первых курсов), после изучения топологии год или два. В нашем доказательстве (СТ) и ее дополнений свободно будет использоваться (ЖСТ).

ТЕОРЕМА ЖОРДАНА (ЖСТ) – [39], 1893 г. *В $\mathbb{R}^2$ или в S^2 дополнение к жордановой кривой C имеет в точности две компоненты, скажем, D_- и D_+ . Более того, C служит границей как D_- , так и D_+ .*

Мы сошлемся на двойственность Александера (как она изложена, например, в [28]) как на “универсальное” гомологическое доказательство первой части (ЖСТ); ее немедленным следствием служит такой принцип инвариантности:

(ЖА) *число компонент дополнения $S^n - X$ для любого компактного подмножества X в S^n есть внутренний инвариант самого X – на самом деле его “шейпа Борсука”.*

В заметке [29] предлагается простое и элегантное доказательство (ЖА) – за исключением его последней фразы, касающейся шейпа; оно покоится на гомологическом изоморфизме надстройки и на такой элементарной лемме незаузливания: *Вложение любого компактного множества в $\mathbb{R}^n$ единственно с точностью до (i) “стабилизации” по вложению $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ и (ii) гомеоморфизма $\mathbb{R}^{2n}$, который тождествен вне некоторого компакта.* Доказательство этой леммы использует хорошо известную теорему Титце о продолжении [75], 1914 г.

Частичное доказательство (ЖА) в [29] может быть обобщено до полного установления (ЖА), включая фразу о шейпе, с помощью стабильного соответствия по Чепмену [23] между шейпом и дополнением в $\mathbb{R}^n$.

Полное доказательство (ЖА), основанное на изучении отображений в S^{n-1} данных с точностью до гомотопии, см. в [76] (или [31] для $n = 2$).

Что касается второго утверждения (ЖСТ) – “граничного”, – напомним здесь классический двухчастный аргумент, который можно адаптировать к любой размерности. (i) Дополнение любой жордановой дуги J в S^2 связно, в силу (ЖА). (ii) Для точки p на C и любой жордановой дуги $J \subset C$, не содержащей p , связное открытое множество $S^2 - J$ содержит дизъюнктные жордановы области D_- и D_+ . Значит, по (FCL) из

раздела 2, оно пересекает границу δD_- области D_- в $\mathbb{S}^2$, на деле необходимо в $C - J$. Так как $C - J$ может лежать в предписанной окрестности p , это означает, что p лежит в δD_- . Подобным образом для $p \in \delta D_+$.

Имеется сильная традиция той мысли (см. [82], [1], [69], [30]), что (JCT) не до конца была доказана Жорданом [39]; однако мне неизвестны конкретные трудности, кроме тех, что указал Шёнфлис [70] в 1924 г. и которые сам Шёнфлис не считал фатальными. Представляется, что его аргументы требуют меньше, чем любое доказательство, которое я понимаю до конца. Ср. Келдыш [40; гл. II, лемма 4.1].

Первое полное доказательство (JCT), видимо, было дано О. Вебленом [82] в 1905 г.; в этом запутанном доказательстве развивалось шенфлисовское понятие [68] 1902 г. о достижимости PL-путями в $\mathbb{R}^2 - C$ от любой точки в $\mathbb{R}^2 - C$ до (по меньшей мере) плотного множества точек в C . Подобные доказательства появляются в большинстве учебных изложений (ST). Между прочим, некоторое использование техники достижимости существенно для большинства доказательств (ST); см. (SAL) в следующем разделе.

Изложение Жордана 1887 г. *предполагает* справедливость (JCT) для случая PL-жордановых кривых; этот случай обсуждал А. Шенфлис в 1896 г. [66] (см. [38]). Индуктивное доказательство для PL-жордановых кривых берет начало у Н. Леннса в 1903, 1911 гг. (см. [30]) и также у М. Дена (см. [34]), оно намечено в первом замечании к разделу 7.

Под **жордановой областью** мы будем понимать ограниченное и связное открытое множество D в пространстве, гомеоморфном $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{S}^2$, граница которого есть жорданова кривая C . Его компактное замыкание $B = D \cup C$ называется **запечатанной жордановой областью**. На этом языке (JCT) утверждает, что для каждой жордановой кривой C в S^2 дополнение $S^2 - C$ состоит в точности из двух жордановых областей. Главный результат (ST), который будет изложен, показывает, что D и B гомеоморфны $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{B}^2$ соответственно.

Вот два легких, но полезных следствия к (JCT) и (FCL). Пусть C и C' – две жордановы кривые в $\mathbb{R}^2$. Пусть D – (единственная) жорданова область с границей C , и пусть B – ее компактное замыкание. Определим D' и B' подобным образом для C' .

ЛЕММА О ЖОРДАНОВОЙ ПОДОБЛАСТИ. *Если $C' \subset B$, то $B' \subset B$.*

ЛЕММА О ДИЗЪЮНКТНЫХ ЖОРДАНОВЫХ ОБЛАСТЯХ. *Допустим, что C' не пересекает D и C не пересекает D' (эквивалентно, допустим, что C расположено вне или на C' , и обратно). Тогда либо $B = B'$, либо D и D' не пересекаются (хотя B и B' могут пересекаться).*

В многих доказательствах теоремы Шенфлиса эти две леммы не упоминаются, хотя молчаливо используются; мы постараемся отмечать их явно там, где они необходимы.

Почти столь же, как и (JCT), известна и полезна следующая теорема.

ТЕОРЕМА ИНВАРИАНТНОСТИ ОБЛАСТИ (IOD) (см. [18]). *Каждое вложение $h: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ открытого подмножества U пространства $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ есть открытое отображение.*

Л. Биберах в 1913 г. (см. [30]) приписывает первое доказательство (IOD) Е. Юргенсу в его вступительной лекции 1879 г. в Галле, которое Ф. Хаусдорф в 1914 г., как кажется, отождествил с опубликованным в Лейпциге в 1879 г. Наше доказательство

(ST) требует (IOD) только в специальном случае, когда h есть PL. Этот случай легко доказать в любой размерности индукцией по размерности, так как h тогда (аффинно) линейно на симплексах линейной триангуляции U . Вот классическое доказательство (IOD), основанное на приведенном выше принципе (JA) и адаптируемое ко всем размерностям: дополнение U к любому 2-шару B в $\mathbb{R}^2 - h(B)$ связно, согласно (JA), а $\mathbb{R}^2 - h(\partial B)$ имеет две (открытые) компоненты, снова в силу (JA); ясно, что одна есть $\mathbb{R}^2 - h(B)$, а другая $h(B - \partial B)$; значит, $h(B - \partial B)$ открыто, из чего следует, что h есть открытое отображение.

4. Формулировка главного результата

Теорема, называемая теоремой Шенфлиса, идет дальше, чем (JCT) и следующим образом полностью описывает вложение C .

ТЕОРЕМА ШЕНФЛИСА (ST). Пусть B – запечатанная жорданова область в S^2 или в $\mathbb{R}^2$ с граничной жордановой кривой C . Имеется гомеоморфизм $H: B^2 \rightarrow B$, переводящий S^1 на C .

ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ. Аргументы Жордана 1887 г. в [38], считаемые неполными для (JCT), парадоксальным образом сделали весомый вклад в (ST); они, по существу, доказывают, что каждая из дополнительных компонент D в $S^2 - C$ гомеоморфна $\mathbb{R}^2$. Говоря подробнее, D есть объединение растущего семейства запечатанных жордановых областей $B_i \subset D$, ограниченных PL жордановыми кривыми C_i ; согласно [38], каждое $B_i \approx B^2$, в то время как все последовательные разности $\approx$ кольцам, также по [38]. Как можно было бы судить по дате статьи [38] (1866 г.), доказательства должны быть на современный взгляд темными, ср. [36; Chap 9]. Взгляните, однако, на упражнение в разделе 7 после (PLCT), где указано прямое, насколько возможно, доказательство того, что $D \approx \mathbb{R}^2$.

В 1887 г. фрактальные кривые Клейна должны были бы поколебать математиков в принятии гипотезы, что $B \approx \mathbb{B}^2$. Первое четко сделанное известное мне утверждение, что $B \approx \mathbb{B}^2$, принадлежит В. Ф. Осгуду в 1903 г. [60]; в [59], 1900 (ср. [67]) он уже доказал, что D конформно гомеоморфно $\text{Int } \mathbb{B}^2$, несмотря на примеры в [58], в которых C имело положительную меру Лебега. Полные доказательства (ST) Осгудом и несколькими другими математиками пришли десятилетием позже [20]–[22], [43]–[45], [61], [72]; во всех этих доказательствах первого поколения использовалась теория комплексного переменного, т.е. конформные отображения. (Осгудовское доказательство из [61] было принято П. Кебе в его реферате в [37] и также Р. Курантом в [25].) А. Шенфлис [69; § 13] вторым дал в 1906 г. ясную формулировку (ST); он также рискнул предложить первое доказательство, которое начинается с правильного установления PL-версии (ST) (см. раздел 7) и завершается использованием бесконечных замощений; но в промежутке он, как будто, допустил грубый промах, утверждая, что доказано нечто невозможное. Именно, что для любой вложенной последовательности PL-жордановых кривых $C_i \subset D$ (построенной по Жордану) некоторая подпоследовательность может быть параметризована, скажем, как $c_i: S^1 \rightarrow C_i \subset \mathbb{R}^2$, так, что c_i сходится к топологической параметризации $c: S^1 \rightarrow C$ для C .²

²Объяснит ли этот промах то, что пионерское доказательство Шенфлиса долго оставалось незамеченным в литературе? Я думаю, что нет. Примерно 18 годами позже, в 1924 г., Керекь-

В 1902 г. Шенфлис [68] нашел интересную характеристику жордановых кривых в терминах достижимости путями, ту, которая, возможно, и мотивировала введение теории Каратеодори простых концов [22], 1913 г. Первым полным доказательством (ST), не основанным на конформных отображениях, возможно, является длинное рассуждение Х. Титце [73; (b)], [74; Satz III] 1914 г. Или, может быть, оно содержится в диссертации Л. Антуана [6; Chap. I] 1921 г., это рассуждение разумной длины, детализирующее место, отмеченное выше, где в [69; § 13], по-видимому, допущен промах. См. также [55] и [40; р. 63–81]). Имя “теорема Шенфлиса”, обозначаемое нами (ST), появляется впервые у Р. Л. Уайлдера [87; I.6 и III.5.9].

Естественное обобщение (ST) на все размерности $n > 2$ было доказано удивительно разными и трудными методами – для $n = 3$ в [11] и [12] в 1961 г.; для $n \geq 5$ А. В. Чернавским [24] в 1973 г. и независимо Р. Даверманом, Т. Прайсом и Б. Зибекком [62], [26] в том же 1973 г.; и, наконец, для $n = 4$ М. Фридманом и Ф. Квинном [33] уже в 1980-х. Все это требует особого условия на локальные фундаментальные группы, называемого обычно 1-ULC, что впервые было выявлено в 1924 г. рогатой 2-сферой Антуана–Александера в S^3 [7], [3], [4].

