Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Чобан, О некоторых вопросах дескриптивной теории множеств в топологических пространствах, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 4, 123–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1447>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:41:42

УДК 515.128+515.12

К столетию со дня рождения Л. В. Келдыш

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ДЕСКРИПТИВНОЙ ТЕОРИИ
МНОЖЕСТВ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. М. ЧОБАН

Вопросы о структуре борелевских множеств, об их классификации и о сохранении определенных свойств множеств при заданных типах отображений возникли в первой половине прошлого столетия в работах А. Лебега, Р. Бэра, Н. Н. Лузина, П. С. Александрова, П. С. Урысона, П. С. Новикова, Л. В. Келдыш, А. А. Ляпунова и породили многие исследования. В данной статье получены некоторые результаты, связанные с вопросами Ф. Хаусдорфа, Н. Н. Лузина, П. С. Александрова, П. С. Урысона, М. Катетова, А. Стоуна.

В 1934 г. Хаусдорфом был поставлен вопрос о сохранении свойства быть абсолютным B -множеством (т.е. борелевским множеством некоторого полного сепарабельного метрического пространства) при открытых непрерывных отображениях. В силу одной теоремы Л. В. Келдыш в общем случае ответ на этот вопрос отрицателен. В настоящей работе приведены дополнительные условия, при которых ответ на вопрос Хаусдорфа положителен.

В работе рассматриваются и некоторые общие вопросы теории операций над множествами.

Библиография: 56 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	124
2. Операции над множествами	125
3. Бэровские пространства	127
4. Общая характеристика A -множеств	128
5. Абсолютные Ψ -множества	130
6. Абсолютные A_S -множества	131
7. Ядра отображений	132
8. Проблема Хаусдорфа об открытых отображениях. Общий случай ..	133
9. Проблема Хаусдорфа. Случай равномерно полных отображений	135
10. Проблема Хаусдорфа. Случай счетнократных отображений	137
11. Проблема Хаусдорфа. Случай изолированных отображений	138
12. О строении подмножеств в некоторых пространствах	139
Список литературы	142

1. Введение

Одним из важных направлений дескриптивной теории множеств является изучение зависимости между топологическим строением множеств и операциями, при помощи которых они построены, отправляясь от множеств более простой природы.

Дескриптивная теория множеств и функций родилась в трудах знаменитых французских математиков Э. Бореля, А. Лебега и Р. Бэра на рубеже 19 и 20 столетий (см. [5], [23], [32], [37], [38], [42], [44], [55], [6], [7], [17], [19], [34], [35], [36], [49]). Общая теория операций над множествами была построена в работах П. С. Александрова, Ф. Хаусдорфа, А. Н. Колмогорова, Л. В. Канторовича и Е. М. Ливенсона (см. [5], [38], [42], [44], [13], [49]). В работах Н. Н. Лузина, П. С. Александрова, Ф. Хаусдорфа, В. Серпинского, К. Куратовского, М. Суслина, Ш.-Ж. Валле-Пуссена, А. Н. Колмогорова, Л. В. Канторовича, Е. М. Ливенсона, П. С. Новикова, Л. В. Келдыш, А. Д. Тайманова, А. А. Ляпунова была разработана структурная теория B -множеств, благодаря которой классическая дескриптивная теория множеств приняла в целом законченный вид.

Начиная с 30-х годов минувшего столетия дескриптивная теория множеств стала развиваться в следующих направлениях.

1. Теория операций над множествами.
2. Аксиоматическая дескриптивная теория множеств.
3. Дескриптивная теория множеств в общих пространствах.
4. Приложения дескриптивной теории множеств.

Отдельные достижения дескриптивной теории множеств в этих направлениях отражены в работах [5], [23], [37], [38], [42], [44], [55], [13], [7], [19], [21], [34], [49].

Основное содержание настоящей работы связано с решением Л. В. Келдыш [33] проблемы Ф. Хаусдорфа [20] о сохранении классов борелевских множеств при открытых непрерывных отображениях. Нами не только усилен этот результат, но и указаны некоторые ограничения, при которых проблема Хаусдорфа имеет положительное решение.

В работе рассматриваются и другие вопросы, связанные с решением проблем Н. Н. Лузина, П. С. Александрова, П. С. Урысона, А. Стоуна, М. Катетова, З. Фролика.

В работе используются следующие обозначения.

1. Через $\text{cl}_X A$ или $\text{cl } A$ обозначается замыкание множества A в пространстве X .
2. Мощность множества A обозначается через $|A|$.
3. На множестве $N = \{1, 2, \dots\}$ рассматривается только дискретная топология. Через $\mathbb{R}$ обозначается пространство действительных чисел, $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.
4. Через $w(X)$ обозначается вес пространства X .
5. Если τ является кардинальным числом, то через τ^+ обозначается первый кардинал больше τ .

Кардинальное число τ отождествляется с первым ординалом мощности τ .

Пусть ω есть первое бесконечное ординальное число, а ω_1 есть первое несчетное ординальное число.

6. Применяется терминология из [13], [15], [20], [34]. Каждое пространство предполагается вполне регулярным T_2 -пространством.

2. Операции над множествами

Для всякого кардинального числа τ через J_τ обозначим некоторое множество мощности τ , вполне упорядоченное по всем порядковым числам мощности меньше τ . Кардинальное число τ отождествляется с первым порядковым числом мощности τ .

Множество J_τ называется пространством индексов.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. τ -операцией называется всякая функция Ψ , ставящая в соответствие каждой таблице $\{E_\alpha : \alpha \in J_\tau\}$ подмножеств заданного множества Z некоторое подмножество $E \subseteq Z$. В этом случае пишем $\Psi\{E_\alpha\} = E$, а E называется результатом операции Ψ над таблицей $\{E_\alpha\}$ относительно множества Z .

Две τ -операции Ψ, Φ равны, если $\Psi\{E_\alpha\} = \Phi\{E_\alpha\}$ для любой таблицы подмножеств $\{E_\alpha\}$ произвольного множества Z .

Для любого семейства $\mathcal{L}$ подмножеств множества Z и τ -операции Ψ через $\Psi(\mathcal{L})$ обозначим совокупность всех результатов операции Ψ над таблицами вида $\{E_\alpha : \alpha \in J_\tau\} \subseteq \mathcal{L}$. Две операции Ψ и Φ эквивалентны (обозначение: $\Psi \sim \Phi$), если $\Psi(\mathcal{L}) = \Phi(\mathcal{L})$ для любого семейства подмножеств $\mathcal{L}$.

Равные операции эквивалентны. Мы будем отождествлять эквивалентные операции.

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. τ -операция Ψ называется:

- а) положительной, если из $H_\alpha \subseteq E_\alpha$ для всех $\alpha \in J_\tau$ вытекает $\Psi\{H_\alpha\} \subseteq \Psi\{E_\alpha\}$;
- б) экстенсивной, если $\mathcal{L} \subseteq \Psi(\mathcal{L})$ для всякого семейства подмножеств $\mathcal{L}$;
- в) нормальной, если $\mathcal{L} \subseteq \Psi(\Psi(\mathcal{L})) \subseteq \Psi(\mathcal{L})$ для всякого семейства подмножеств $\mathcal{L}$.

Операция Ψ сильнее операции Φ (обозначение: $\Phi \leq \Psi$), если $\Phi(\mathcal{L}) \subseteq \Psi(\mathcal{L})$ для всякого семейства подмножеств $\mathcal{L}$.

Всякое подмножество множества J_τ называется τ -цепью. Любое множество τ -цепей будем называть τ -базой.

С τ -базой S можно связать следующие операции над множествами:

$$\begin{aligned}\Psi_S\{E_\alpha\} &= \bigcup \left\{ \left(\bigcap \{E_\alpha : \alpha \in \xi\} \right) \cap \left(\bigcap \{Z \setminus E_\beta : \beta \notin \xi\} \right) : \xi \in S \right\}, \\ \Phi_S\{E_\alpha\} &= \bigcup \left\{ \bigcap \{E_\alpha : \alpha \in \xi\} : \xi \in S \right\}.\end{aligned}$$

При этом если $\xi = \emptyset$, то $\bigcap \{E_\alpha : \alpha \in \xi\} = Z$ для любой таблицы $\{E_\alpha\}$ подмножеств множества Z .

Операция Ψ_S называется τ -st-операцией, а операция Φ_S называется τ -ds-операцией.

Положительная τ -st-операция эквивалентна τ -ds-операции.

Если $m < \tau$, то всякая m -st-операция эквивалентна τ -st-операции.

База S называется полной, если из $\xi \subseteq \eta$ и $\xi \in S$ следует $\eta \in S$. Если база S полная, то $\Phi_S = \Psi_S$. Поэтому τ -ds-операция равна τ -st-операции.

Для каждой τ -операции Ψ можно построить дополнительную τ -операцию Ψ^c , где $\Psi^c\{E_\alpha\} = Z \setminus \Psi\{Z \setminus E_\alpha\}$. Если S является τ -базой и $S^c = \{\mu \in J_\tau : J_\tau \setminus \mu \notin S\}$, то $(\Psi_S)^c = \Psi_{S^c}$ и $(\Phi_S)^c = \Phi_{S^c}$.

2.3. ПРИМЕРЫ. 1. Пусть $m \leq \tau$. Обозначим через P^m операцию пересечения не более m множеств. База τ - δ -операции P^m состоит из одной цепи мощности m .

2. Пусть $m \leq \tau$. Обозначим через S^m операцию объединения не более m множеств. База τ - δ -операции S^m состоит из m одноэлементных цепей.

3. Пусть $T_\beta = \Phi_{\{\beta\}}$. Тогда $T_\beta\{E_\alpha\} = E_\beta$ и T_β называется тривиальной τ -операцией. Все тривиальные операции эквивалентны.

4. Через C_β обозначим τ - st -операцию с базой $\{\xi \subseteq J_\tau : \beta \notin \xi\}$. Имеем $C_\beta\{E_\alpha\} = Z \setminus E_\beta$. Операция C_β называется операцией взятия дополнения.

5. Положим $\Psi\{E_\alpha\} = \bigcap\{E_\alpha : \alpha \in J_\tau\}$, если хотя бы одно из множеств E_α конечно, и $\Psi\{E_\alpha\} = \bigcup\{E_\alpha : \alpha \in J_\tau\}$, если все множества E_α бесконечны. Операция Ψ экстенсивна, положительна и нормальна, но не является τ - st -операцией.

Операции P^m и S^m взаимно дополнительные при соответствующем выборе баз.