Наше доказательство (ST) в разделе 6 докажет также:

Дополнение (ST+). Гомеоморфизм $H: B^2 \rightarrow B$ может быть взят так, чтобы он распространял гомеоморфизм $S^1 \rightarrow C$ и был PL (= кусочно линейным) на $B^2 - S^1$.

5. Два инструмента нашего доказательства (ST) и (ST+)

Первый инструмент заключается в собрании простейших специальных случаев (ST), с дополнительным ограничением кусочной линейности.

ПОЧТИ PL-ТЕОРЕМА ШЕНФЛИСА (APLST). *Утверждение (ST) остается верным в случае, когда C есть PL (= кусочно линейно), исключая (возможно, пустое) конечное множество X точек C . Более того, в этом случае можно построить гомеоморфизм H стандартного PL диска B^2 на запечатанную жорданову область B так, что H будет PL, исключая, возможно, точки $H^{-1}(X)$.*

Этот результат сразу следует из классификации некомпактных PL поверхностей (ср. [83]). Для полноты он будет доказан в разделе 7 вместе со следующим дополнением.

Дополнение (APLST+). *Если $G: \partial B^2 \rightarrow C$ – гомеоморфизм, являющийся PL вне $G^{-1}(X)$, то полученный по (APLST) H можно сделать продолжением G .*

Второй инструмент – (SAL) – это 2-мерный аналог ключевого 3-мерного результата Р. Х. Бинга [10], который был важен для бинговского доказательства аналога (ST) в размерности 3 [12]. (SAL) не является новым, но его (частью новое?) доказательство будет дано в разделе 8.

ярто, дав в [83; р. 72] очень сжатое доказательство (ST), как кажется, утверждает в качестве следствия этого доказательства справедливости указанного заблуждения Шенфлиса – даже не делая упомянутых нами перепараметризаций!

ЛЕММА ОБ ОДНОСТОРОННЕЙ АППРОКСИМАЦИИ (SAL). Пусть J – любая жорданова дуга в жордановой кривой $C \subset \mathbb{R}^2$, и пусть $B \subset \mathbb{R}^2$ – запечатанная жорданова область с границей C . Найдется такая жорданова дуга $J' \subset B$ с теми же концами $\{P_0, P_1\}$, как и у J , что $J' \cap C = \{P_0, P_1\}$ и $J' - C'$ является PL. Более того, J' можно взять в любой заданной окрестности J .

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что (SAL) есть следствие (ST) и ее дополнения (ST+).

(SAL) можно рассматривать как в основном гомологический результат. Действительно, можно гомологически доказать – с помощью локальной формы двойственности Александера, справедливой во всех размерностях и коразмерностях (см. [87], [28] или [29]), – что каждая открытая жорданова область будет 0-1с в $\mathbb{R}^2$. Затем из свойства 0-1с можно вывести (SAL).

6. Суть доказательства (ST) и (ST+)

Этот раздел содержит, надеемся, кое-что новое для топологов. Мы доказываем (ST) и (ST+) при таких допущениях: (APLST), (APLST+) и (SAL) плюс результат (JCT), доступный для гомологической теории, и тривиальный PL случай (IOD).

Без потери общности мы можем принять, что запечатанная жорданова область B , заданная в условиях (ST), взята в $\mathbb{R}^2$. В самом деле, если вначале B дана в S^2 , возьмем любую точку P в компоненте $S^2 - C$, отличной от $D = B - C$, которая имеется согласно (JCT). Затем отождествим $\mathbb{R}^2$ с помощью PL-гомеоморфизма с $S^2 - P \supset B$.

Принять скорее $\mathbb{R}^2$, чем S^2 , в качестве объемлющего пространства полезно, поскольку (евклидова) метрика $\mathbb{R}^2$ имеет следующую особенность.

6.1. Свойство евклидовой метрики. Диаметр любого подмножества X в B представляется евклидовым расстоянием между двумя точками его границы δX в $\mathbb{R}^2$.

Непрерывность нужного нам гомеоморфизма $\mathbb{B}^2 \rightarrow B$ будет проверена через оценку таких диаметров.

Фиксируем вложение $c: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ единичной окружности S^1 с образом – жордановой кривой C . Мы будем строить распространение c до гомеоморфизма $h: \mathbb{B}^2 \rightarrow B$.

Как замечено в разделе 2, имеется гомеоморфизм ρ квадрата B^2 на круглый единичный диск $\mathbb{B}^2$, являющийся PL на его внутренности. Композиция $H = h \circ \rho$ установит (ST) и (ST+). Таким образом, теперь достаточно, чтобы построенный h оказался PL на $\text{Int } \mathbb{B}^2$, затем надо удостовериться, что это гомеоморфизм.

6.2. Построение замошения T в $\mathbb{B}^2$ и отображения $h: \mathbb{B}^2 \rightarrow B$. Грубая идея состоит в том, чтобы строить h постепенно, используя кирпичики бесконечного мощения (= разбиения) $h(T)$ в B , которое комбинаторно изоморфно посредством h мощению естественно компактифицированной гиперболической плоскости, порожденному отражениями в трех сторонах треугольника, все три вершины которого лежат на бесконечно удаленной окружности; см. рис. 6-а.

Точнее, мы сперва определим стандартное бесконечное мощение $\mathcal{T}$ линейными симплексами круглого единичного диска $\mathbb{B}^2$ в $\mathbb{R}^2$, как это показано на рис. 6-б. Затем с помощью $\mathcal{T}$ мы построим гомеоморфизм $h: \mathbb{B}^2 \rightarrow B$, являющийся PL на открытом диске $\text{Int } \mathbb{B}^2$.

Рис. 6а, 6б

Замошение пространства X здесь означает триангуляцию пространства X (неориентированным) симплициальным комплексом, также называемым $\mathcal{T}$, за одним исключением: взаимно однозначное отождествление симплициального комплекса $\mathcal{T}$ с пространством X непрерывно, но *не необходимо* есть гомеоморфизм. Однако оно всегда дает топологическое вложение в X любого (компактного!) конечного подкомплекса T в $\mathcal{T}$, поскольку индуцированная непрерывная биекция есть гомеоморфизм (см. раздел 2). В частности, бесконечное замошение $\mathcal{T}$ в $\mathbb{B}^2$ на рис. 6-б получает компактную топологию от $\mathbb{B}^2$, в то время как стандартные симплициальные топологии $\mathcal{T}$ некомпактны.

Обозначим выпуклую оболочку k комплексных корней k -й степени в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ через $\Pi(k)$, $k \geq 0$. Это стандартный (полный) k -угольник. Отметим вырожденные случаи $\Pi(1) = 1 = (1, 0)$ и $\Pi(2) = \triangle^1(-1, 1)$. Все другие $\Pi(k)$ двумерны.

Будучи до конца пунктуальными (см. рис. 6-б), возьмем в качестве 0-симплексов (= вершин) замошения $\mathcal{T}$ все точки непрерывной граничной окружности $\mathbb{B}^2$; за 1-симплексы (= ребра) возьмем стороны правильных выпуклых 2^n -угольников $\Pi(2^n)$, $n \geq 1$. Наконец, за открытые 2-симплексы (= грани) возьмем в $\mathcal{T}$ компоненты связности $(\text{Int } \Pi(2^n)) - \Pi(2^{n-1})$, $n \geq 2$, замкнутыми 2-симплексами будут их соответствующие замыкания в $\mathbb{R}^2$.

Пусть T_n есть $\Pi(2^n)$ с *конечной* триангуляцией, наследуемой из $\mathcal{T}$.

При построении h будут упоминаться дуги $A(p, q)$ с точками p и q на $\mathbb{S}^1$. Такая дуга $A(p, q)$ всегда будет более короткой дугой из двух между p и q . За исключением случая, когда p и q антиподальны, $A(p, q)$ будет обозначать дугу, идущую против часовой стрелки между p и q . Таким образом, $A(p, q) = A(q, p)$, но в случае $q = -p$ мы имеем $A(p, q) = -A(q, p)$ в $\mathbb{C}$.

ШАГ (0). *Предположим, что $h \mid \mathbb{S}^1$ есть данная параметризация $s: \mathbb{S}^1 \rightarrow C \subset B$ жордановой кривой.*

Вспомним, что точки $\mathbb{S}^1$ – это в точности вершины замошения $\mathcal{T}$.

Хорда в B – это жорданова дуга $J \subset B$, для которой $J \cap C = \partial J$. Мы назовем ее **почти-PL хордой**, если $J - \partial J$ есть PL.

Следующий шаг построения использует произвольную последовательность ε_n , $n \geq 1$, положительных чисел, которая стремится к 0, т.е. сходится $\mathcal{O}(n)$.

ШАГ (1). Для каждого 1-симплекса $\Delta^1(p, q)$ в $\mathcal{T}$ определим почти PL-хорду $\delta(p, q)$ в B , соединяющую $c(p)$ с $c(q)$ таким образом, что:

- (i) никакие две из этих хорд в B не пересекаются, иначе как (возможно) на C ;
- (ii) если 1-симплекс $\Delta^1(p, q)$ в $\mathcal{T}$ лежит в крае $T_n = \Pi(2^n)$, тогда почти-PL хорда $\delta(p, q)$ лежит в ε_n -окрестности в B жордановой дуги с $A(p, q) \subset C$.

Поскольку симплексы, хорды и т.д. не ориентированы, $\delta(p, q) = \delta(q, p)$.

Рис. 6с

ПОСТРОЕНИЕ ДЛЯ (1). Начнем с применения (SAL), чтобы получить почти-PL-хорду $\delta(1, -1) = \delta(-1, 1)$ в замыкании B области D в $\mathbb{R}^2$, которая соединяет $c(1)$ с $c(-1)$.

Допустим, что $\delta(p, q)$ было определено индуктивно для каждого 1-симплекса $\Delta^1(p, q)$ в T_n , где $n \geq 1$. Существует 2^n различных 2-симплексов S в $\mathcal{T}$ из T_{n+1} , которые не лежат в T_n . Каждый такой S имеет вид $S = \Delta^2(p, q, r)$, где $S \cap T_n$ есть $\Delta^1(p, q)$ (это ребро в $\Pi(2^n)$) и r – средняя точка дуги окружности $A(p, q)$ длины $2\pi/2^n$ от p к q в $\mathbb{S}^1$.

Воспользуемся (SAL), чтобы получить почти-PL-хорду $\delta(q, r)$, соединяющую q с r в запечатанной жордановой области $B(p, q) \subset B$, ограниченной жордановой кривой $h\Delta^1(p, q) \cup cA(q, p)$, требуя, чтобы $\delta(q, r)$ лежала в ε_{n+1} -окрестности $cA(q, r)$.

Снова с помощью (SAL) получим почти-PL-хорду $\delta(r, p)$, соединяющую r с p в запечатанной жордановой области, ограниченной жордановой кривой $\delta(p, q) \cup \delta(q, r) \cup cA(r, p)$, требуя, чтобы $\delta(r, p)$ лежала в ε_{n+1} -окрестности $cA(r, p)$.

Тогда $\delta(p, q)$, $\delta(q, r)$ и $\delta(r, p)$ лежат в $B(p, q)$ и пересекаются только на C .