Пусть τ^+ есть первое бесконечное кардинальное число, следующее за τ .

С τ -операцией Ψ и семейством подмножеств $\mathcal{L}$ множества Z можно связать трансфинитную последовательность семейств $\{\Psi_\alpha(\mathcal{L}) : \alpha < \tau^+\}$, где $\Psi_0(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$, $\Psi_\alpha(\mathcal{L}) = \Psi(\bigcup\{\Psi_\beta(\mathcal{L}) : \beta < \alpha\})$, если α четно, и $\Psi_\alpha(\mathcal{L}) = \Psi^c(\bigcap\{\Psi_\beta(\mathcal{L}) : \beta < \alpha\})$, если α нечетно.

Пусть X – топологическое пространство. Обозначим через $\mathcal{F}(X)$ совокупность всех замкнутых подмножеств пространства X , через $\mathcal{U}(X)$ – совокупность всех открытых подмножеств пространства X , $L(X) = \{F \cap U : F \in \mathcal{F}(X), U \in \mathcal{U}(X)\}$ и $Z(X) = \{f^{-1}(0) : f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ есть непрерывная функция}\}$. Множества из $L(X)$ называются L -множествами или локально замкнутыми множествами пространства X . Множества из $Z(X)$ называются нуль-множествами пространства X .

Пересечение счетного семейства L -множеств называется L_δ -множеством.

τ -операция Ψ порождает на пространстве X следующие семейства:

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha(X) &= \Psi_\alpha(\mathcal{F}(X)), & \Psi_\alpha(X, \mathcal{U}) &= \{X \setminus H : H \in \Psi_\alpha(X)\} = \Psi_\alpha^c(\mathcal{U}(X)), \\ \Psi_\alpha(X, L) &= \Psi_\alpha(L(X)), & \Psi_\alpha(X, Z) &= \Psi_\alpha(Z(X)),\end{aligned}$$

где $0 \leq \alpha < \tau^+$.

Положим

$$\begin{aligned}r(\Psi, X) &= \bigcup\{\Psi_\alpha(X) : \alpha < \tau^+\}, \\ a(\Psi, X) &= \bigcup\{\Psi_\alpha(X, L) : \alpha < \tau^+\}, \\ b(\Psi, X) &= \bigcup\{\Psi_\alpha(X, Z) : \alpha < \tau^+\}.\end{aligned}$$

Тогда $r(\Psi, X)$ называется Ψ -кольцом подмножеств пространства X , $a(\Psi, X)$ называется Ψ -алгеброй подмножеств пространства X .

Если $\tau = \aleph_0$, то $\delta = P^\tau$, $\sigma = S^\tau$, $\mathcal{F}_\alpha(X) = \sigma_\alpha(X)$, $\mathcal{U}_\alpha(X) = \delta_\alpha(X, \mathcal{U})$, $B_\alpha(X) = \sigma_\alpha(X, L)$, $Ba_\alpha(X) = \sigma_\alpha(X, Z)$, $Bo(X) = a(\delta, X) = a(\sigma, X)$ есть σ -алгебра борелевских множеств, $Bo^*(X) = r(\delta, X) = r(\sigma, X) = \bigcup\{\mathcal{F}_\alpha(X) : \alpha < \omega_1\}$ есть кольцо борелевских множеств и $Ba(X) = b(\delta, X) = b(\sigma, X)$ есть σ -алгебра бэровских множеств пространства X .

Всегда $Ba(X) \subseteq Bo^*(X) \subseteq Bo(X)$.

Следующие включения равносильны:

- 1) $Bo^*(X) \subseteq Ba(X)$;
- 2) $Bo(X) \subseteq Ba(X)$;
- 3) $Ba(X) = Bo^*(X) = Bo(X)$.

Если пространство X совершенно нормально, то $Ba(X) = Bo(X)$.

2.4. ВОПРОС (М. Катетов, см. [18]). Является ли совершенно нормальным нормальное пространство X , для которого $Ba(X) = Bo(X)$?

Ответ на вопрос М. Катетова положителен, если пространство X допускает такое непрерывное отображение $g: X \rightarrow Y$ на некоторое метрическое пространство, что все прообразы $g^{-1}(y)$ псевдокомпактны и множество $g(H)$ замкнуто в Y , как только $H \in Z(X)$. В общем случае ответ неизвестен.

3. Бэровские пространства

Рассмотрим кардинальные числа τ и m . Предположим, что число m бесконечно. На множестве J_τ рассмотрим дискретную топологию.

Для каждого $\alpha \in J_m$ положим $J_{\tau\alpha} = J_\tau$. Рассмотрим множество $B(\tau, m) = \prod\{J_{\tau\alpha} : \alpha \in J_m\}$. Если $\xi = (\xi_\alpha : \alpha \in J_m) \in B(\tau, m)$ и $\beta \in J_m$, то $\xi|\beta = (\xi_\alpha : \alpha < \beta)$ является кортежем длины β . Для каждого кортежа $k = (\xi_\alpha : \alpha < \beta)$ длины $\beta < m$ положим $\delta(k) = \{\eta \in B(\tau, m) : \eta|\beta = k\}$. Множества вида $\delta(k)$ образуют базу пространства $B(\tau, m)$ и называются бэровскими интервалами. Пространство $B(\tau, m)$ называется бэровским пространством ширины τ , глубины m и веса $\tau^{<m} = \sum\{\tau^n : n < m\}$. Если $m = \aleph_0$, то положим $B(\tau) = B(\tau, m)$.

По построению:

- пространство $B(1)$ одноточечно;
- если $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$, то $B(n)$ есть канторово совершенное множество;
- пространство $B(\omega) = B(\aleph_0)$ гомеоморфно пространству иррациональных чисел $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;
- $B(\tau)$ есть полное метризуемое пространство;
- $B(\tau, m)$ есть наследственно паракомпактное нульмерное пространство.

Обозначим через $K(\tau, m)$ совокупность всех кортежей длины меньше m . Тогда $|K(\tau, m)| = \tau^{<m}$.

Если $S \subseteq B(\tau, m)$, то для каждой (τ, m) -таблицы множеств $\{E_k : k \in K(\tau, m)\}$ положим

$$A_S\{E_k\} = \bigcup\{\bigcap\{E_{\xi|\beta} : \beta < m\} : \xi \in S\}.$$

Операция A_S является $\tau^{<m}$ - δs -операцией типа A -операции.

Операция (τ, m) - $A = A_{B(\tau, m)}$ называется (τ, m) - A -операцией. Операция τ - $A = (\tau, \aleph_0)$ - A называется τ - A -операцией. Операция $A = \aleph_0$ - A называется A -операцией.

A -операция была введена П. С. Александровым [1], τ - A -операция – А. Стоуном [51] и (τ, τ) - A -операция – Ю. С. Очаном [43].

3.1. ТЕОРЕМА. Пусть $S \subseteq B(\tau, m)$, $\tau^{<m} = \tau$ и существует замкнутое подмножество $H \subseteq S$, которое непрерывно отображается на S^m . Тогда операция A_S нормальна.

Нормальность операции (τ, τ) - A была установлена Ю. С. Очаном, а нормальность операции τ - A доказана А. Стоуном.

3.2. ТЕОРЕМА. Пусть X является нормальным счетнокомпактным пространством, $\{L_n \in A(X) : n \in \mathbb{N}\}$ и $\bigcap\{L_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Существует непрерывное отображение $g: X \rightarrow Y$ на метризуемый компакт Y такое, что $\bigcap \{g(L_m) : m \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ и $g(L_m) \in A(Y)$ для всех $m \in \mathbb{N}$.
2. Существует последовательность бэровских подмножеств $\{H_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq Ba(X)$ таких, что $\bigcap \{H_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ и $L_m \subseteq H_m$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существуют такие замкнутые в X множества $\{E_{n_1 \dots n_k}^m : m, k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$, что $L_m = A\{E_{n_1 \dots n_k}^m\}$ для каждого $m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим минимальное семейство $\mathcal{L}$ замкнутых подмножеств пространства X , для которого:

- $E_{n_1 \dots n_k}^m \in \mathcal{L}$ для всех $m, k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$;
- если $L, H \in \mathcal{L}$, то $L \cap H \in \mathcal{L}$.

Можно считать, что $E_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}^m \subseteq E_{n_1 \dots n_k}^m$ для всех $m, n_1, \dots, n_{k+1} \in \mathbb{N}$.

Семейство $\mathcal{L}$ счетно. Пусть $\{(H_n, P_n) : n \in \mathbb{N}\}$ состоит из всех пар множеств (H, P) , где $H, P \in \mathcal{L}$ и $H \cap P = \emptyset$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует непрерывная функция $g_n: X \rightarrow [0, 1]$ такая, что $H_n \subseteq g_n^{-1}(0)$ и $P_n \subseteq g_n^{-1}(1)$.

Пусть $g: X \rightarrow Y$ есть непрерывное отображение такое, что $Y = g(X) \subseteq [0, 1]^{\mathbb{N}}$ и $g(x) = (g_n(x) : n \in \mathbb{N})$ для каждой точки $x \in X$.

Множества $g(E_{n_1 \dots n_k}^m)$ замкнуты в Y и $g(L_m) = A\{g(E_{n_1 \dots n_k}^m)\}$. Легко доказать, что $\bigcap \{g(L_m) : m \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Утверждение 1 доказано. Утверждение 2 следует из утверждения 1 и известной теоремы П. С. Новикова [42] о кратной отделимости.

3.3. ТЕОРЕМА. Пусть $f: X \rightarrow Y$ есть непрерывное отображение псевдокомпакта X на несчетное метризуемое пространство Y . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. $A(X) \setminus Ba(X) \neq \emptyset$.
2. Существует $L \in A(X)$ такое, что $X \setminus L \notin A(X)$.
3. $\sigma_\alpha(Z(X)) \setminus \bigcup \{\sigma_\beta(Z(X)) : \beta < \alpha\} \neq \emptyset$ для каждого $\alpha > 0$.

Теорема 3.3 установлена в [46], [53]. Для случая несчетного совершенно нормального компакта утверждение 1 было доказано А. В. Чернавским [8], а утверждение 3 – В. И. Пономаревым [48].

3.4. ПРОБЛЕМА (Р. Д. Маулдин, см. [49; проблема 12]). Пусть X есть неразрезанный компакт. Верно ли, что $A(L(X)) \setminus Bo(X) \neq \emptyset$ и $Bo(X) \setminus B_\alpha(X) \neq \emptyset$ для всех $\alpha < \omega_1$?

4. Общая характеристика A -множеств

Пространство X называется P^τ -пространством, если пересечение любого семейства из не более τ открытых множеств является открытым множеством. Пространство называется $P^{<\tau}$ -пространством, если оно является P^m -пространством для каждого $m < \tau$. Если $\tau = \aleph_0$, то любое пространство является $P^{<\tau}$ -пространством.

4.1. ТЕОРЕМА. Пусть τ и m являются бесконечными кардинальными числами, $\tau^{<m} = \tau$ и $S \subseteq B(\tau, m)$. Тогда для любого $P^{<\tau}$ -пространства X и его подмножества $E \subseteq X$ справедливы следующие утверждения.

1. $E \in A_S(X)$ тогда и только тогда, когда существует такое замкнутое в $X \times S \subseteq X \times B(\tau, m)$ множество H , что $p_X(H) = E$, где $p_X(x, s) = x$ для всех $(x, s) \in X \times S$.

2. $E \in A_S(\mathcal{U}(X))$ тогда и только тогда, когда существует такое G_τ -множество M пространства $X \times S$, что $p_X(M) = E$.
3. $E \in A_S(L(X))$ тогда и только тогда, когда существуют замкнутое в $X \times S$ множество H и G_τ -множество M в $X \times S$, для которых $E = p_X(H \cap M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть заданы замкнутые в X множества $\{F_k : k \in K(\tau, m)\}$ и открытые в X множества $\{V_k : k \in K(\tau, m)\}$, для которых $E = A_S\{F_k \cap V_k\} = \bigcup\{\bigcap\{F_{\xi|\beta} \cap V_{\xi|\beta} : \beta < m\} : \xi \in S\}$. Положим $H_\beta = \bigcup\{F_{\xi|\beta} \times \delta(\xi|\beta) : \xi \in B(\tau, m)\}$, $M_\beta = \bigcup\{V_{\xi|\beta} \times \delta(\xi|\beta) : \xi \in B(\tau, m)\}$, $H = \bigcap\{(X \times S) \cap H_\beta : \beta < m\}$ и $M = \bigcap\{(X \times S) \cap M_\beta : \beta < m\}$. Тогда $E = p_X(H \cap M)$. Этим мы представили подмножество $E \in A_S(L(X))$ как проекцию пересечения замкнутого множества и G_τ -множества из $X \times S$. При $V_k = X$ мы получаем представление множества $E \in A_S(\mathcal{F}(X))$ в виде проекции замкнутого в $X \times S$ множества H . При $F_k = X$ мы представляем $E \in A_S(\mathcal{U}(X))$ в виде проекции G_τ -множества M .

В одном направлении утверждения теоремы доказаны. Эти импликации верны для любого пространства X , т.е. требование быть $P^{<\tau}$ -пространством не существенно.

Пусть множество H замкнуто, а множества $\{W_\alpha : \alpha \in J_m\}$ открыты в $X \times S$. Предположим, что $W = \bigcap\{W_\alpha : \alpha \in J_m\}$, $p_X(H \cap W) = E$ и $W_\alpha \subseteq W_\beta$ при $\beta < \alpha$.

По индукции строятся отображение $h : K(\tau, m) \rightarrow K(\tau, m)$, открытые в X множества $\{V_k : k \in K(\tau, m)\}$ и открытые в $B(\tau, m)$ множества $\{H_k : k \in K(\tau, m)\}$, для которых:

- 1) $H_k = \delta_{h(k)} \cap S$ для любого $k \in K(\tau, m)$;
- 2) если $\xi = (\xi_\alpha : \alpha < m)$ и $1 \leq \beta < \mu < m$, то существуют $\eta = (\eta_\alpha : \alpha < m)$ и $1 \leq \beta' < \mu' < m$, для которых $h(\xi|\beta) = \eta|\beta'$ и $h(\xi|\mu) = \eta|\mu'$;
- 3) $W_1 = \bigcup\{V_\alpha \times H_\alpha : \alpha \in J_\tau\}$;
- 4) если $k = (k_\alpha : \alpha < \beta)$, то $W_\beta \cap (V_k \times H_k) = \bigcup\{V_{(k_1 \dots k_\alpha \dots \mu)} \times H_{(k_1 \dots k_\alpha \dots \mu)} : \mu \in J_\tau\}$.

Пусть $F_k = \text{cl}_X p_X(H \cap (X \times H_k))$ и $E_k = F_k \cap V_k$. Тогда $E = A_S\{E_k\}$. Доказательство завершено.

При $\tau = \aleph_0$ и $S = B(\tau)$ утверждения 1 и 2 доказаны в [11].

При $m = \tau = \aleph_0$ и $S = B(\omega)$ утверждение 1 доказано Н. Н. Лузиным (см. [23], [28]), а утверждение 3 доказано в [21].

Этим же способом устанавливается приводимая ниже теорема.

4.2. ТЕОРЕМА. Пусть X есть топологическое пространство и $E \subseteq X$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $E \in \text{Bo}(X)$, то существуют замкнутые в $X \times B(\omega)$ множество H и G_δ -множество $M \subseteq X \times B(\omega)$, для которых $E = p_X(H \cap M)$ и множество $(\{x\} \times B(\omega)) \cap H \cap M$ одноточечно для каждой точки $x \in E$.

2. Если пространство X совершенно нормально и $E \in \text{Bo}(X)$, то существуют замкнутое в $X \times B(\omega)$ множество H и G_δ -множество $M \subseteq X \times B(\omega)$, для которых $E = p_X(M) = p_X(H)$ и множества $(\{x\} \times B(\omega)) \cap H$ и $(\{x\} \times B(\omega)) \cap M$ одноточечны для каждой точки $x \in E$.

4.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Если $M \subseteq X \times B(\tau)$ и множество $(\{x\} \times B(\tau)) \cap M$ одноточечно для всех $x \in p_X(M)$, то говорят, что множество M униформно.

5. Абсолютные Ψ -множества

Пусть задано бесконечное кардинальное число τ . Рассматриваем только τ -st-операции.

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Ψ является τ -st-операцией. Пространство X называется:

- абсолютным Ψ -множеством, если существует компактное пространство Y для каждого $X \in \Psi(\mathcal{F}(Y))$;
- слабо абсолютным Ψ -множеством, если $X \in \Psi(\mathcal{F}(Y))$ для некоторого полного в смысле Чеха пространства Y ;
- $\mathcal{U}$ -абсолютным Ψ -множеством, если $X \in \Psi(\mathcal{U}(Y))$ для некоторого компакта;
- слабо $\mathcal{U}$ -абсолютным Ψ -множеством, если $X \in \Psi(\mathcal{U}(Y))$ для некоторого полного в смысле Чеха пространства Y ;
- L -абсолютным Ψ -множеством, если $X \in \Psi(L(Y))$ для некоторого компакта;
- слабо L -абсолютным Ψ -множеством, если $X \in \Psi(L(Y))$ для некоторого полного в смысле Чеха пространства Y .

Аналогичным образом определяются абсолютные, слабо абсолютные, $\mathcal{U}$ -абсолютные и L -абсолютные Ψ -множества заданного класса $\alpha < \tau^+$.

5.2. ТЕОРЕМА. Для пространства X следующие утверждения равносильны.

1. X является абсолютным Ψ -множеством для некоторой τ -st-операции Ψ .
2. X является слабо абсолютным Ψ -множеством для некоторой τ -st-операции Ψ .
3. X является $\mathcal{U}$ -абсолютным Ψ -множеством для некоторой τ -st-операции Ψ .
4. X является слабо $\mathcal{U}$ -абсолютным Ψ -множеством для некоторой τ -st-операции Ψ .
5. X является L -абсолютным Ψ -множеством для некоторой τ -st-операции Ψ .
6. X является слабо L -абсолютным Ψ -множеством для некоторой τ -st-операции Ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 6$, $3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 6$ и $5 \Rightarrow 6$ очевидны.

Рассмотрим τ -базу S . Предположим, что X является подпространством пространства Y , $\Psi = \Psi_S$, $E_\alpha \subseteq Y$ для всех $\alpha \in J_\tau$ и $X = \Psi\{E_\alpha\}$.

Если $\xi \in J_\tau$, то положим $\bar{\xi} = J_\tau \setminus \xi$. Пусть $\bar{S} = \{\bar{\xi} : \xi \in S\}$ и $H_\alpha = Y \setminus E_\alpha$. Тогда $\Psi_{\bar{S}}\{H_\alpha\} = \Psi_S\{E_\alpha\} = X$. Этим доказаны импликации $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ и $2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2$.

Предположим, что Y является полным по Чеху пространством, $Z = \beta Y$ и $Y = \bigcap \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$, где множества W_n открыты в Z . Пусть $E_\alpha \in \mathcal{F}(Y)$, $V_\alpha \in \mathcal{U}(Y)$ и $X = \Psi\{E_\alpha \cap V_\alpha\}$, где $\Psi = \Psi_S$. Разбиваем J_τ на три попарно дизъюнктивных подмножества M , P и Q , для которых:

- 1) множество M счетно и $M = \{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$;
- 2) существуют взаимно однозначные отображения $p: J_\tau \rightarrow P$ и $d: J_\tau \rightarrow Q$.

Если $\mu \in M$ и $\mu = \mu_n$, то $F_\mu = Z \setminus W_n$. Если $\mu \in P$, то $F_\mu = \text{cl}_Z E_{p^{-1}(\mu)}$. Если $\mu \in Q$, то $F_\mu = \text{cl}_Z(Y \setminus V_{q^{-1}(\mu)})$. Если $\xi \subseteq J_\tau$, то $S(\xi) = \{\eta \subseteq J_\tau : \eta \subseteq P \cup Q,$

$p(\xi) \subseteq \eta \subseteq J_\tau \setminus q(\xi)\}$. Если $S_1 = \bigcup\{S(\xi) : \xi \in S\}$, то $X = \Psi_{S_1}\{F_\mu\}$. Импликация $6 \Rightarrow 1$ и утверждения теоремы доказаны.

Таким образом, понятия слабого абсолютного Ψ -множества, $\mathcal{U}$ -абсолютного и L -абсолютного Ψ -множества имеют смысл для τ - δs -операций.

Легко доказываются следующие утверждения.