Проеделав это для каждого такого S , мы определим PL-хорду $\delta(p, q)$ для каждого 1-симплекса $\Delta^1(p, q)$ в T_{n+1} . Индукция по n завершает шаг (1).

ШАГ (1+). Для каждого (неориентированного) ребра $\Delta^1(p, q)$ в $\mathcal{T}$ определим гомеоморфизм $h|: \Delta^1(p, q) \rightarrow \delta(p, q)$, переводящий p в $c(p)$, q в $c(q)$ и являющейся PL на $\Delta^1(p, q) - \{p, q\}$.

Здесь и далее $h|$ неформально обозначает отображение, которое может стать ограничением h . Заметим, что после шага (1+) отображение h вполне определено и непрерывно на крае ∂S каждого 2-симплекса $S = \Delta^2(p, q, r)$ из $\mathcal{T}$ и будет там PL, кроме трех его вершин; образом является граница $\delta(p, q) \cup \delta(q, r) \cup \delta(r, p)$ запечатанной жордановой области $B(p, q, r)$ в B .

ШАГ (2). Для каждого (неориентированного) 2-симплекса $S = \Delta^2(p, q, r)$ из $\mathcal{T}$ определим гомеоморфизм $h|: \Delta^2(p, q, r) \rightarrow B(p, q, r)$ так, чтобы:

- (i) на каждом 1-симплексе – стороне S , $h|_S$ был отображением 1-симплекса, определенным на шаге (1);
- (ii) $h|_S$ был бы PL всюду, исключая вершины p, q, r , – которые принадлежат $(h|_S)^{-1}(C)$.

ПОСТРОЕНИЕ для (2). Требуемое продолжение $h|_S$ дается почти-PL-теоремой Шенфлиса (APLST) с ее дополнением (APLST+), см. раздел 5.

Теперь $h: \mathbb{B}^2 \rightarrow B$ вполне определено как отображение множеств и, очевидно, оно PL на $\text{Int } \mathbb{B}^2$.

6.3. Доказательство, что $h: \mathbb{B}^2 \rightarrow B$ есть гомеоморфизм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (A). Отображение $h: \mathbb{B}^2 \rightarrow B$ инъективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (A). Согласно шагам (0), (1) и (1+) построения этого h , оно инъективно на объединении симплексов из $\mathcal{T}$ размерностей 0 и 1. По шагу (2) оно инъективно в отдельности на каждом 2-симплексе. Тогда (A) вытекает из леммы о дизъюнктных жордановых областях из раздела 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (B). $h|_{\text{Int } \mathbb{B}^2}$ непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (B). Здесь достаточно проверить непрерывность $h|_U$ на семействе открытых подмножеств U в $\mathbb{B}^2$, которые покрывают $\text{Int } \mathbb{B}^2$. Но $h|_{T_k}$ непрерывно, поскольку h непрерывно на каждом симплексе, а T_k – конечный комплекс. А fortiori, $h|_{\text{Int } T_k}$ непрерывно. Но открытые множества $\text{Int } T_k$ образуют открытое покрытие $\text{Int } \mathbb{B}^2$, поскольку $\Pi(2^n)$ содержит гомотетичный 2-диск $\cos(2\pi/2^{n+1})\mathbb{B}^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (C). Имеется такая последовательность $\eta_1, \eta_2, \dots$, сходящаяся $\mathcal{O}(n)$, что диаметр $\text{Diam } h(X)$ образа $h(X)$ каждого сегмента X в $\mathbb{B}^2$, служащего одной из 2^n запечатанных компонент $\mathbb{B}^2 - \Pi(n)$, будет $\leq \eta_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (C). По определению, X – выпуклая оболочка $\mathbb{R}^2$ единственной дуги окружности $A = A(j\alpha_n, (j+1)\alpha_n)$, где $\alpha_n = 2\pi/2^n$ и $0 \leq j < 2^n$. Также $X \cap \Pi(n)$ есть $\Delta = \Delta^1(j\alpha_n, (j+1)\alpha_n)$. В результате шага (1) построения h эту прямую хорду Δ в $\mathbb{B}^2$, служащую границей X в $\mathbb{B}^2$, h отображает на почти-PL-хорду в ε_n -окрестности $h(A)$ в B .

УТВЕРЖДЕНИЕ.

$$\text{Diam } h(X) = \text{Diam } h(\partial X) \leq \text{Diam } h(A) + 2\varepsilon_n. \quad (*)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. В (*) отношение $\leq$ следует из неравенства треугольника, но равенство $=$ не очевидно. Однако $\geq$ вместо $=$ очевидно из-за вложенности. Тогда остается установить $\leq$ вместо $=$, что мы сделаем следующим образом.

Свойство евклидовой метрики из п. 6.1 говорит нам, что $\text{Diam } h(\partial X) = \text{Diam } (Y)$, где Y обозначает запечатанную жорданову область с границей $h(\partial X)$. Неясно (пока), что Y есть $h(X)$. Но Y содержит $h(A)$, по своему определению, и содержит $h(S_i)$ для каждого треугольного кирпичика S_i из $\mathcal{T}$, лежащего в сегменте X ; это следствие леммы о жордановой подобласти из раздела 3. Значит, Y целиком содержит $h(X)$ и тогда $\text{Diam } h(X) \leq \text{Diam } Y$, как и требуется для завершения доказательства утверждения.

Продолжая доказательство (C), заметим, что, так как $h|_{\mathbb{S}^1}$ непрерывно и $\mathbb{S}^1$ компактно, $h|_{\mathbb{S}^1}$ равномерно непрерывно в том смысле, что для любого $\zeta > 0$ существует $\xi > 0$ такое, что если $A' \subset \mathbb{S}^1$ имеет диаметр $< \xi$, то диаметр $\text{Diam } h(A')$ будет $< \zeta$. Отсюда, если $\zeta_n = \text{MaxDiam}(h(A))$, где A пробегает 2^n дуг $\mathbb{S}^1$, на которые корни степени 2^n из 1 разбивают $\mathbb{S}^1$, то ζ_n сходится к 0.

Из (*) мы заключаем, полагая $\eta_n = \zeta_n + 2\varepsilon_n$, что $\text{Diam } h(X) \leq \eta_n$, где η_n сходится к 0. Это доказывает утверждение (C).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (D). $h : \mathbb{B}^2 \rightarrow B \subset \mathbb{R}^2$ непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (D). Ввиду (B), достаточно доказать непрерывность h в произвольной точке p из $\mathbb{S}^1$. Мы различаем следующие два случая.

СЛУЧАЙ (I). Угол p не есть двоично-рациональное кратное 2π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛУЧАЯ (I) – см. рис. 6-d.

Рис. 6d, 6e

Для всех $n \geq 1$ точка p из $\mathbb{S}^1$ лежит в $\mathbb{B}^2$ в точности в одном сегменте $X = X_p(n)$, который $\Pi(2^n)$ отсекает от $\mathbb{B}^2$, как это описано в предложении (C). По предложению (C), числа $\text{Diam } h(X_p(n))$ сходятся $\mathcal{O}(n)$, что доказывает непрерывность h в p , завершая доказательство случая (I).

СЛУЧАЙ (II). Угол p есть двоично-рациональное кратное 2π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛУЧАЯ (II) – см. рис. 6-е.

Допустим, что угол p есть $2\pi\ell/2^m$, где ℓ нечетно и $m \geq 1$. Тогда p есть вершина правильного многоугольника $\Pi(2^m)$ в точности, когда $n \geq m$. Здесь появляется та трудность, что 2^n сегментов X , которые $\Pi(2^n)$ отсекает от $\mathbb{B}^2$, не содержат никакой окрестности p в $\mathbb{B}^2$, в то время как для проверки непрерывности h в p нам нужен базис окрестностей, получаемый при изменении n .

Однако для всех $n \geq m$ точка p из $\mathbb{S}^1$ лежит в пересечении в точности двух сегментов $X'_p(n)$ и $X''_p(n)$ в $\mathbb{B}^2$, концы которых суть $(j-1)\alpha_n$, $j\alpha_n$ и $j\alpha_n$, $(j+1)\alpha_n$ соответственно, где $\alpha_n = 2\pi i/2^n$ и $0 \leq j < 2^n$. Их объединение есть не вполне, но почти окрестность p в $\mathbb{B}^2$. Мы определяем окрестность $X_p(n)$ точки p в $\mathbb{B}^2$ как (см. рис. 6-е, показывающий $X_p(n)$ в виде планера в полете):

$$X_p(n) = X'_p(n) \cup X''_p(n) \cup Y_p(n),$$

где $Y_p(n)$ есть малая окрестность p в выпуклом правильном 2^n -многоугольнике $\Pi(2^n)$, выбранная так, что

$$\text{Diam } h(Y_p(n)) < \eta_n. \quad (**)$$

Это возможно, поскольку $h|_{T_n}$ непрерывно по построению.

Поэтому образ окрестности $X_p(n)$ точки p в $\mathbb{B}^2$ относительно h имеет диаметр, ограниченный суммой диаметров трех частей:

$$\text{Diam } h(X_p(n)) \leq \text{Diam } h(X'_p(n)) + \text{Diam } h(X''_p(n)) + \text{Diam } Y_p(n) \leq 3\eta_n,$$

где последнее неравенство использует (*) из доказательства (C) и (**). Следовательно, $\text{Diam } h(X_p(n))$ сходится $\mathcal{O}(n)$, что доказывает непрерывность h в любой двоичной точке p . Предложение (D) теперь доказано в обоих возможных случаях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (E). Ограничение $h|: \text{Int } \mathbb{B}^2 \rightarrow D = B - C$ открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (E). Применим теорему об инвариантности области (IOD) в легком случае PL-отображений.

ЛЕММА. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – замкнутое и непрерывное отображение, и пусть U открыто в Y . Тогда ограничение $f|: f^{-1}(U) \rightarrow U$ замкнуто.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (F). $h: \mathbb{B}^2 \rightarrow B$ биективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (F). По предложению (A) h инъективно. Так как h отображает $\mathbb{S}^1$ на C , достаточно показать, что h отображает $\text{Int } \mathbb{B}^2 = \mathbb{B}^2 - \mathbb{S}^1$ сюръективно на $D = B - C$. Так как h непрерывно, а $\mathbb{B}^2$ компактно, то h замкнуто. Отсюда, по предыдущей лемме получаем, что $h|: \text{Int } \mathbb{B}^2 \rightarrow D = B - C$ замкнуто. Поскольку оно также открыто, по предложению (E), и $\text{Int } \mathbb{B}^2$ и D связны, мы заключаем, что

открыто-замкнутое подмножество $h(\text{Int } B^2)$ в D есть все D ; значит, h одновременно сюръективно и инъективно, что и требовалось доказать.

Так как h , по предложению (F), есть биективное непрерывное отображение компакта, то оно является гомеоморфизмом. Это завершает доказательство теоремы Шенфлиса (ST) и его дополнения (ST+).

КОММЕНТАРИЙ. Ход предыдущего доказательства крайне осторожен, можно сказать, ханжески – подобно данному в [40] – в сравнении с многими, как, скажем, в [13], [57], [83].

Это, может быть, *желательно*, учитывая историю, описанную в разделе 4; и это *возможно*, без испытания читателя на выносливость, благодаря упрощениям нашего очерка.

7. Доказательство некоторых PL теорем шенфлисовского типа – см. раздел 5

Это первый из двух разделов, посвященных инструментарию доказательства (ST). Вначале доказывается следующая теорема.

КЛАССИЧЕСКАЯ PL ТЕОРЕМА ШЕНФЛИСА (PLST) – см. [69; § 13], 1906 г. *Каждая PL-жорданова кривая C в $\mathbb{R}^2$ ограничивает PL-2-диск B .*

Нам понадобится несколько легких лемм, которые оставляются в качестве упражнений, ср. [65].

ЛЕММА (1). *Выпуклая или звездная запечатанная жорданова область в $\mathbb{R}^2$ с PL-границей необходимо PL-гомеоморфна B^2 . В частности, B^2 PL-гомеоморфно PL-конусу $\text{Cone}(B^1)$ над B^1 и также PL-конусу $\text{Cone}(S^1)$ над S^1 .*

ЛЕММА (2). *Любой PL-автогомеоморфизм S^1 распространяется (конической конструкцией) до PL-автогомеоморфизма $B^2 \cong \text{Cone}(S^1)$. Подобным образом PL-автогомеоморфизм замкнутого интервала в S^1 продолжается (конической конструкцией) до PL-автогомеоморфизма $B^2 \cong \text{Cone}(B^1)$.*

ЛЕММА (3). *Любая циклически упорядоченная конечная последовательность N точек в S^1 эквивалентна любой другой такой же посредством PL-автогомеоморфизма S^1 .*

ЛЕММА (4). *Если X конечный симплициальный 2-комплекс, представленный объединением $X = X_1 \cup X_2$ двух подкомплексов, каждый из которых PL-гомеоморфен B^2 , так, что $X_1 \cap X_2 \cong B^1$, тогда X PL-гомеоморфен B^2 .*

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕРСИИ. Четыре леммы, параллельные предыдущим четырем, но без эпитета PL и с заменой PL-гомеоморфизма ($\cong$) обычным гомеоморфизмом ($\approx$), также верны и имеют подобные доказательства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (PLST). Рассуждаем индуктивно по числу $N(C)$ 2-симплексов, линейных в $\mathbb{R}^2$, нужных, чтобы триангулировать B . Так как, по лемме (1), (PLST) верна для $N(C) = 1$, мы можем допустить, что $N(C) > 1$.

Всегда имеется 2-симплекс S в триангуляции B , по меньшей мере одно ребро которого лежит в C . Короткий разбор случаев показывает, что всегда найдутся одно

или два ребра границы этого S такие, что эта триангуляция X расщепится, как предусмотрено леммой (4). Поскольку $X_1 \cong \mathbb{B}^2 \cong X_2$ по индукции, лемма (4) покажет, что $B \cong \mathbb{B}^2$.

ЗАМЕЧАНИЯ О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ PL-случая (JCT). Предыдущее несложное доказательство (PLST) предполагает справедливость теоремы Жордана для PL-жордановых кривых – назовем ее (PLJCT). Действительно, (PLJCT) дает нам запечатанную жорданову область B , на которой проводится описанная индукция.

(I) **ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (PLJCT).** Оно идет индукцией по числу углов $C \subset \mathbb{R}^2$. Мы ограничимся подсказками: так как случай, когда C выпукло, тривиально доказывается прямо, можно допустить, что существует линейный сегмент Δ^1 в границе выпуклой оболочки C , который пересекает C лишь в своих конечных точках $\partial\Delta^1$. Это дает две жордановы кривые C' и C'' , пересекающиеся по Δ^1 , причем их объединение есть $C \cup \Delta^1$. Так как число углов у каждой меньше, чем у C , можно рассуждать индуктивно...

(II) **КОМБИНАТОРНОЕ ГОМОЛОГИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (PLJCT).** Гомологии в данном случае имеют коэффициенты в группе $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, и они вычисляются для конечного симплициального 2-комплекса X с помощью цепного комплекса $\mathbf{C}_*(X; \mathbb{Z}_2): 0 \leftarrow \mathbf{C}_0 \leftarrow \mathbf{C}_1 \leftarrow \mathbf{C}_2 \leftarrow 0$, в котором $\mathbf{C}_i = \mathbf{C}_i(X; \mathbb{Z}_2)$ отождествляется с множеством конечных подмножеств множества (неориентированных) i -симплексов в X . Пусть теперь X – линейная триангуляция выпуклой оболочки C в $\mathbb{R}^2$, в которой данная PL-жорданова кривая C есть подкомплекс; затем заметим, что множество 1-симплексов X в C естественным образом образует цикл $\mathbf{C}_1(X; \mathbb{Z}_2)$. Так как X стягиваемо, то $H_*(X; \mathbb{Z}_2) = 0$; в частности, 1-цикл C служит границей 2-цикла B ; это B есть множество 2-симплексов, объединение которых есть компактное связное 2-многообразие с краем C . Пользуясь этими фактами как леммой, можно показать, что любая PL-жорданова кривая C в S^2 есть общая граница и общий край компактных связных подмногообразий B_1 и B_2 , где $C = B_1 \cap B_2$. Тогда $B_1 \cup B_2$ есть замкнутое PL-подмногообразие в S^2 и, значит, все S^2 .

Доказательство (APLST) использует еще три леммы.

ЛЕММА (5) (см. рис. 7-А). Если PL-2-многообразие Y представлено бесконечным объединением

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots,$$

где $Y_j \cong B^2$ и $Y_j \cap Y_{j+1} \cong B^1$ для всех $j \geq 1$, в то время как $Y_j \cap Y_{j+k} = \emptyset$ для $k > 1$, то $Y \cong B^1 \times [0, \infty) \cong B^1 \times [0, 1) \cong (B^1 * i) - \{i\} \subset \mathbb{C}$, где $*$ обозначает джойн и $i = \sqrt{-1}$.

ПОДЛЕММА (6). Пусть Δ^2 – линейный 2-симплекс в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим автогомеоморфизм φ 1-симплекса Δ^1 , который служит гранью Δ^2 . Допустим, что φ неподвижен в концах $\partial\Delta^1$ и PL на $\text{Int } \Delta^1 = \Delta^1 - \partial\Delta^1$. Тогда φ можно продолжить до автогомеоморфизма Φ на Δ^2 , который PL на $\Delta^2 - \partial\Delta^1$ и поточечно неподвижен на $\partial\Delta^2 - \text{Int } \Delta^1$.

Рис. 7а

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (6). Возьмем бесконечную, но локально конечную триангуляцию для $\Delta^2 - \partial\Delta^1$, такую что φ линейно на симплексах – см. рис. 7-b. Тогда, на $\Delta^2 - \partial\Delta^1$, положим, что Φ есть единственное линейное на симплексах отображение, неподвижное во всех вершинах вне Δ^1 ; оно распространяется дальше тождественно на две точки $\partial\Delta^1$ и дает требуемое Φ на всем Δ^2 .

Рис. 7b, 7с

ЛЕММА (7). Рассмотрим автогомеоморфизм φ на ∂B^2 , который сохраняет конечное множество Y из N точек в ∂B^2 и PL на $\partial B^2 - Y$. Такой φ можно продолжить до автогомеоморфизма Φ на B^2 , PL на $B^2 - Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (7). В силу лемм (2) и (3) это достаточно доказать, когда φ поточечно неподвижен на X . Мы допускаем вначале, что $N \geq 3$. отождествим B^2 посредством PL -гомеоморфизма со стандартным правильным N -угольником $\Pi(N)$, переводящим Y в вершины. Триангулируем $\Pi(N)$, строя конус над естественной триангуляцией N -угольной границы с вершиной в начале $\mathbb{R}^2$; см. рис. 7-с. Применяя одновременно, но независимо лемму (6) ко всем N полученным 2-симплексам, мы получим требуемое продолжение Φ .

Если $N = 0$, то лемма (2) дает лемму (7).

Если $N = 1$ (соответственно $N = 2$), то доказательство для $N = 4$, примененное к данным, симметричным относительно вращения на угол $\pi/2$ (соответственно π), устанавливает лемму (7) после перехода к PL пространству орбит, которое есть PL -2-диск. Лемма доказана.

В разделе 5 мы упоминали, что (APLST) вытекает из известной PL -классификации поверхностей. Вот часть этой классификации, относящаяся к нашему делу; она приводится здесь, чтобы дополнительно помочь в доказательстве леммы об односторонней аппроксимации (SAL) в следующем разделе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. PL-поверхность M **неприводима**, если образ каждого PL-вложения окружности в M служит границей PL-2-диска в M .

ТЕОРЕМА КЛАССИФИКАЦИИ НЕКОМПАКТНЫХ НЕПРИВОДИМЫХ PL-ПОВЕРХНОСТЕЙ (PLCT). Пусть M – связная некомпактная неприводимая PL-поверхность.

- (i) Если $\partial M = \emptyset$, то $M \cong \mathbb{R}^2$.
- (ii) Если M имеет $N \geq 1$ компонент края, то $M \cong \mathbb{B}^2 - \hat{X}$, где $\hat{X}$ – любое множество из N точек в $\partial \mathbb{B}^2 = \mathbb{S}^1$.

Для доказательства мы фиксируем любую PL-триангуляцию $\mathcal{T}$ для M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i). Легко строятся произвольно большие связные компактные подкомплексы K в $\mathcal{T}$. Для малого $\varepsilon > 0$ замкнутая ε -окрестность $L = N_\varepsilon(K)$ такого K в симплициальной метрике $\mathcal{T}$ есть компактное PL подмногообразие в M . В силу неприводимости M , любая компонента C края L есть край PL-2-диска B_C в M . Связное множество $\text{Int } L \supset K$ целиком лежит либо (а) в B_C , либо (б) в $M - B_C$. Случай (б) не может иметь места для всех из конечного числа компонент C в ∂L , так как тогда M было бы компактным. Значит, встречается случай (а).

Мы теперь знаем, что M есть возрастающая последовательность открытых подмножеств $\text{Int } B_C \cong \text{Int } \mathbb{B}^2 \cong \mathbb{R}^2$. Но хорошо известно, что любое PL-многообразие, которое есть возрастающее объединение открытых множеств, PL-гомеоморфных $\mathbb{R}^n$, само есть PL-гомеоморфно $\mathbb{R}^n$. Доказательство служит интересным упражнением. См. [65].

УПРАЖНЕНИЕ. Комбинируя пункт (i) с (PLJCT) и (PLST), покажите следующее: если X – связное компактное подмножество S^2 и U – любая компонента $S^2 - X$, то $U \cong \mathbb{R}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ii) при $N = 1$. Построим, как и в случае (i), произвольно большое связное компактное PL-подмногообразие L , но так, чтобы оно проходило по ∂M . Рассмотрим его границу δL в M . Это компактное PL 1-многообразие, и каждая компонента δL есть либо топологическая окружность C в $\text{Int } M$, либо дуга J с $\partial J = J \cap \partial M$. Диск B_C , край которого есть окружность C края δL , не может содержать L , так как он лежит в $\text{Int } M$. Для каждой компоненты δL , являющейся дугой J , имеется единственная дуга $J' \subset \partial M$ с той же границей $\partial J = \partial J'$. Вместе они образуют окружность C_J , которая, в силу неприводимости M , ограничивает PL-диск B_J в M . Рассуждая, как и в (i), мы видим, что в точности один такой B_J содержит L .