5.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пространство X является абсолютным Ψ -множеством для некоторой τ - st -операции Ψ тогда и только тогда, когда существует семейство замкнутых в βX множеств $\{F_\alpha : \alpha \in J_\tau\}$ таких, что $(\bigcap\{F_\alpha : x \in F_\alpha\}) \cap (\bigcap\{\beta X \setminus F_\beta : x \notin F_\beta\}) \subseteq X$ для каждой точки $x \in X$.*

5.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пространство X является абсолютным Ψ -множеством для некоторой τ - δs -операции тогда и только тогда, когда существует семейство замкнутых в βX множеств $\{F_\alpha : \alpha \in J_\tau\}$ таких, что $\bigcap\{F_\alpha : x \in F_\alpha\} \subseteq X$ для каждой точки $x \in X$.*

5.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть X является абсолютным Ψ -множеством для некоторой τ - δs -операции Ψ . Тогда любое открытое покрытие пространства X содержит подпокрытие мощности $\leq \tau$.*

5.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ есть совершенное отображение пространства X на пространство Y . Пространство X является абсолютным Ψ -множеством для некоторой τ - δs -операции Ψ тогда и только тогда, когда Y является Φ -множеством для некоторой τ - δs -операции Φ .*

Из теоремы 4.1 вытекает следующее утверждение.

5.7. СЛЕДСТВИЕ. *Пространство X является L -абсолютным τ - A -множеством тогда и только тогда, когда существует такое полное в смысле Чеха подпространство $H \subseteq X \times B(\tau)$, что $X = p_X(H)$.*

6. Абсолютные A_S -множества

Фиксируем бесконечные кардинальные числа τ , m и непустое подмножество $S \subseteq B(\tau, m)$.

6.1. ТЕОРЕМА. *Пусть $\Psi = A_S$ и X является подпространством пространства Y .*

1. *Если X является абсолютным Ψ -множеством, то $X \in \Psi(\mathcal{F}(Y))$.*

2. *Если X является слабо абсолютным Ψ -множеством, то существуют G_δ -множество Z пространства Y и абсолютное Ψ -множество $P \in \Psi(\mathcal{F}(\beta Y))$, для которых $X \in \Psi(\mathcal{F}(Z))$ и $X = Z \cap P$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно предположить, что X всюду плотно в Y . Пусть X является всюду плотным подпространством пространства X_1 и $X \in \Psi(\mathcal{F}(X_1))$. Тогда $X = \Psi\{F_k\}$, где $\{F_k : k \in K(\tau, m)\}$ есть семейство замкнутых в X_1 множеств. Можем считать, что $F_{\xi|\alpha} \subseteq F_{\xi|\beta}$ при $\beta \leq \alpha < m$.

Существует непрерывное отображение $f: \beta X \rightarrow \beta X_1$ такое, что $f(x) = x$ для всех $x \in X$. Положим $X_2 = f^{-1}(X_1)$ и $E_k = f^{-1}(F_k)$. Тогда $X = \Psi\{E_k\}$ и $X \in \Psi(\mathcal{F}(X_2))$. Существует непрерывное отображение $g: \beta X \rightarrow \beta Y$ такое, что $g(x) = x$ для всех $x \in X$.

Если пространство X_1 компактно, то $X_2 = \beta X$. В этом случае положим $\Phi_k = Y \cap g(E_k)$. Тогда $X = \Psi\{\Phi_k\}$ и утверждение 1 доказано.

Пусть X_1 является полным по Чеху пространством. Тогда существует такое G_δ -множество Z пространства βY , что $X \subseteq Z \subseteq Y$ и $g^{-1}(Z) \subseteq X_2$. Положим $\Phi_k = \text{cl}_{\beta Y} g(E_k)$ и $H_k = Z \cap g(E_k) = Z \cap \Phi_k$. Тогда $X = \Psi\{H_k\}$. Если $P = \Psi\{\Phi_k\}$, то $X = Z \cap P$. Утверждение 2 и теорема доказаны.

6.2. СЛЕДСТВИЕ. *Если X является слабо абсолютным τ -А-множеством и Z является компактификацией пространства X , то X является пересечением τ -А-множества и G_δ -множества пространства Z .*

Следствие 6.2 решает проблему 39 А. Стоуна из [49].

7. Ядра отображений

Скажем, что пространство Z является ядром отображения $f: X \rightarrow Y$, если существует вложение $\phi: X \rightarrow Y \times Z$ такое, что $f(x) = p_Y(\phi(x))$ для всех $x \in X$, где $p_Y(y, z) = y$ для $(y, z) \in Y \times Z$.

Ясно, что ядра существуют только для непрерывных отображений.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется

- отображением с τ -ядром, если для f существует метризуемое ядро веса τ ;
- отображением с сепарабельным ядром, если для f существует метризуемое сепарабельное ядро;
- $s(\tau)$ -отображением, если каждый прообраз $f^{-1}(y)$ является подпространством веса $\leq \tau$;
- s -отображением, если каждый прообраз $f^{-1}(y)$ является сепарабельным метризуемым подпространством.

Каждое отображение с τ -ядром является $s(\tau)$ -отображением. Обратное утверждение неверно. Взаимно однозначное отображение $f: X \rightarrow Y$ дискретного пространства X на несчетный метризуемый компакт Y является s -отображением и не имеет сепарабельного ядра.

7.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ является открытым непрерывным отображением пространства X на пространство Y , τ является бесконечным кардиналом и равномерные веса пространств X и Y не превосходят τ .*

Тогда следующие утверждения равносильны.

1. f является отображением с ядром веса $\leq \tau$.
2. На X существуют открытые дискретные семейства $\{\gamma_\alpha = \{U_{\alpha\beta} : \beta \in B_\alpha\} : \alpha \in A\}$ такие, что $|A| \leq \tau$, семейство $\{U_{\alpha\beta} : \beta \in B_\alpha, \alpha \in A\}$ образует базу пространства X и для каждого $\alpha \in A$ семейство $f(\gamma_\alpha) = \{f(U_{\alpha\beta}) : \beta \in B_\alpha\}$ дискретно в Y .
3. Все прообразы $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, являются подпространствами веса $\leq \tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство Z имеет равномерный вес не больше τ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

- 1) в Z существует τ -дискретная база, т.е. база, которая распадается в объединение τ дискретных систем;
- 2) для каждого открытого в Z множества V существует семейство непрерывных функций $\{f_\alpha: Z \rightarrow [0, 1] : \alpha \in J_\tau\}$ таких, что $V = \bigcup \{f_\alpha^{-1}(1) : \alpha \in J_\tau\} = \bigcup \{f^{-1}(0, 2) : \alpha \in J_\tau\}$.

Импликация $1 \Rightarrow 2$ очевидна. Если $\{V_\mu : \mu \in M\}$ есть τ -дискретная база пространства Y и $\{W_\xi : \xi \in J_\tau\}$ есть база пространства Z , то $\{V_\mu \times W_\alpha : \mu \in M, \alpha \in J_\tau\}$ есть τ -дискретная база пространства $Y \times Z$.

Импликация $2 \Rightarrow 3$ также очевидна.

Если $y \in Y$, то множество $B_\alpha(y) = \{\beta \in B_\alpha : U_{\alpha\beta} \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset\}$ не более чем одноточечно и $\{U_{\alpha\beta} \cap f^{-1}(y) : \beta \in B_\alpha(y), \alpha \in A\}$ образует базу пространства $f^{-1}(y)$.

Пусть веса прообразов $f^{-1}(y)$ не превосходят τ . На X фиксируем дискретные семейства $\{\gamma_\alpha = \{W_\mu : \mu \in M_\alpha\} : \alpha \in J_\tau\}$, для которых $\{W_\mu : \mu \in M_\alpha, \alpha \in J_\tau\}$ является базой. На Y фиксируем семейства дискретных семейств $\{\omega_\alpha = \{V_\eta : \eta \in P_\alpha\} : \alpha \in J_\tau\}$, для которых $\{V_\eta : \eta \in P_\alpha, \alpha \in J_\tau\}$ является базой. Для любых $\alpha, \beta \in J_\tau$ и $\eta \in P$ множество $M(\alpha, \beta, \eta) = \{\mu \in M_\alpha : V_\eta \subseteq f(W_\mu)\}$ имеет мощность $\leq \tau$. Если $M(\alpha, \beta, \eta) = \emptyset$, то $H_{\alpha\beta\mu\eta} = \emptyset$ для всех $\mu \in J_\tau$. Если $M(\alpha, \beta, \eta) \neq \emptyset$, то фиксируем отображение h множества J_τ на $M(\alpha, \beta, \eta)$ и положим $H_{\alpha\beta\mu\eta} = W_{f(\mu)} \cap f^{-1}(V_\eta)$. Пусть $\xi_{\alpha\beta\mu} = \{H_{\alpha\beta\mu\eta} : \eta \in P_\beta\}$. Тогда семейства $\xi_{\alpha\beta\mu}$ и $f(\xi_{\alpha\beta\mu})$ дискретны и $\{H_{\alpha\beta\mu\eta} : \eta \in P_\beta, \alpha, \beta, \mu \in J_\tau\}$ является базой пространства X . Импликация $3 \Rightarrow 2$ доказана.

Рассмотрим на X открытые дискретные семейства $\{\gamma_\alpha = \{U_{\alpha\beta} : \beta \in B_\alpha\} : \alpha \in A\}$ такие, что $|A| = \tau$, семейство $\{U_{\alpha\beta}\}$ образует базу и семейство $f(\gamma_\alpha)$ дискретно в Y для каждого $\alpha \in A$. Для каждого $\alpha \in A$ положим $U_\alpha = \bigcup \{U_{\alpha\beta} : \beta \in B_\alpha\}$. Существует семейство непрерывных функций $\{f_{\alpha\beta} : X \rightarrow I_{\alpha\beta} = [0, 1] : \beta \in A\}$, для которых $U_\alpha = \bigcup \{f_{\alpha\beta}^{-1}(0, 2) : \beta \in A\} = \bigcup \{f_{\alpha\beta}^{-1}(1) : \beta \in A\}$. Пусть $Z = \prod \{I_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in A\}$. Рассмотрим топологическое вложение $g : X \rightarrow Y \times Z$, где $g(x) = (f(x), f_{\alpha\beta}(x) : \alpha, \beta \in A)$. Итак, Z является ядром веса τ отображения f . Импликация $2 \Rightarrow 1$ и предложение доказаны.

7.2. СЛЕДСТВИЕ (А. Окуяма, М. Чобан, см. [5]). Пусть $f : X \rightarrow Y$ является открытым непрерывным s -отображением метризуемого пространства X на Y , $g : Y \rightarrow Z$ является открытым непрерывным отображением на метризуемое пространство Z и все прообразы $g^{-1}(z)$ сепарабельны. Тогда пространство Y метризуемо.