Мы теперь знаем, что M есть возрастающее объединение открытых множеств $\text{Int } B_J \cong \mathbb{R}_+^2 \cong \mathbb{R}^1 \times [0, \infty) \cong \mathbb{B}^2 - \{i\}$. Но любое PL-многообразие, которое есть возрастающее объединение открытых множеств, PL-гомеоморфных $\mathbb{R}_+^n$, само PL-гомеоморфно $\mathbb{R}_+^n$. Можно также применить лемму (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ii) для $N > 1$. Проводим индукцию по N . Так как M связно, то имеется PL-путь $g: [0, 1] \rightarrow M$, соединяющий две различные компоненты ∂M и пересекающий ∂M только в своих концах. С помощью канонической процедуры короткого замыкания g можно заменить вложением, образ которого есть PL-дуга $\gamma \subset g([0, 1])$;

подробнее об этой процедуре см. доказательство (PLCL) в следующем разделе; ее использовал уже Жордан [39] в 1887 г. Расщепляя M вдоль γ , получаем две компоненты M_1 и M_2 , пересекающиеся по γ . Действительно, если бы расщепление давало одну компоненту, M не было бы неприводимым. Каждое из M_i есть связная некомпактная неприводимая PL-поверхность, имеющая $N_i \geq 1$ компонент края. Далее, $N = N_1 + N_2$; отсюда N_1 и N_2 оба $< N$. С помощью индукции по N и леммы (7) легко выводим часть (ii). Детальнее: возьмем PL-жорданову дугу J в $B^2 - \hat{X}$, так чтобы $J \cap S^1 = \partial J$ и J расщепляло B^2 на два PL-диска B_i , содержащих подмножества $\hat{X}_i$ из N_i точек $\hat{X}$. Тогда по индуктивному предположению имеются PL-гомеоморфизмы $h_i: B_i - \hat{X}_i \rightarrow M_i$, и лемма (7) позволяет нам подправить их так, чтобы $h_1|_J$ и $h_2|_J$ индуцировали один и тот же PL-гомеоморфизм на γ . Теперь h_1 и h_2 вместе определяют требуемый PL-гомеоморфизм $B^2 - \hat{X} \cong M$.

В доказательстве (ST) в разделе 6 (но лишь для $N = 3$) непосредственно использовалось следующее утверждение.

ПОЧТИ PL ТЕОРЕМА ШЕНФЛИСА (APLST). Пусть C – жорданова кривая в $\mathbb{R}^2$, PL (= кусочно линейная), за исключением (возможно, пустого) конечного множества X из N точек в C . Можно построить гомеоморфизм H стандартного PL-диска B^2 на компактную жорданову область B с границей C ; при этом H можно считать PL за исключением точек в $h^{-1}X \subset \partial B^2$.

Доказательство (APLST) для $N = 0$. Это в точности есть (PLST).

Доказательство (APLST) для $N > 0$. Согласно (PLCT), имеется PL-гомеоморфизм $H_0: B^2 - \hat{X} \rightarrow B - X$, где $\hat{X}$ и X – множества из N точек в S^1 и C соответственно. Следующая лемма компактификации (8) из общей топологии обеспечивает существование продолжения H_0 до непрерывной сюръекции $H: B^2 \rightarrow B$ с условием $H(\hat{X}) = X$. Поскольку сюръекция множеств из N элементов биективна, то H биективно. Тогда, в силу компактности, H – гомеоморфизм.

ЛЕММА КОМПАКТИФИКАЦИИ (8). Пусть X и Y – компактные хаусдорфовы пространства; пусть A и B – конечные подмножества X и Y соответственно, причем $X - A$ плотно в X и $Y - B$ плотно в Y . Рассмотрим непрерывное отображение $g: X - A \rightarrow Y - B$, которое собственно в том смысле, что для каждого компактного подмножества K в $Y - B$ его полный прообраз $g^{-1}(K)$ компактен в $X - A$. Допустим, что каждая точка $a \in A$ имеет произвольно малые компактные окрестности X_a в X такие, что $X_a - a$ связно. Тогда g единственным образом продолжается до непрерывного отображения $G: X \rightarrow Y$. При этом G сюръективно, если g сюръективно.

ЗАМЕЧАНИЯ. (i) Допущение связности существенно, как показывает гомеоморфизм $(S^1 - (1, 0)) \approx \text{Int } \mathbb{B}^1$.

(ii) Эта лемма может рассматриваться как фрагмент теории концов Керекьярто и Фрейдентала.

(iii) Допущение леммы, что X_a компактны, несущественно, поскольку замыкание связного множества всегда связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (8). Достаточно установить существование непрерывного продолжения G для g . Действительно, требуемая единственность G вытекает из плот-

ности $X - A$ в X . Импликация “ g сюръективно влечет G сюръективно” следует из плотности $Y - B$ в Y .

Что касается существования, мы начинаем со случая, когда B состоит из одной точки. Тогда Y есть хорошо известная одноточечная компактификация по Александрову пространства $(Y - B)$ “бесконечно удаленной” точкой B . Продолжение G получается отображением всего A в B . Его непрерывность доказывается легко и есть стандартный факт относительно александровской компактификации (ср. [31]). Отметим, что в этом случае упоминание о связности в допущениях излишне; также нужно только, чтобы A было компактным, не обязательно конечным.

Остается доказать существование G в случае, когда B имеет ≥ 2 точек.

УТВЕРЖДЕНИЕ (*). *В условиях леммы (8) для любой точки a в A существуют: точка b в B ; компактная окрестность Y_b для b в Y , причем $Y_b \cap B = \{b\}$; и компактная окрестность X_a для a в X такие, что $g(X_a - \{a\}) \subset Y_b - \{b\}$.*

Доказательство, что G существует, если (*) верно. В условиях (*) рассмотрим для каждой a в A (собственное!) ограничение $g_a: X_a - \{a\} \rightarrow Y_b - \{b\}$ отображения g . Доказанный случай леммы (8), где B — одна точка, обеспечивает нам непрерывное продолжение g_a до непрерывного отображения $G_a: X_a \rightarrow Y_b \hookrightarrow Y$. Эти G_a вместе дают продолжение G для g . Оно непрерывно, так как g и эти G_a непрерывны и согласуются на открытом покрытии X , образованном $X - A$ и внутренностями относительно X этих X_a .

Доказательство (*) с использованием связности. Выберем для точек b в B попарно дизъюнктные компактные окрестности Y_b в Y ; обозначим через Y_B их объединение. Так как $Y_B - B$ есть окрестность (александровской) бесконечности в $Y - B$ (т.е. $Y - Y_B$ имеет компактное замыкание $Y - B$), в то время как g собственно, мы имеем, что $g^{-1}(Y_B - B)$ есть окрестность бесконечности в $X - A$, и, значит, $A \cup g^{-1}(Y_B - B)$ есть окрестность A в X . Для любого данного a в A выберем окрестность X_a для a в X со связным $(X_a - \{a\})$ и столь малую, чтобы $(X_a - \{a\}) \subset g^{-1}(Y_B - B)$. Поскольку прообразы $g^{-1}(Y_b - \{b\})$ образуют замкнутое разбиение $g^{-1}(Y_B - B)$, эта связность влечет, что $(X_a - \{a\})$ лежит целиком в одном из $g^{-1}(Y_b - \{b\})$.

Остается доказать (APLST+), которая в разделе 6 дополнила (APLST).

Дополнение (APLST+) к (APLST) — см. раздел 5. *Если $f: \partial B^2 \rightarrow C$ — гомеоморфизм, который PL вне $f^{-1}(X)$, тогда $H: B^2 \rightarrow B$, полученный в (APLST), может быть изменен так, чтобы продолжать f .*

Доказательство (APLST+). Она немедленно следует из (APLST) и леммы (7).

8. Доказательство леммы об односторонней аппроксимации (SAL) — см. раздел 5

Это второй и последний раздел, посвященный инструментарию доказательства теоремы Шенфлиса (ST). Мы начинаем с пары лемм, справедливых во всех размерностях.

ЛЕММА О ЛИНЕЙНОЙ ДОСТИЖИМОСТИ (LAL) [82], [15]. *Рассмотрим любое открытое подмножество D в $\mathbb{R}^n$ с замыканием B и границей C . В C рассмотрим*

любую точку P и зададим $\varepsilon > 0$. Существует компактная дуга L в B такая, что $L \cap C$ – одна точка, ε -близкая к P . Если C – PL вблизи P , то за $L \cap C$ можно взять саму P .

Рис. 8а

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (LAL) – см. рис. 8-а. Случай, когда C – PL вблизи P , получается сразу, в силу локально конического поведения PL объектов [65]. Если это не так, то поскольку C служит границей для $D = B - C$, имеется точка Q в D , которая ε -близка к P (в евклидовой метрике). Тогда так же ориентированный отрезок $\Delta = \Delta^1(Q; P)$ в $\mathbb{R}^n$, идущий от Q к P , будет ε -близок к P . Пусть P' – первая точка на Δ , которая лежит в C , тогда отрезок $L = \Delta^1(Q; P')$ удовлетворяет лемме.

ЛЕММА О PL ХОРДЕ (PLCL). *Оставаясь в условиях (LAL), допустим, что D связно и что $P' \neq P$ – вторая данная точка в C . Тогда найдется компактная PL -дуга L в B такая, что $L \cap C = \partial L$ и L соединяет точку, ε -близкую к P , с точкой, ε -близкой к P' . Кроме того, если C – сама PL вблизи P и P' , то можно считать, что $\partial L = \{P, P'\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (PLCL). Применяя (LAL) дважды, мы благодаря связности $B - C$ (JCT) получаем такой PL -путь $\lambda: [0, 1] \rightarrow B$, что $\Lambda = \lambda([0, 1])$ дуга, которая нам нужна, за одним недостатком: λ может не быть инъективным. Устраняя по порядку обхода все возможные короткие замыкания в λ , предлагаемые самопересечениями этого пути, мы (канонически!) произведем PL -путь, образ которого $L \subset \Lambda$ будет PL -жордановой дугой с требуемыми свойствами.

УСЛОВИЯ. Мы теперь ограничимся размерностью 2 и рассмотрим жорданову кривую $C \subset \mathbb{R}^2$, которая, согласно (JCT), служит границей единственной жордановой области D . В запечатанной жордановой области $B = C \cup D$ мы рассмотрим то, что было названо **почти- PL -хордой** J для B , которая, по определению, есть такая жорданова дуга J в B , что $\partial J = J \cap C$ и $J \cap D$ является PL . **Почти- PL -сегмент** X в B определяется как компактная жорданова область в $\mathbb{R}^2$ с границей $J \cup J_0$, где J есть почти- PL -хорда в B и J_0 – жорданова дуга в C с $\partial J = \partial J_0$.