Аналогичным образом устанавливается справедливость следующего утверждения.

7.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $f : X \rightarrow Y$ является открытым непрерывным s -отображением метризуемого пространства X на Y .

Следующие утверждения равносильны.

1. Отображение f имеет сепарабельное ядро.
2. Пространство Y имеет σ -дизъюнктную базу.

7.4. СЛЕДСТВИЕ. Если $f : X \rightarrow Y$ является открытым отображением с сепарабельным ядром метризуемого пространства X на совершенно нормальное пространство Y , то пространство Y метризуемо.

8. Проблема Хаусдорфа об открытых отображениях. Общий случай

Ф. Хаусдорф в 1934 г. (см. [20]) доказал, что открытый непрерывный образ сепарабельного полного метрического пространства является полным метризуемым пространством.

Полные метризуемые пространства являются абсолютными G_δ -пространствами, т.е. абсолютно борелевскими множествами класса 1. В этом контексте Ф. Хаусдорф сформулировал следующую проблему.

8.1. ПРОБЛЕМА ХАУСДОРФА. Пусть $f: X \rightarrow Y$ является открытым непрерывным отображением метризуемого сепарабельного пространства X на Y . Пусть X является абсолютным борелевским множеством класса $\alpha \geq 2$. Будет ли Y абсолютно борелевским множеством класса $\leq \alpha$?

Ослабленным вариантом проблемы Хаусдорфа является следующая проблема.

8.2. ПРОБЛЕМА. Пусть $f: X \rightarrow Y$ является открытым s -отображением метризуемого слабо абсолютно борелевского множества X на метризуемое пространство Y . Будет ли Y слабо абсолютно борелевским множеством?

8.3. ТЕОРЕМА. Пусть Y есть метризуемое пространство. Следующие утверждения равносильны.

1. Y есть слабо абсолютное A -множество.
2. Y есть открытый непрерывный s -образ некоторого метризуемого слабо абсолютного A -множества.
3. Y есть открытый непрерывный s -образ некоторого метризуемого слабо абсолютного $G_{\delta\sigma}$ -множества, т.е. метризуемого слабо абсолютного борелевского множества второго класса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации $3 \Rightarrow 2$ и $1 \Rightarrow 2$ очевидны.

Пусть $f: X \rightarrow Y$ является непрерывным открытым s -отображением метризуемого слабо абсолютного A -множества X на Y . В силу предложения 7.1 можно считать, что существуют полное метризуемое сепарабельное пространство Z и полное метризуемое пространство Y_1 такие, что Y является подпространством пространства Y_1 , X является подпространством пространства $Y \times Z$ и $f(y, z) = y$ для всех $x = (y, z) \in X$. Ясно, что X является A -множеством пространства $Y \times Z$. Поскольку пространство $B(\omega)$ допускает открытое непрерывное отображение на Z , то существует A -множество $X_1 \subseteq Y_1 \times B(\omega)$, которое проектируется на Y . В силу теоремы 3.4 Y является A -множеством пространства Y_1 . Импликация $2 \Rightarrow 1$ доказана.

Пусть Y является A -множеством полного метрического пространства Y_1 . В силу теоремы 3.4 существует замкнутое в $Y_1 \times B(\omega)$ множество Φ , которое проектируется на Y . Пусть $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ есть база пространства $B(\omega)$ из открыто-замкнутых подмножеств. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ в $Y_1 \times U_n$ существует замкнутое подмножество X_n , которое проектируется на Y . Положим $X = \bigcup \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $f(y, z) = y$ для всех $x = (y, z) \in X$. Тогда X является $G_{\delta\sigma}$ -множеством пространства $Y_1 \times B(\omega)$, а f является открытым s -отображением пространства X на Y . Импликация $1 \Rightarrow 3$ и теорема доказаны.

При помощи теоремы 3.4 аналогичным образом доказывается следующая теорема.

8.4. ТЕОРЕМА. Для каждого метризуемого слабо абсолютного борелевского множества Y существуют метризуемое слабо абсолютное $G_{\delta\sigma}$ -множество X и непрерывное открытое счетнократное отображение $f: X \rightarrow Y$ на Y .

Еще Н. Н. Лузиным [36], [37] было установлено, что непрерывный образ абсолютно-го A -множества является абсолютным A -множеством. Поэтому весьма неожиданным оказалось следующее утверждение.

8.5. ТЕОРЕМА (Л. В. Келдыш [33]). *Каждое метризуемое абсолютное A -множество является открытым непрерывным образом метризуемого абсолютно $G_{\delta\sigma}$ -множества.*

Теорема 8.5 является следствием теоремы 8.3. Этим установлено, что в общем случае проблемы Хаусдорфа 8.1 и 8.2 имеют отрицательное решение. Поэтому представляет особый интерес следующая проблема.

8.6. ПРОБЛЕМА. При каких дополнительных условиях ответы на вопросы из проблем Хаусдорфа положительны?

9. Проблема Хаусдорфа. Случай равномерно полных отображений

Отображение $f: X \rightarrow Y$ пространства X на Y равномерно полно, если существует такое полное в смысле Чеха пространство X' , что X является подпространством пространства X' и каждый прообраз $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, замкнут в X' . Всегда можем считать, что $X \subseteq X' \subseteq \beta X$.

Если пространство X метризуемо, то отображение $f: X \rightarrow Y$ равномерно полно тогда и только тогда, когда пространство X метризуемо такой метрикой ρ , для которой все прообразы $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, полны в метрике ρ .

Различные понятия полноты отображения были рассмотрены в работах [46], [14], [39], [40], [56].

Пространство Z является паракомпактным p -пространством, если существует совершенное отображение пространства Z на некоторое метризуемое пространство (А. В. Архангельский [4]).

9.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $f: Z \rightarrow Y$ является непрерывным отображением, X_1 является G_δ -подмножеством пространства βZ , X является паракомпактным p -подпространством пространства Z , $X \subseteq X_1$, $f(X) = Y$, $g = f|_X: X \rightarrow Y$ является открытым отображением и для каждого $y \in Y$ множество $g^{-1}(y)$ замкнуто в X_1 . Тогда X является G_δ -подмножеством пространства Z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можем считать, что пространство X всюду плотно в Z . Тогда X всюду плотно и в X_1 .

Пусть $X_1 = \bigcap \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, где множество V_n открыто в βX_1 и $V_{n+1} \subseteq V_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда существуют последовательность $\{\gamma_n = \{U_\alpha : \alpha \in A_n\} : n \in \mathbb{N}\}$ семейств из открытых в βZ подмножеств и последовательность отображений $\{\pi_n: A_{n+1} \rightarrow A_n : n \in \mathbb{N}\}$, для которых:

- 1) если $U_n = \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in A_n\}$, то $X \subseteq U_n \subseteq V_n$ для всякого $n \in \mathbb{N}$;
- 2) если $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in A_n$, то $U_\alpha \cap X = \bigcup \{U_\beta \cap X : \beta \in \pi_n^{-1}(\alpha)\} \subseteq \bigcup \{\text{cl}_{\beta Z} U_\beta : \beta \in \pi_n^{-1}(\alpha)\} \subseteq U_\alpha \subseteq \text{cl}_{\beta Z} U_\alpha \subseteq V_n$ и $U_\alpha \cap X$ является F_σ -подмножеством пространства X ;
- 3) для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in U_n$ существует открытое в βZ множество V такое, что множество $\{\alpha \in A_n : V \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ конечно и $x \in V$;
- 4) если $x \in X$ и $\gamma_n(x) = \bigcup \{U \in \gamma_n : x \in U\}$, то $\bigcap \{\text{cl}_{\beta Z} \gamma_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$;
- 5) если $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in A_n$ и $\beta \in \pi_n^{-1}(\alpha)$, то $\text{cl}_Y(f(U_\beta \cap X)) \subseteq f(U_\alpha \cap X)$.

Мы утверждаем, что $X = \bigcap \{U_n \cap Z : n \in \mathbb{N}\}$.

Предположим, что $x \in \bigcap \{U_n \cap Z : n \in \mathbb{N}\}$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ в силу условия 3 множество $A_n(x) = \{\alpha \in A_n : x \in U_\alpha\}$ конечно и $\pi_n(A_{n+1}(x)) \subseteq A_n(x)$. Рассматривая $A_n(x)$ как дискретные конечные пространства, получаем, что обратный предел $A = \lim\{A_n(x) : \pi_n|A_{n+1}(x)\}$ является непустым компактом.

Фиксируем точку $\alpha = (\alpha_n \in A_n(x) : n \in \mathbb{N}) \in A$. По построению $x \in U_{\alpha_{n+1}} \subseteq \text{cl}_{\beta Z} U_{\alpha_{n+1}} \subseteq U_{\alpha_n} \subseteq U_n \subseteq V_n$ и $\alpha_n = \pi_n(\alpha_{n+1})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $y = f(x)$. Множество $F = \bigcap\{U_{\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\}$ является непустым компактным подмножеством пространства X_1 , и для любого открытого в βZ множества V , содержащего F , существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $U_{\alpha_n} \subseteq V$. Предположим, что $F \cap g^{-1}(y) = \emptyset$. Тогда существует $m \in \mathbb{N}$, для которого $U_{\alpha_m} \cap g^{-1}(y) = \emptyset$. В этом случае $y \notin f(U_{\alpha_m} \cap X)$ и $y \notin \text{cl}_Y f(U_{\alpha_{m+1}} \cap X)$. Тогда $U_{\alpha_{m+1}} \cap Z \subseteq f^{-1}(f(U_{\alpha_{m+1}} \cap X))$ и $U_{\alpha_{m+1}} \cap f^{-1}(y) = \emptyset$, противоречие с условием $x \in U_{\alpha_m} \cap f^{-1}(y)$. Итак, $F \cap g^{-1}(y) \neq \emptyset$. Фиксируем $x \in F \cap g^{-1}(y)$. Тогда $x \in U_{\alpha_m} \subseteq \gamma_n(x_1)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \bigcap\{\gamma_k(x_1) : k \in \mathbb{N}\} \subseteq X$. Доказательство завершено.

9.2. ТЕОРЕМА. Пусть $g: X \rightarrow Y$ является открытым непрерывным равномерно полным отображением метризуемого пространства X на паракомпакт Y и $\alpha \geq 1$. Следующие утверждения равносильны.

1. X является борелевским множеством класса $F_\alpha(Z)$ (класса $U_\alpha(Z)$) для некоторого полного метризуемого пространства Z , содержащего X .