ЛЕММА О ГРАНИЧНОМ ПОДЖАТИИ (SCL). *В приведенных условиях пусть J будет почти- PL -хордой в B и пусть X – почти- PL -сегмент в B , границей которого в $\mathbb{R}^2$ служит жорданова кривая $J \cup J_0$. Тогда для любой открытой окрестности U дуги J_0 в B найдется другой почти- PL -сегмент X' в B , для которого (а) $X' \subset U \cup X$, (б) $X' \cap C = J_0$ и (с) его граница J' в B есть почти- PL -хорда в B , которая совпадает с J вблизи C .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (SCL). PL-многообразия $X - J_0$ с краем J неприводимо согласно (PLST) из последнего раздела; значит, по теореме о PL-классификации из последнего раздела имеется PL-гомеоморфизм $H: \mathbb{R}^1 \times [0; 1) \rightarrow X - J_0$. Так как $X - U$ — компактное подмножество $X - J_0$, оно содержится в образе H любого квадрата $[-r; r] \times [0; 2r]$ для достаточно большого $r > 0$. Тогда за требуемый почти-PL-сегмент B можно взять $X' = X - H((-r, r) \times [0; 2r))$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы ничего не предпринимали для того, чтобы обеспечить сходимость H в B ; вполне возможно, например, что образ некоторой полупрямой в $\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R}^1 \times [0, \infty)$ (но не в $\mathbb{R}^1 \times \{0\}$), имеет все J_0 своим предельным множеством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ О ПЕРИФЕРИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ (PNP). *В тех же условиях пусть p — любая точка на жордановой кривой C . Существуют произвольно малые компактные окрестности точки p в B , которые являются почти-PL-сегментами в B .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (PNP). Пусть V — любая открытая окрестность p в B . По лемме о PL-хорде (PLCL), имеется такой почти-PL-сегмент X в B , что $X \cap C$ есть жорданова дуга J_0 и $p \in (J_0 - \partial J_0)$. Теперь (SCL) дает почти-PL-сегмент $X' \subset V$ в B , причем $X' \cap C = J_0$. Это — требуемая окрестность p в B .

ТЕОРЕМА О КУСОЧНО ЛИНЕЙНОЙ ДОСТИЖИМОСТИ (PLAT). *Пусть $C \subset \mathbb{R}^2$ — жорданова кривая и B — ее запечатанная жорданова область.*

- (i) *Для любой точки p в C имеется жорданова дуга J в запечатанной жордановой области B с границей C такая, что $J \cap C = p$ и $J - p$ — PL.*
- (ii) *Для любых двух различных точек p и q в C имеется жорданова дуга J в B такая, что $J \cap C = \{p, q\}$ и $J - \{p, q\}$ — PL.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (i). Согласно предложению о периферической точности (PNP), имеется бесконечно убывающая последовательность $X_1, X_2, \dots$ компактных окрестностей p в B такая, что пересечение $\bigcap_i X_i$ есть p , их соответствующие границы в B попарно дизъюнкты и являются почти-PL хордами J_i в B . Выберем точку p_i в $J_i - \partial J_i$. Пусть Y_i — компактное замыкание $X_i - X_{i+1}$. Его граница ∂Y_i в $\mathbb{R}^2$ есть жорданова кривая, содержащая дизъюнкты жордановы дуги J_i и J_{i+1} . Согласно (PLCL), имеется PL-жорданова дуга K_i в Y_i такая, что $\partial K_i = \{p_i, p_{i+1}\}$. Объединение $\{p\} \cup \bigcup_i K_i$ есть требуемая жорданова дуга J .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ii). Одно доказательство такое же. Альтернативно, можно склеить вместе две дуги, полученные в (i), как в доказательстве (PLCL).

Теперь легко достигим результат, нужный для доказательства (ST).

ЛЕММА ОБ ОДНОСТОРОННЕЙ АППРОКСИМАЦИИ (SAL). *Пусть J — любая жорданова дуга в жордановой кривой $C \subset \mathbb{R}^2$ и пусть $B \subset \mathbb{R}^2$ — запечатанная жорданова область с границей C . Имеется жорданова дуга $J' \subset B$ с теми же концевыми точками $\{P_0; P_1\}$, что и J , причем $J' \cap C = \{P_0; P_1\}$ и $J' - C$ — PL. Кроме того, J' можно взять в любой предписанной окрестности J .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (SAL). Это немедленное следствие части (ii) в (PLAT) и леммы о граничном поджатии (SCL).

9. Некоторые следствия (ST) и (PLST)

Многие доказательства тут оставляются, частично или полностью, в качестве упражнений – с надеждой доставить удовольствие!

ТЕОРЕМА НЕЗАУЗЛИВАНИЯ [67; §13]. *Если C и C' – жордановы кривые в $\mathbb{R}^2$, то найдется автогомеоморфизм $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которого $H(C) = C'$. При этом, если уже дан гомеоморфизм $h: C \rightarrow C'$, то H можно взять совпадающим с h на C .*

ПОДСКАЗКА. (ST) из раздела 4 дает для h гомеоморфизм $H_0: B \rightarrow B'$, продолжающий h , где B и B' – запечатанные жордановы области с границами C и C' соответственно. Рассуждая так же, продолжаем H_0 до автогомеоморфизма H_1 одноточечной компактификации $\mathbb{R}^2 \cup 1 = \mathbb{S}^2$. Можно подправить H_1 на $\mathbb{R}^2 - B$ так, чтобы точка 1 осталась неподвижной. Тогда за требуемый H можно взять ограничение H_1 на $\mathbb{R}^2$.

ДАННЫЕ О ГРАФЕ. **Граф** – это топологическое пространство, гомеоморфное локально конечному 1-комплексу. Рассмотрим граф Γ , вложенный как замкнутое подмножество в топологическое 2-многообразие M без края.

ТЕОРЕМА О ЛОКАЛЬНОМ ВЫПРЯМЛЕНИИ ГРАФА (LGTT). *При указанных условиях возьмем любую точку P в Γ . Имеется ее окрестность U в M и вложение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которого образ $h(U \cap \Gamma)$ есть PL подмножество в $\mathbb{R}^2$.*

Вот три упражнения, которые ведут к (LGTT) от (ST).

(1) *Без потери общности можно считать, что Γ гомеоморфен конусу над $N \geq 1$ точками и что M есть $\mathbb{S}^2$.* (Это принимается для всей оставшейся части доказательства.)

(2) *Случай $N \leq 2$.*

ПОДСКАЗКА для (2). Пусть сначала N равно 1 или 2. Граф Γ тогда есть жорданова дуга в $\mathbb{R}^2$. отождествим $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{R}^2 \cup \infty$ с помощью гомеоморфизма и образуем 2-листное накрытие над $\mathbb{S}^2$, разветвленное в $\partial\Gamma$ – двух концевых точках. Применим там (ST) к накрывающей жордановой кривой – и рассмотрим фактор-отображение в $\mathbb{S}^2 \supset \mathbb{R}^2$.

(3) *Случай $N \geq 3$.*

ПОДСКАЗКА для (3). Действуем индукцией по N . Выберем жорданову дугу J в Γ , соединяющую любую пару из N различных концевых (т.е. неразбивающих) точек. Затем образуем 2-листное накрытие над $\mathbb{S}^2$, ветвящееся в двух концевых точках ∂J , и завершим индукцию, действуя в основном так же, как в (2).

Далее идут базисные теоремы единственности для PL-структур на 2-многообразиях. См. в [54] иные доказательства, также доступные студентам.

HAUPTVERMUTUNG для ПОВЕРХНОСТЕЙ (SH). *Рассмотрим произвольный топологический гомеоморфизм $g: M \rightarrow W$ для PL 2-многообразий. Пусть $A \subset M$ замкнуто и $B \subset M$ компактно. Допустим, что g PL вблизи A . Тогда существует другой гомеоморфизм $h: M \rightarrow W$, который PL вблизи $A \cup B$ и совпадает с g вблизи A и вне компактного подмножества M .*

HAUPTVERMUTUNG для ПОВЕРХНОСТЕЙ с АППРОКСИМАЦИЕЙ (SH+). Рассмотрим топологический гомеоморфизм $g: M \rightarrow W$ метрических PL 2-многообразий. Пусть g PL вблизи множества A , замкнутого в M , и пусть $\varepsilon: M \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная строго положительная непрерывная функция. Существует автогомеоморфизм $\gamma: M \rightarrow M$, неподвижный вблизи A и такой, что $g\gamma: M \rightarrow W$ есть PL гомеоморфизм, причем для всех точек x в M расстояние в M от x до $\gamma(x)$ будет $< \varepsilon(x)$.

Эти утверждения имеют смысл во всех размерностях (т.е. с любым целым $n > 0$ вместо 2) и они вместе известны как “Hauptvermutung для многообразий” (впервые в печати сформулированы Е. Штейнцем в 1907 г.). Однако они верны лишь для $n \leq 3$ (см. [53], [54]) или же с дополнительными условиями (см. [41] и [35]). См. [71] для других исторических замечаний и ссылок.

Доказательства являются довольно формальными следствиями следующих трех “лемм о ручках” $\mathfrak{H}(2; 0)$, $\mathfrak{H}(2; 1)$, $\mathfrak{H}(2; 2)$.

$\mathfrak{H}(2; k)$ ЛЕММА О РУЧКЕ РАЗМЕРНОСТИ 2 И ИНДЕКСА $k \leq 2$ (СР. [41]). *Hauptvermutung для поверхностей (SH) справедлив при следующих трех дополнительных условиях:*

- (i) $M = \mathbb{R}^2$ и W – открытые подмножества $\mathbb{R}^2$;
- (ii) замкнутое множество A есть $(\mathbb{R}^k - \text{Int } B^k) \times \mathbb{R}^{2-k}$;
- (iii) компактное множество B есть шар $B^k \times 0$ (который носит название *сердцевинки k -ручки*).

Условие (i) позволяет нам использовать в M и W наши результаты о жордановых областях.

Следующие упражнения дают очерк доказательств этих лемм, для которых нужно немного больше, чем (ST) и (PLST).

(А) ПОДСКАЗКА для $\mathfrak{H}(2; 0)$. Применить (ST+) в W к жордановой кривой $g(\partial B^2)$.

(В) ПОДСКАЗКА для $\mathfrak{H}(2; 2)$. Выберите $\lambda < 1$ столь близко к 1, что h еще PL на $(\mathbb{R}^2 - \lambda \partial B^2)$. Затем примените (PLST) ровно один раз к PL окружности $h(\mathbb{R}^2 - \lambda \partial B^2)$ в $W \subset \mathbb{R}^2$.

(С) ПОДСКАЗКА для $\mathfrak{H}(2; 1)$ – наиболее сложный случай.

В W примените (PLST) один раз и (ST) дважды, как показано на рис. 9-а, к трем смежным запечатанным жордановым областям. Ради удобства мы отождествили W с M_τ , где τ – это единственная структура PL-многообразия на M , в которой $h: M_\tau \rightarrow W$ оказывается PL-гомеоморфизмом. Две пограничные жордановы PL дуги на границе этой PL-запечатанной жордановой области даются легкой леммой о PL-хорде (PLCL) из § 8. Леммы о конической конструкции из раздела 7, в частности, PL- и топологическая версии леммы (2), могут помочь согласовать вложения, которые доставляются посредством (PLST) и (ST).