2. Y является борелевским множеством класса $F_\alpha(S)$ (класса $U_\alpha(S)$) для некоторого полного метризуемого пространства S , содержащего Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует замкнутое подпространство X' такое, что $g(X') = Y$ и отображение $h = g|X': X' \rightarrow Y$ совершенно (см. [39]). Если X является слабо абсолютным борелевским множеством, то X' , Y являются слабо борелевскими множествами того же класса (см. [13], [49], [50]). Этим импликация $1 \Rightarrow 2$ доказана. Одновременно мы установили, что пространство Y метризуемо.

Пусть Y является борелевским подмножеством полного метрического пространства (S, ρ) . На X существует метрика d такая, что каждый прообраз $g^{-1}(y)$, $y \in Y$, полон. Можно считать, что $\rho(g(x_1), g(x_2)) \leq d(x_1, x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$. Обозначим через (Z, d) пополнение Хаусдорфа метрического пространства (X, d) . Тогда существует непрерывное отображение $f: Z \rightarrow S$ такое, что $g = f|X$. Положим $X_1 = f^{-1}(Y)$. В силу предложения 9.1 X является G_δ -множеством пространства X_1 . По построению X_1 является борелевским подмножеством в Z того же класса, что Y в S . Пространства X и X_1 принадлежат тем же борелевским классам пространства Z . Импликация $2 \Rightarrow 1$ доказана. Доказательство завершено.

9.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Если отображение $g: X \rightarrow Y$ метризуемого пространства X на паракомпакт Y равномерно полно и τ является кардинальным числом, то X является слабо абсолютным τ - A -множеством тогда и только тогда, когда таковым является пространство Y .

9.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Аналог теоремы 9.2 справедлив для Ψ -классов множеств, где Ψ является допустимой операцией. Для доказательства достаточно применить следствие 17.3 из [13].

9.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Сохранение классов множеств при различных отображениях было рассмотрено в работах [3], [46], [52]–[55], [9]–[14], [16], [49], [50].

9.6. ПРИМЕР. Каждое компактное отображение $f: X \rightarrow Y$ равномерно полно.

Следующий пример для других целей был построен Э. Майклом [40].

9.7. ПРИМЕР. Пусть Y является несчетным метризуемым компактом. В $Z = Y \times Y$ рассмотрим семейство $\{\Phi_\alpha : \alpha < c = 2^\omega\}$ всех компактных подмножеств Φ , для которых первая проекция $p_1(\Phi)$ несчетна, где $p_1(u, v) = u$ для всех $(u, v) \in Z$. По индукции строятся трансфинитные последовательности точек $\{x_\alpha, y_\alpha, u_\alpha, v_\alpha : \alpha < c\} \subseteq Y$, для которых:

- $(x_\alpha, u_\alpha), (y_\alpha, v_\alpha) \in \Phi_\alpha$ для всех $\alpha < c$;
- $x_\alpha \neq y_\alpha$ и $x_\alpha, y_\alpha \in Y \setminus \{x_\beta, y_\beta : \beta < \alpha\}$ для каждого $\alpha < c$.

Положим $X = Z \setminus \{(x_\alpha, u_\alpha) : \alpha < c\}$ и $g = p_1|_X : X \rightarrow Y$. Тогда:

- Y есть метризуемый компакт;
- X есть пространство со счетной базой;
- $|(\{y\} \times Y) \setminus g^{-1}(y)| \leq 1$ для каждого $y \in Y$;
- подпространство $g^{-1}(y)$ локально компактно для любой точки $y \in Y$;
- для каждого компакта $F \subseteq X$ множество $g(F)$ счетно;
- если $y \in Y$, то $H(y) = X \cap (Y \times \{y\})$ является несчетным замкнутым подпространством пространства X и каждое компактное подмножество $F \subseteq H(y)$ счетно; в частности, $H(y)$ и X не являются A -множествами пространства Z ;
- каждый прообраз $g^{-1}(y)$ метризуем полной метрикой.

Таким образом, требование равномерной полноты отображения g в условиях теоремы 9.2 существенно.

9.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Сохранение борелевских классов множеств при открытых компактных отображениях сепарабельных метризуемых пространств было изучено А. Д. Таймановым [52].

10. Проблема Хаусдорфа. Случай счетнократных отображений

Для каждого пространства Z обозначим через $BA(Z)$ совокупность всех двусторонних A -множеств H , т.е. $H \in A(L(Z))$ и $Z \setminus H \in A(L(Z))$ для всех $H \in BA(Z)$. Если Z является полным сепарабельным метризуемым пространством, то $BA(Z) = Bo(Z)$.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ пространства X на пространства Y называется:

- BA -измеримым, если $f^{-1}(F) \in BA(X)$ для каждого замкнутого в Y множества F ;
- BA -гомеоморфизмом, если отображение f взаимно однозначно и f, f^{-1} являются BA -измеримыми.

Следующее утверждение, усиливающее одну теорему П. С. Новикова и В. Я. Арсенина [3], [42], [41], было установлено в [10; теорема 6].

10.1. ТЕОРЕМА. Пусть X является топологическим пространством, Z является полным сепарабельным метризуемым пространством, $L \in BA(X \times Z)$, $Y = p_X(L)$, где $p_X(x, z) = x$ для всех $(x, z) \in X \times Z$, и множество $L \cap (\{x\} \times Z)$ σ -компактно для всех $x \in Y$. Тогда $Y \in BA(X)$ и существует такое подмножество $H \in BA(X \times Z)$, что $H \subseteq L$, $p_X(H) = Y$ и $g = p_X|_H : H \rightarrow Y$ является BA -гомеоморфизмом.

Из теоремы 10.1 вытекают следующие результаты.

10.2. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f: X \rightarrow Y$ является непрерывным отображением с сепарабельным ядром метризуемого пространства X на метризуемое пространство Y и все прообразы $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, σ -компактны. Если X является BA -множеством некоторого полного метризуемого пространства, то:

- 1) Y является BA -множеством некоторого полного метризуемого пространства;
- 2) существует такое BA -множество $X_1 \in BA(X)$, что $g = f|_{X_1}: X \rightarrow Y$ является BA -гомеоморфизмом с сепарабельным ядром.

10.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f: X \rightarrow Y$ является открытым непрерывным отображением метризуемого пространства X на метризуемое пространство Y , X является BA -множеством некоторого полного метризуемого пространства и для каждой точки $y \in Y$ подпространство $f^{-1}(y)$ σ -компактно (или счетно). Тогда:

- 1) Y является BA -множеством некоторого полного метризуемого пространства;
- 2) существует такое BA -множество $X_1 \in BA(X)$, что $g = f|_{X_1}: X_1 \rightarrow Y$ является BA -гомеоморфизмом с сепарабельным ядром.

10.4. ПРИМЕР. Пусть $X_1 = \{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ есть несчетное дискретное пространство и $X = X_1 \times [0, 1]$. Для каждого $\alpha < \omega_1$ в $\{\alpha\} \times [0, 1]$ фиксируем борелевское подмножество Y_α класса $\geq \alpha$. Пусть $Y = \bigcup \{Y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Тогда $Y \in BA(X)$ и Y не является борелевским подмножеством какого-либо полного метризуемого пространства. Существуют сепарабельное метризуемое пространство Z и непрерывное отображение $g: X \rightarrow Z$ такие, что $g^{-1}(g(Y)) = Y$ и $g(Y) \in BA(Z)$. Тогда $g(Y)$ не является борелевским подмножеством пространства Z . В силу теоремы 8.4 существуют слабо абсолютное метризуемое $G_{\delta\sigma}$ -множество S и непрерывное открытое счетнократное отображение $\phi: S \rightarrow Y$ на Y .

11. Проблема Хаусдорфа. Случай изолированных отображений

Отображение $f: X \rightarrow Y$ пространства X на Y изолировано, если для каждой точки $y \in Y$ подпространство $f^{-1}(y)$ содержит изолированную точку.

11.1. ТЕОРЕМА. Пусть $f: X \rightarrow Y$ является открытым непрерывным изолированным отображением метризуемого пространства X на метризуемое пространство Y . Тогда существует последовательность $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ замкнутых в X множеств, для которых $Y = \bigcup \{f(X_n) : n \in \mathbb{N}\}$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $Y_n = f(X_n)$ замкнуто в Y и $f_n = f|_{X_n}: X_n \rightarrow Y_n$ является гомеоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует последовательность открытых дискретных систем $\{\gamma_n = \{V_\alpha : \alpha \in A_n\} : n \in \mathbb{N}\}$, для которых $\bigcup \{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ образует базу пространства X и каждая система $f(\gamma_n) = \{f(V_\alpha) : \alpha \in A_n\}$ дискретна в Y .

Фиксируем $m \in \mathbb{N}$. Положим $V_m = \bigcup \{V_\alpha : \alpha \in A_m\}$, $H_m = \{y \in Y : \text{множество } V_m \cap f^{-1}(y) \text{ одноточечно}\}$ и $X'_m = V_m \cap f^{-1}(H_m)$. Множество X'_m замкнуто в V_m , множество H_m замкнуто в $f(V_m)$ и $f|_{X'_m}: X'_m \rightarrow H_m$ является гомеоморфизмом. Поскольку H_m является F_σ -множеством пространства Y , то доказательство завершено.

11.2. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f: X \rightarrow Y$ является открытым непрерывным изолированным s -отображением метризуемого пространства X на метризуемое пространство Y . Тогда:

- 1) $\dim Y \leq \dim X$;
- 2) если X является борелевским подмножеством некоторого полного метризуемого пространства, то Y является борелевским подмножеством того же класса некоторого полного метризуемого пространства;
- 3) если операция Ψ допустима и X является Ψ -множеством некоторого класса некоторого полного метризуемого пространства, то и Y является таковым.

11.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Условие быть s -отображением существенно. Р. Поль [47] и Х. Ж. К. Юннила [22] установили, что каждое метризуемое пространство является открытым непрерывным отображением σ -дискретного метризуемого пространства при отображении с дискретными прообразами точек. Такие отображения изолированы.

11.4. ЗАМЕЧАНИЕ. В случае пространств со счетной базой теорема 11.1 и следствие 11.2 установлены А. Д. Таймановым [52], [55].

12. О строении подмножеств в некоторых пространствах

В этом разделе все пространства предполагаются метризуемыми и сепарабельными, а операции — $\aleph_0$ - ts -операциями.

Скажем, что в пространстве X задана классификация подмножеств, если определена трансфинитная последовательность семейств подмножеств $\{\mathcal{L}_\alpha : 0 \leq \alpha < \omega_1\}$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $\mathcal{L}_0$ состоит из всех замкнутых подмножеств пространства X ;
- 2) $\mathcal{L}_\alpha \subseteq \mathcal{L}_\beta$, как только $\alpha \leq \beta < \omega_1$;
- 3) если $\beta < \omega_1$ и $H_1, H_2 \in \mathcal{L}_\beta$, то $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{L}_\beta$;
- 4) если $\alpha \geq 1$, $H \in \mathcal{L}_\alpha$ и U открыто в X , то $U \cap H \in \mathcal{L}_\alpha$.

Каждая допустимая операция над множествами порождает определенную классификацию подмножеств.

Предположим, что фиксирована классификация подмножеств $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

Скажем, что подмножество $H \subseteq X$ является приводимым подмножеством класса α , если для каждого замкнутого подмножества Y пространства X из $Y \cap H \neq \emptyset$ следует, что существует открытое подмножество U пространства X такое, что $U \cap Y \cap H \neq \emptyset$ и $U \cap H \cap Y \in \bigcup \{\mathcal{L}_\beta : \beta < \alpha\}$.

Для каждого $\alpha < \omega_1$ и $H \in \mathcal{L}_\alpha$ однозначно определяются два подмножества $r(H)$ и $ir(H)$, удовлетворяющие условиям: $r(H) \cap ir(H) = \emptyset$; $r(H) \cup ir(H) = H$; если U открыто в X и $U \cap ir(H) \neq \emptyset$, то $U \cap ir(H) \in \mathcal{L}_\alpha \setminus \bigcup \{\mathcal{L}_\beta : \beta < \alpha\}$; множество $r(H)$ приводимо класса α . Будем называть $r(H)$ приводимой частью, а $ir(H)$ — неприводимой частью множества H . Если $H = ir(H)$, то будем говорить, что H является неприводимым множеством $\mathcal{L}$ -класса α .

Множество $H \subseteq X$ называется универсальным множеством $\mathcal{L}$ -класса α , если $H \in \mathcal{L}_\alpha$ и для каждого $P \in \mathcal{L}_\alpha$ существует замкнутое в X множество Y такое, что P и $H \cap Y$ гомеоморфны.

12.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство X называется B -устойчивым, если оно бесконечно, имеет счетную базу и существует замкнутое подмножество $F \subseteq X$, гомеоморфное пространству $X^{\mathbb{N}}$.

12.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство X B -однородно, если оно B -устойчиво, топологически однородно и семейство $H(X) = \{U \subseteq X : U \text{ открыто и гомеоморфно пространству } X\}$ образует базу пространства X .

12.3. ПРИМЕРЫ. 1. Если Y является неединичным пространством со счетной базой, то $X = Y^{\mathbb{N}}$ B -устойчиво.

2. Пусть X есть дискретная сумма пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и некоторого счетного пространства. Тогда пространство X B -устойчиво и не B -однородно.

3. Пусть $H(Y)$ образует базу неединичного однородного пространства Y . Тогда пространство $Y^{\mathbb{N}}$ B -однородно.

4. Пространство иррациональных чисел $B(\omega) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ B -однородно.

5. Канторово совершенное множество $B(2)$ B -однородно.

6. Любое сепарабельное бесконечномерное банахово пространство B -однородно.

7. Евклидово пространство E^n не B -устойчиво.

12.4. ТЕОРЕМА. Пусть пространство X B -устойчиво. Тогда для любой операции Ψ в X существует Ψ -универсальное множество, т.е. такое множество $L \in \Psi(X)$, что для каждого $P \in \Psi(X)$ существует замкнутое в X множество F такое, что P и $L \cap F$ гомеоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим проекцию $\pi: X \times X \rightarrow X$, где $\pi(x, y) = x$ для всех $x, y \in X$. Тогда в $X \times X$ существует Ψ -универсальное множество, т.е. такое множество $H \in \Psi(X \times X)$, что для каждого $P \in \Psi(X)$ существует точка $y \in X$ такая, что $P = \pi(H \cap (X \times \{y\}))$ (см. [13; теорема 8.5]). Существуют замкнутое подмножество $\Phi \subseteq X$ и гомеоморфизм $\phi: X \times X \rightarrow \Phi$. Множество $L = \phi(H)$ Ψ -универсально в X . Доказательство завершено.

12.5. ТЕОРЕМА. Пусть пространство X B -устойчиво. Если $\alpha \geq 0$, $\mathcal{L}_\alpha \setminus \bigcup\{\mathcal{L}_\beta : \beta < \alpha\} \neq \emptyset$ и $\mathcal{L}_\alpha = \Psi(X)$ для некоторой δs -операции Ψ , то в X существует некоторое Ψ -универсальное неприводимое множество $\mathcal{L}$ -класса α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 12.4 в X существует некоторое Ψ -универсальное множество H . Существуют замкнутое подмножество $\Phi \subseteq X$ и гомеоморфизм $\psi: X^{\mathbb{N}} \rightarrow \Phi$. Множество $H_1 = \psi(H^{\mathbb{N}})$ искомое. Доказательство завершено.

12.6. СЛЕДСТВИЕ. Пусть пространство X B -устойчиво и δs -операция Ψ допустима. Тогда для каждого $\alpha < \omega_1$ в X существует неприводимое Ψ -универсальное множество $H \in \Psi_\alpha(X)$ класса α . Более того, $\Psi_\alpha(X) \setminus \bigcup\{\Psi_\beta(X) : \beta < \alpha\} \neq \emptyset$ для всех $\alpha < \omega_1$.

Множество $H \in \mathcal{L}_\alpha$ называется каноническим элементом $\mathcal{L}$ -класса α , если H удовлетворяет условиям:

- H является пространством первой категории;
- H является универсальным множеством $\mathcal{L}$ -класса α ;
- H неприводимо $\mathcal{L}$ -класса α ;
- пространство H однородно, т.е. для любых точек $a, b \in H$ существует гомеоморфизм $\phi: H \rightarrow H$ такой, что $\phi(a) = b$.

12.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть пространство X B -устойчиво, множество Φ замкнуто в X , множество $Q \subseteq X$ гомеоморфно пространству рациональных чисел, $\varphi: X \times X \rightarrow \Phi$ является гомеоморфизмом, Ψ является δs -операцией, $1 \leq \alpha < \omega_1$, а $H_1 \in \Psi_\alpha(X)$ и $H = \phi(H_1 \times Q)$. Тогда:

- 1) H является пространством первой категории;
- 2) если $H_1 \in \Psi_\alpha(X)$ и H_1 универсально для Ψ -класса α , то H универсально для Ψ -класса α ;
- 3) если H_1 однородно, то и H однородно;
- 4) если $H \in \Psi_\alpha(X)$ и H_1 неприводимо класса α , то и H неприводимо Ψ -класса α ;
- 5) если $H \in \Psi_\alpha(X)$ и H_1 однородно и неприводимо Ψ -класса α , то H является каноническим множеством Ψ -класса α ;
- 6) если $\Psi \geq \sigma$, то $H \in \Psi_\alpha(X)$;
- 7) если $\alpha \geq 2$ и операция Ψ допустима, то $H \in \Psi_\alpha(X)$.

Доказательство проводится стандартным образом.

Для заданной классификации множеств $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ в заданном пространстве X возникают следующие проблемы.

ПРОБЛЕМА 1 (проблема непустоты классов). При каких условиях $\mathcal{L}_\alpha \setminus \bigcup\{\mathcal{L}_\beta : \beta < \alpha\} \neq \emptyset$ для всех $2 \leq \alpha < \omega_1$?

ПРОБЛЕМА 2 (проблема существования). Построить для каждого $\alpha < \omega_1$ эффективно (т.е. без привлечения аксиомы выбора):

- а) определенный элемент класса α , т.е. элемент из $\mathcal{L}_\alpha \setminus \bigcup\{\mathcal{L}_\beta : \beta < \alpha\}$;
- б) неприводимый элемент класса α ;
- с) канонический элемент класса α .

ПРОБЛЕМА 3. Осуществить классификацию неприводимых элементов заданного класса. При этом два множества эквивалентны, если они гомеоморфны.

ПРОБЛЕМА 4. Осуществить классификацию канонических элементов класса α .

ПРОБЛЕМА 5 (проблема нетривиальности). При каких условиях $\bigcup\{\mathcal{L}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ не совпадает с семейством 2^X всех подмножеств множества X .

ПРОБЛЕМА 6 (проблема эффективной нетривиальности). Построить эффективно подмножество $H \notin \bigcup\{\mathcal{L}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

Проблема 5 решается тривиально, если $\bigcup\{\mathcal{L}_\alpha : \alpha < \omega_1\} = r(\Psi, X)$ для некоторой операции Ψ и пространство X несчетно. В этом случае каждый класс $\mathcal{L}_\alpha$, а значит и $r(\Psi, X)$, содержит не более континуума элементов, а семейство всех подмножеств 2^X имеет мощность больше континуума. Следовательно, $2^X \setminus r(\Psi, X) \neq \emptyset$.

Проблема 1 для B -устойчивых пространств и допустимых операций Ψ решается или методом универсальных множеств, или методом А. Н. Колмогорова (см. [13], [37], [36]).

Проблемы 2–4 возникли для различных классификаций борелевских множеств пространства $B(\omega)$. Семейства $\{\mathcal{F}_\alpha(X) : \alpha < \omega_1\}$ и $\{\mathcal{U}_\alpha(X) : \alpha < \omega_1\}$ составляют классификацию Бореля. Если $\sum_\alpha(X) = \mathcal{F}_\alpha(X)$ и $\prod_\alpha(X) = \mathcal{U}_\alpha(X)$ для нечетных α , а $\sum_\alpha(X) = \mathcal{U}_\alpha(X)$ и $\prod_\alpha(X) = \mathcal{F}_\alpha(X)$ для четных α , то получим классификацию Хаусдорфа борелевских множеств.

Пусть $\text{Limi } A_n = \bigcup \{ \bigcap \{ A_{n+m} : m \in \mathbb{N} \} : n \in \mathbb{N} \}$ и $\text{Lims } A_n = \bigcap \{ \bigcup \{ A_{n+m} : m \in \mathbb{N} \} : n \in \mathbb{N} \}$ – это нижний и верхний пределы последовательности множеств $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ясно, что Limi и Lims являются δs -операциями. Эти операции сильнее операций δ и σ , но они не нормальны. Если $\text{Limi } A_n = \text{Lims } A_n$, то последовательность $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ называется сходящейся и пишут $\text{Lim } A_n = \text{Limi } A_n = \text{Lims } A_n$. Если K_0 состоит из всех открыто-замкнутых подмножеств $B(\omega)$, а K_α состоит из пределов $\text{Lim } A_n$ множеств из $\bigcup \{K_\beta : \beta < \alpha\}$, то получим классификацию Валле-Пуссена борелевских множеств.