ЗАМЕЧАНИЯ. (1) Доказательство для индекса 0 в случае (А) могло бы симитировать случай (С), если использовать вместо (ST+) более простые утверждения (ST) и (PLST).

Рис. 9а

(2) Роль (ST) в приведенном доказательстве довольно слабая, так как встречающиеся жордановы кривые имеют двусторонний воротник (ср. [16], [42]). Поэтому, например, доказательство (ST) М. Брауном [18] при этих сильных условиях (оно имеет силу во всех размерностях) могло бы здесь заменить наше доказательство (ST).

(3) Некоторые классические доказательства (SH) используют не более чем (PLST), но они, как кажется, разделяют некоторые сложности нашего доказательства (ST).

(4) Теорема изотопии Александра [2], [4] показывает, что гомеоморфизм h , даваемый леммой $\mathfrak{H}(2, k)$, (топологически) изотопен g при неподвижных точках A и всех точках вне компактного множества в $\mathbb{R}^2$.

Мы откладываем указания к доказательству (SH), так как случай (SH+) представляется более интересным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для любого (замкнутого) симплекса σ симплициального комплекса $\mathcal{T}$ его **звезда** $St(\sigma)$ в $\mathcal{T}$ состоит из объединения всех (замкнутых) симплексов $\mathcal{T}$, которые содержат σ .

Доказательство (SH+). Пусть U – открытая окрестность A в M , на которой g является PL. Выберем PL-триангуляцию $\mathcal{T}$ для M , столь мелкую, что: (а) если симплекс в $\mathcal{T}$ пересекает A , то он лежит в U , (б) для любой вершины v в $\mathcal{T}$ диаметр ее звездной окрестности $St(v, \mathcal{T})$ в $\mathcal{T}$ меньше минимума ε на компактном множестве $St(v)$ и (с) некоторая открытая окрестность $g(St(v))$ в W служит PL-картой W в том смысле, что она допускает PL-вложение в $\mathbb{R}^2$.

Для каждой вершины v в $\mathcal{T}$ возьмем PL-отождествление с $\mathbb{R}^2$ ее малой окрестности $N(v) \subset St(v)$, соблюдая при этом дизъюнктность $N(v)$ для различных вершин v . Применим лемму $\mathfrak{H}(2; 0)$ в $N(v)$ и получим автогомеоморфизм γ_v окрестности $N(v)$ с компактным носителем в $N(v)$ такой, что композиция $g\gamma_v$ оказывается PL-вблизи v . Прodelывая это независимо для всех таких $N(v)$, мы получим автогомеоморфизм γ_0 всего M , причем композиция $h_0 = g\gamma_0: M \rightarrow W$ будет PL-вблизи всех вершин $\mathcal{T}$.

Далее, для каждого ребра e в $\mathcal{T}$, дизъюнктного от A , PL-отождествим с $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ малую открытую окрестность $N(e) \subset St(e)$ множества $e - \partial e$ в M таким образом, что: (а) $\mathbb{R}^1 \times 0$ отвечает $e - \partial e$, (б) гомеоморфизм h_0 PL-вблизи $(\mathbb{R}^1 - \text{Int } B^1) \times \mathbb{R}^1$ и (с) множества $N(e)$ дизъюнкты для различных ребер. Применим лемму $\mathfrak{H}(2; 1)$ в $N(e)$ и получим автогомеоморфизм γ_e в $N(e)$ с компактным носителем в $N(e)$ такой,

что композиция $h_e = h_0 \gamma_e$ будет PL-вблизи e . Прodelывая это независимо для всех таких $N(e)$, мы получим $\gamma_1: M \rightarrow M$ такой, что $h_1 = h_0 \gamma_1 = h \gamma_0 \gamma_1$ оказывается PL-вблизи всех вершин и ребер $\mathcal{T}$.

Наконец, для каждой грани (2-симплекса) f в $\mathcal{T}$, дизъюнктивной от A , положим $N(f) = f - \partial f$. PL отождествим ее с $\mathbb{R}^2$ так, чтобы h_1 было PL-близко к $\mathbb{R}^2 - \text{Int } B^2$. Множества $N(f)$ необходимо дизъюнктивны для различных f . Применим $\mathfrak{H}(2, 2)$ в $N(f)$ и получим автогомеоморфизм γ_f в $N(f)$ с компактным носителем $N(f)$, причем $g\gamma_f$ будет PL-вблизи f . Делая это независимо во всех $N(f)$, получим $\gamma_2: M \rightarrow M$ и $h_2 = h_1 \gamma_2$ оказывается PL на всех симплексах в $\mathcal{T}$, значит, всюду в M .

Заметим, что, по построению, $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ сохраняют звезду вершины $St(v)$ для каждой вершины v в $\mathcal{T}$. Значит, это верно и для композиции $\gamma = \gamma_2 \gamma_1 \gamma_0$, и тогда, в метрике d на M , $d(\gamma(x), x) < \varepsilon(x)$ для всех x . Доказательство закончено.

ПОДСКАЗКА ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА (SH). Провести предыдущее доказательство (SH+) с такими модификациями:

- (а) убрать условие аппроксимации – скажем, взяв за ε тождественно 1 и заменив метрику d на $d/1 + d$;
- (б) заменить $\mathcal{T}$ конечным подкомплексом (замкнутых) симплексов, которые пересекают компактное множество B .

Результирующий автогомеоморфизм γ в M тогда имеет компактный носитель, так как он есть конечная композиция гомеоморфизмов с компактными носителями. Требуемый h есть композиция $h = g\gamma$.

УПРАЖНЕНИЕ. Вывести (SH) из (SH+).

УПРАЖНЕНИЕ. Используя замечание (4) после леммы $\mathfrak{H}(2, k)$, установить версии (SH) и (SH+) с изотопиями.

ТЕОРЕМА О ТРИАНГУЛЯЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ (STT) – см. [64], 1925 г. (Это доказательство имеет силу и для не метризуемых многообразий.) *Рассмотрим произвольное топологическое 2-многообразие M без края. Всегда имеется PL структура τ на M . Более того, если σ – уже данная PL структура на открытом подмножестве U в M , то τ можно взять совпадающей с σ на U .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (STT). Лемма Порна, очевидно, применима к частично упорядоченному множеству всех пар (V, α) , состоящему из открытых подмножеств V в M и PL-структур α на V – порядок задается тождественным PL-вложением. Значит, существует максимальная пара (V, τ) , содержащая $(U; \sigma)$. Рассуждая от противного, допустим, что V не есть все M ; возьмем точку x в $M - V$ и ее открытую окрестность W в M , гомеоморфную $\mathbb{R}^2$; используем гомеоморфизм, чтобы снабдить W PL структурой β . Пусть $\varepsilon: W \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, положительная на $W \cap V$ и нулевая всюду вне W . Тогда (SH+) дает PL гомеоморфизм $f: (W \cap V)_\beta \rightarrow (W \cap V)_\tau$, который ε -близок к тождественному отображению $W \cap V$ и, значит, продолжается тождеством до PL-изоморфизма $g: W_\beta \rightarrow W_{g(\tau)}$. Теперь $g(\beta)$ и τ согласуются на $(W \cap V)$ и поэтому определяют PL-структуру на $(W \cup V)$, показывая, что (V, τ) не максимальна – противоречие, доказывающее (SH+).

ЗАМЕЧАНИЯ О КРАЕ И ВЛОЖЕННЫХ ГРАФАХ.

- (a) В этом разделе мы обращали мало или не обращали совсем никакого внимания на 2-многообразия с непустым краем. Однако аналогичные результаты для них легко могут быть *выведены* с помощью теоремы М. Брауна о воротнике [15], [42; App. A of Essay I].
- (b) Подобным образом, можно вывести версии (STT) и (SH) для пар (M, Γ) с графами Γ , введенных для (LGTT). Действительно, с помощью (LGTT) можно приспособить теоремы М. Брауна о воротнике к слегка более общему понятию воротника для Γ в M . Это распространение (STT) и (SH) значительно облегчается, если потратить время, чтобы сначала показать, что имеется естественная конструкция 2-многообразия с краем M_Γ такого, что $\text{Int } M_\Gamma = M - \Gamma$ и M_Γ естественно отображается на M , переводя ∂M_Γ на Γ , притом, в случае, если Γ есть 1-многообразие, это – погружение. Для PL-пар (M, Γ) такие M_Γ хорошо известны и называются **расщеплением M по Γ** ; эта конструкция в терминах PL-триангуляции (M, Γ) очевидна. Для данного M_Γ релевантные (обобщенные) воротники Γ в M находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с обычными воротниками для ∂M_Γ в M_Γ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. W. Alexander. A proof of Jordan's theorem about a simply closed curve // Ann. Math. (2). 1920. V. 21. P. 180–184.
- [2] J. W. Alexander. Remarks on a point set constructed by Antoine // Nat. Acad. Proc. 1924. V. 10. P. 1–2.
- [3] J. W. Alexander. An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected // Nat. Acad. Proc. 1924. V. 10. P. 8–10.
- [4] J. W. Alexander. On the deformation of an n -cell // Bull. Amer. Math. Soc. 1924. V. 30. P. 10.
- [5] P. S. Alexandroff. Die Topologie in und um Holland in der Jahren 1920–1930 // Nieuw Arch. Wisk. 1969. V. 17. №3. P. 109–127.
- [6] L. Antoine. Sur l'homéomorphie de deux figures et de leur voisinages // J. Math. 1921. V. 8. P. 221–325.
- [7] L. Antoine. Sur les voisinages de deux figures homéomorphes // Fund. Math. 1924. V. 5. P. 265–287.
- [8] M. Barge, K. Kuperberg. Periodic points from periodic prime ends // Topology Proc. 1998. V. 23. №Spring. P. 13–21.
- [9] R. H. Bing. Complementary domains of continuous curves // Fund. Math. 1949. V. 36. P. 303–318.
- [10] R. H. Bing. Approximating surfaces with polyhedral ones // Ann. of Math. (2). 1957. V. 65. P. 465–483.
- [11] R. H. Bing. Conditions under which a surface in E^3 is tame // Fund. Math. 1959. V. 47. P. 105–139.
- [12] R. H. Bing. A surface is tame if its complement is 1-ULC // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 101. P. 294–305.
- [13] R. H. Bing. The geometric Topology of 3-Manifolds. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1983. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. V. 40.).
- [14] B. Brechner, M. Brown. Mapping cylinder neighborhoods in the plane // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. V. 84. №3. P. 433–436.
- [15] L. E. J. Brouwer. Beweis des Jordanschen Kurvensatzes // Math. Ann. 1910. V. 69. P. 169–175.