Проблема 3 для классификаций борелевских множеств в $B(\omega)$ была поставлена П. С. Александровым и П. С. Урысоном [2]. Эта проблема решена А. В. Островским [45; теорема 11].

Для классификации Валле-Пуссена проблема 2а) была поставлена Лебегом, проблема 2с) – Бэром, а проблема 4 – Н. Н. Лузиным (см. [36], [37]). При этом Н. Н. Лузиным был сформулирован и вопрос о нахождении удачного определения “канонического” борелевского множества класса α . Эти проблемы были успешно решены в работах Л. В. Келдыш [24]–[32] (см. также [37], [36]). Л. В. Келдыш [24], [25], [30]–[32] нашла удачное определение понятия канонического элемента заданного класса, для каждого $\alpha \geq 4$ эффективно построила пример канонического элемента класса K_α и установила справедливость следующих двух теорем.

ТК-1. *Два канонических элемента класса K_α , $\alpha \geq 2$, гомеоморфны.*

ТК-2. *Если $\alpha \geq 2$ и $H \in K_\alpha \setminus \bigcup \{K_\beta : \beta < \alpha\}$, то существуют элементы $\{H_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup \{K_\beta : \beta < \alpha\}$ такие, что $\bigcup \{H_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ и множество $H' = H \setminus \{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ или пусто, или является каноническим элементом класса α .*

В связи с этими результатами Л. В. Келдыш [32] сформулировала следующие задачи.

ПРОБЛЕМА 7. Пусть $\alpha \geq 2$ и $H \in K_\alpha \setminus \bigcup \{K_\beta : \beta < \alpha\}$. Верно ли, что $H = H_1 \cup H_2$, где H_1 есть канонический элемент класса α и $H_2 \in \bigcup \{K_\beta : \beta < \alpha\}$?

ПРОБЛЕМА 8. Пусть $\alpha \geq 1$ и $H \in K_\alpha \setminus \bigcup \{K_\beta : \beta < \alpha\}$. Верно ли, что H является универсальным элементом для класса K_α ?

Проблема 8 решена в [45]. В работе [45] получено новое описание канонических элементов класса K_α . Проблема 7 остается открытой. Представляет интерес возможность перенесения результатов Л. В. Келдыш на более общие пространства, например, на полные B -однородные пространства и, в частности, на бесконечномерные банаховы пространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. S. Alexandroff. Sur la puissance des ensembles mesurables B // C. R. Acad. Sci. Paris. 1916. V. 162. P. 323–325.
- [2] P. S. Alexandroff, P. S. Urysohn. Über nulldimensionale Punktmengen // Math. Ann. 1927. V. 98. P. 89–106.
- [3] В. Я. Арсенин. Природа проекций некоторых B -множеств // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4. № 4. С. 403–410.
- [4] А. В. Архангельский. Отображения и пространства // УМН. 1966. Т. 21. № 4. С. 133–184.

- [5] В. Я. Арсенин, А. А. Ляпунов. Теория A -множеств // УМН. 1950. Т. 5. №5. С. 45–108.
- [6] R. Baire. Sur la représentation des fonctions discontinues // Acta Math. 1905. V. 30. P. 34–47.
- [7] J. Barwise (ed.). Handbook of Mathematical Logic. Amsterdam: North-Holland, 1977.
- [8] А. В. Чернавский. Замечание к теореме Шнейдера о существовании в совершенно-нормальных бикompактах A -множества, не являющегося B -множеством // Вестник Моск. ун-та. Матем. 1962. №2. С. 20.
- [9] М. М. Чобан. О бэровских множествах // Второй Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. Кишинев, 1969. С. 87–90.
- [10] М. М. Чобан. О B -измеримых сечениях // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207. №1. С. 48–51.
- [11] М. М. Чобан. Непрерывные образы полных пространств // Труды ММО. 1974. Т. 30. С. 23–59.
- [12] М. М. Choban (Їoban). Algebras and some questions of the theory of maps // General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra: Proceedings of the Fifth Prague Topological Symposium, 1981, 1983. 86–97. (Sigma Ser. Pure Math. V. 3.)
- [13] М. М. Чобан. Дескриптивная теория множеств и топология // Итоги науки и техники. Современ. проблемы математики. Фундамент. направления. М.: ВИНТИ, 1989. С. 173–237.
- [14] М. М. Choban. The open mappings and spaces // Rend. Circ. Mat. Palermo, serie II. Suppl. 1992. V. 29. P. 51–104.
- [15] Р. Эггелькинг. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [16] R. C. Freiwald. Images of Borel sets and k -analytic sets // Fund. Math. 1972. V. 75. №1. P. 35–46.
- [17] Z. Frolik. A survey of separable descriptive theory of sets and spaces // Czechoslovak Math. J. 1970. V. 20. P. 406–467.
- [18] Z. Frolik. Topological methods in measure theory and the theory of measurable spaces // General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proceedings of the Third Prague Topological Symposium, 1971). Prague: Academia, 1972. P. 127–139.
- [19] F. Hausdorff. Mengenlehre. Berlin: de Gruyter, 1927.
- [20] F. Hausdorff. Über innere Abbildungen // Fund. Math. 1934. V. 23. P. 279–291.
- [21] J. E. Jayne, I. Namioka, C. A. Rogers. Topological properties of Banach spaces // Proc. London Math. Soc. (3). 1993. V. 66. №3. P. 651–672.
- [22] H. J. K. Junnila. Stratifiable pre-images of topological spaces // Colloq. Math. Soc. János. Bolyai. 1980. V. 23. P. 689–703.
- [23] В. Г. Кановой. Проективная иерархия Н. Н. Лузина: Современное состояние теории // Справочная книга по математической логике. Ч. II. М.: Наука, 1982. С. 273–370.
- [24] Л. В. Келдыш. О гомеоморфности канонических элементов третьего класса // Матем. сб. 1934. Т. 41. №2. С. 187–220.
- [25] Л. В. Келдыш. О простых функциях класса α // Докл. АН СССР. 1934. Т. 4. №4. С. 192–197.
- [26] Л. В. Келдыш. Счетные измеримые B -решета, определяющие множества измеримые B // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1937. №3. С. 403–418.
- [27] Л. В. Келдыш. Об одном свойстве решет измеримых B // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1938. №1. С. 125–135.
- [28] Л. В. Келдыш. Решета, определяющие множества измеримые B // Докл. АН СССР. 1938. Т. 19. №1–2. С. 11–14.
- [29] Л. В. Келдыш. Структура минимальных решет, определяющих множества измеримые B // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1938. №2. С. 221–248.
- [30] Л. В. Келдыш. Однородные множества измеримые B // Докл. АН СССР. 1940. Т. 26. №6. С. 531–534.
- [31] Л. В. Келдыш. Структура B -множеств // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31. №7. С. 651–653.
- [32] Л. В. Келдыш. Структура B -множеств // Труды МИАН. 1945. Т. 17.
- [33] Л. В. Келдыш. Об открытых отображениях A -множеств // Докл. АН СССР. 1945. Т. 49. №9. С. 646–648.
- [34] К. Куратовский. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.

- [35] H. Lebesgue. Sur les fonctions représentables analytiquement // J. Math. (6). 1905. V. 1. P. 139–216.
- [36] N. N. Lusin. Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications. Paris: Gauthier-Villars, 1930.
- [37] Н. Н. Лузин. Собрание сочинений. Т. 2. Дескриптивная теория множеств. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
- [38] А. А. Ляпунов. Вопросы теории множеств и теории функций. М.: Наука, 1979.
- [39] E. Michael. A theorem on semi-continuous set-valued functions // Duke Math. J. 1959. V. 26. P. 647–651.
- [40] E. Michael. G_δ -sections and compact-covering maps // Duke Math. J. 1969. V. 36. P. 125–127.
- [41] P. S. Novikoff. Sur les fonctions implicites mesurables B // Fund. Math. 1931. V. 17. P. 8–25.
- [42] П. С. Новиков. Теория множеств. Математическая логика и алгебра. Избранные труды. М.: Наука, 1979.
- [43] Ю. С. Очан. Обобщенная A -операция // Докл. АН СССР. 1941. Т. 33. № 6. С. 393–395.
- [44] Ю. С. Очан. Теория операций над множествами // УМН. 1955. Т. 10. № 3. С. 71–128.
- [45] А. В. Островский. К вопросу Л. В. Келдыш о структуре борелевских множеств // Матем. сб. 1986. Т. 131. № 3. С. 323–346.
- [46] Б. А. Пасынков. Об открытых отображениях // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 2. С. 292–295.
- [47] R. Pol. On category-raising and dimension-raising open mappings with discrete fibers // Colloq. Math. 1981. V. 44. № 1. P. 65–76.
- [48] В. И. Пономарев. О борелевских множествах в совершенно-нормальных бикомпактах // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170. № 3. С. 520–523.
- [49] C. A. Rogers, J. E. Jayne, C. Dellacherie, F. Topsoe, J. Hoffmann-Jørgensen, D. A. Martin, A. S. Kechris, A. H. Stone. Analytic Sets. London: Academic Press, 1980.
- [50] J. Saint-Raymond. Fonctions boreliennes sur un quotient // Bull. Sci. Math. (2). 1976. V. 100. № 2. P. 141–147.
- [51] A. H. Stone. Non-separable Borel sets // Rozprawy Math. 1962. V. 28.
- [52] А. Д. Тайманов. Об открытых образах борелевских множеств // Матем. сб. 1955. Т. 37. № 2. С. 293–300.
- [53] А. Д. Тайманов. О замкнутых отображениях. I // Матем. сб. 1955. Т. 36. № 2. С. 349–352.
- [54] А. Д. Тайманов. О замкнутых отображениях. II // Матем. сб. 1960. Т. 52. № 1. С. 579–588.
- [55] А. Д. Тайманов. О некоторых работах, связанных с дескриптивной теорией множеств и топологией // Труды МИАН. 1973. Т. 83. С. 203–213.
- [56] H. H. Wicke, J. M. Worrell, Jr. Open continuous images of certain kinds of M -spaces and completeness of mappings and spaces // General Topology and Appl. 1971. V. 1. № 1. P. 85–100.