- [16] L. E. J. Brouwer. Zur Invarianz des n -dimensionalen Gebiets // Math. Ann. 1912. V. 72. P. 55–56.
- [17] M. Brown. A proof of the generalized Schoenflies theorem // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. P. 74–76.
- [18] M. Brown. Locally flat imbeddings of topological manifolds // Ann. of Math. (2). 1962. V. 75. P. 331–341.
- [19] S. S. Cairns S. S.. An elementary proof of the Jordan–Schoenflies theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1951. V. 2. P. 860–867.
- [20] C. Carathéodory. Zur Ränderzuordnung bei konformer Abbildung // Gött. Nachr. 1913. P. 509–518.
- [21] C. Carathéodory. Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis // Math. Ann. 1913. V. 73. P. 305–320.
- [22] C. Carathéodory. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete // Math. Ann. 1913. V. 73. P. 323–370.
- [23] T. A. Chapman. Shapes of finite-dimensional compacta // Fund. Math. 1972. V. 76. № 3. P. 261–276.
- [24] А. В. Чернавский. Совпадение локальной плоскостности и локальной односвязности для вложений $(n - 1)$ -мерных многообразий в n -мерные при $n > 4$ // Матем. сб. 1973. Т. 91. № 2. С. 279–286.
- [25] R. Courant. Über die Existenztheoreme der Potential- und Funktionentheorie // J. Math. 1914. V. 144. P. 190–211.
- [26] R. J. Daverman. Locally nice codimension one manifolds are locally flat // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. V. 79. P. 410–413.
- [27] R. J. Daverman. Decompositions of Manifolds. Orlando, FL: Academic Press, 1986. (Pure Appl. Math. V. 124.).
- [28] A. Dold. Lectures on Algebraic Topology. Berlin: Springer-Verlag, 1972. Reprinted 1995; Рус. пер.: А. Дональд. Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир, 1976.
- [29] A. Dold. A simple proof of the Jordan–Alexander complement theorem // Amer. Math. Monthly. 1993. V. 100. P. 856–857.
- [30] M. Dostál, R. Tindell. The Jordan curve theorem revisited // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1978. V. 80. P. 111–128.
- [31] J. Dugundji. Topology. Boston: Allyn and Bacon, 1966. Reprinted 1978.
- [32] D. B. A. Epstein. Pointwise periodic homeomorphisms // Proc. London Math. Soc. (3). 1981. V. 42. № 3. P. 415–460.
- [33] M. H. Freedman, F. Quinn. Topology of 4-manifolds. Princeton: Princeton Univ. Press 1990. (Princeton Math. Ser. № 39.).
- [34] H. Guggenheimer. The Jordan curve theorem and an unpublished manuscript by Max Dehn // Arch. Hist. Exact Sci. 1977. V. 17. P. 193–200.
- [35] D. W. Hall, G. L. Spencer. Elementary Topology. New York/London: Wiley/Chapman & Hall, 1955.
- [36] M. W. Hirsch. Differential topology, (Grad. Texts in Math., V. 33). New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1976, 1994.
- [37] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 1868–1942. Печатное издание дополняется с 2000 года электронной версией, адрес которой в настоящее время такой: www.emis.de/projects/JFM/JFM.html.
- [38] C. Jordan. Recherches sur les polyèdres. I, II // J. Reine Angew. Math. 1866. V. 66. P. 22–72; // ibid. 68. P. 297–349.
- [39] C. Jordan. Cours d'analyse de l'École Polytechnique. Т. III: Calcul Intégrale. Paris: Gauthier-Villars 1887. Теорема Жордана, именуемая у нас в разделе 3 (JCT), впервые появилась на с. 587–594 в дополнительном параграфе под названием “Note”. По существу то же изложение (JCT) находится в томе I (не в III) нескольких более поздних изданий (1933 и след.).
- [40] Л. В. Келдыш. Топологические вложения в евклидово пространство // Труды МИАН. 1966. Т. 81.

- [41] R. C. Kirby, L. C. Siebenmann. On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. V. 75. P. 742–749.
- [42] R. C. Kirby, L. C. Siebenmann. Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1977. (Ann. of Math. Stud., V. 88.).
- [43] P. Koebe. Ränderzuordnung bei konformer Abbildung // Gött. Nachr. 1913. P. 286–288.
- [44] P. Koebe. Das Uniformisierungstheorem und seine Bedeutung für Funktionentheorie und nichteuklidische Geometrie // Annali di Mat. (3). 1913. V. 21. P. 57–64.
- [45] P. Koebe. Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung: I. Die Kreisabbildung des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung // J. für Math. 1915. V. 145. P. 177–225.
- [46] C. Kuratowski. Topologie. II. Espaces compacts, espaces connexes, plan eucliden. Warszawa-Wrocław: Seminarium Matematyczne Uniwersytetu., 1950. (Monografie Matematyczne T. 21.).
- [47] F. Latour. Double suspension d'une sphère d'homologie [d'après R. Edwards] // Lecture Notes in Math. 1979. V. 710. P. 169–186.
- [48] J. N. Mather. Area preserving twist homeomorphism of the annulus // Comment. Math. Helv. 1979. V. 54. P. 397–404.
- [49] J. N. Mather. Topological proofs of some purely topological consequences of Carathéodory's theory of prime ends // Selected Studies: Physics–astrophysics, Mathematics, History of Science. Amsterdam–New York: North-Holland, 1982. P. 225–255.
- [50] B. Mazur. On embeddings of spheres // Acta Math. 1961. V. 105. № 1. P. 1–17.
- [51] J. W. Milnor. Topology from the Differentiable Viewpoint. Charlottesville: Univ. of Virginia Press, 1965; Princeton: Princeton Univ. Press, 1997 (revised).
- [52] B. Mohar, C. Thomassen. Graphs on Surfaces. Baltimore: Johns Hopkins Univ. Press, 2001.
- [53] E. E. Moise. Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung // Ann. of Math. (2). 1952. V. 56. P. 96–114.
- [54] E. E. Moise. Geometric topology in dimensions 2 and 3. New York–Heidelberg: Springer-Verlag, 1977. (Graduate Texts in Math. V. 47.).
- [55] R. L. Moore. Conditions under which one of two given closed linear point sets may be thrown into the other one by a continuous transformation of a plane into itself // Amer. J. 1926. V. 48. P. 67–72.
- [56] R. L. Moore. Foundations of point set theory. New York: Amer. Math. Soc., 1932. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. V. 13).
- [57] M. H. A. Newman. Elements of the Topology of Plane Sets of Points. Cambridge: University Press, 1st edition 1939, 2nd edition 1951, reprinted 1954, 1961. (Отметим, что только редкое издание 1939 года содержит цитированное в [49] обсуждение простых концов.).
- [58] W. F. Osgood. On the existence of the Green's function for the most general simply connected plane region // Trans. Amer. Math. Soc. 1900. V. 1. P. 310–314.
- [59] W. F. Osgood. A Jordan curve of positive area // Trans. Amer. Math. Soc. 1903. V. 4. P. 107–112.
- [60] W. F. Osgood. On the transformation of the boundary in the case of conformal mapping // Bull. Amer. Math. Soc. (2). 1902. V. 9. P. 233–235.
- [61] W. F. Osgood, E. H. Taylor. Conformal transformations on the boundaries of their regions of definition // Trans. Amer. Math. Soc. 1913. V. 14. P. 277–298.
- [62] T. M. Price, C. L. Seebeck III. Somewhere locally flat codimension one manifolds with 1-ULC complements are locally flat // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 193. P. 111–122.
- [63] F. Quinn. Lectures on controlled topology: mapping cylinder neighborhoods // Topology of high-dimensional manifolds. № 1, 2. Trieste: Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, 2002. (ICTP Lect. Notes. V. 9.). P. 461–489. (<http://www.ictp.trieste.it>).
- [64] T. Radó. Über den Begriff der Riemannschen Fläche // Acta Szeged. 1925. V. 2. P. 101–121.

- [65] C. P. Rourke, B. J. Sanderson. Introduction to piecewise-linear topology. New York: Springer-Verlag, 1972. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, V. 69.).
- [66] A. Schoenflies. Ueber einen Satz aus der Analysis situs // Gött. Nachr. 1896. P. 7–9.
- [67] A. Schoenflies. Ueber einen Satz aus der Analysis situs // Gött. Nachr. 1899. P. 282–290.
- [68] A. Schoenflies. Über einen grundlegenden Satz der Analysis situs // Gött. Nachr. 1902. P. 185–192.
- [69] A. Schoenflies. Beiträge zur Theorie der Punktmengen. III // Math. Ann. 1906. V. 62. P. 286–328.
- [70] A. Schoenflies. Bemerkungen zu den Beweisen von C. Jordan und Ch. J. de la Vallée-Poussin // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1924. V. 33. P. 157–160.
- [71] L. C. Siebenmann. Topological manifolds // Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970). V. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1971. P. 133–163.
- [72] E. Study. Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. Zweites Heft. Herausgegeben unter Mitwirkung von W. Blaschke “Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche”. Leipzig–Berlin: Teubner, 1913.
- [73] H. Tietze. Sur les représentations continues des surfaces sur elles-mêmes // Acad. Sci. Paris. 1913. V. 157. P. 509–512.
- [74] H. Tietze. Über stetige Abbildungen einer Quadratfläche auf sich selbst // Rend. Mat. Palermo. 1914. V. 38. P. 247–304.
- [75] H. Tietze. Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind // J. für Math. 1914. V. 145. P. 9–14.
- [76] T. tom Dieck. Topologie. Berlin: de Gruyter, 1991 and 2000.
- [77] P. Urysohn. Über ein Problem von Herrn C. Carathéodory // Fund. Math. 1924. V. 6. P. 229–235.
- [78] P. Urysohn. Sur les points accessibles des ensembles fermés // Proc. Akad. Wiss. Amsterdam. 1925. V. 94. P. 984–993.
- [79] P. Urysohn. Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen // Math. Ann. 1925. V. 94. P. 262–295.
- [80] P. Urysohn. Mémoire sur les multiplicités Cantoriniennes. III: Les lignes Cantoriniennes // Verhandelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Amsterdam. 1 sectie. 1928. V. 13. № 4. Рус. пер. см. в [81].
- [81] П. С. Урысон. Труды по топологии и другим областям математики. Т. 2. М.–Л.: Гостехиздат, 1951.
- [82] O. Veblen. Theory of plane curves in non-metrical analysis situs // Trans. Amer. Math. Soc. 1905. V. 6. P. 83–98.
- [83] B. von Kerékjártó. Vorlesungen über Topologie. I: Flächentopologie. Berlin: Springer (Grundlehren Math. Wiss. V. 8), 1923.
- [84] G. T. Whyburn. Analytic Topology. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1942, 1948, 1963. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. V. 28.).
- [85] G. T. Whyburn. Topological Analysis. Princeton: Princeton Univ. Press, 1964. (Princeton Math. Ser. V. 23.).
- [86] G. T. Whyburn, E. Duda. Dynamic Topology. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1979.
- [87] R. L. Wilder. Topology of Manifolds. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1949, 1963, 1979. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. V. 32.).
- [88] L. Zippin. On continuous curves and the Jordan curve theorem // Amer. J. Math. 1930. V. 52. P. 331–350.

Université de Paris-Sud, France

E-mail: <http://topo.math.u-psud.fr/~lcs/contact>

Поступила в редакцию

11.05.2005