Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Денисов, О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 4, 145–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1448>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:50:34

УДК 517.95

**О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ**

В. Н. ДЕНИСОВ

Статья посвящена обзору классических и новых результатов о стабилизации решений (задачи Коши и смешанных задач) для линейных параболических уравнений второго порядка. Приведены доказательства ряда новых результатов о точных достаточных условиях на поведение младших коэффициентов параболического уравнения, которые гарантируют стабилизацию решения задачи Коши для параболического уравнения в классе ограниченных или растущих начальных функций.

Библиография: 93 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	145
§ 1. О стабилизации решений параболических уравнений	147
§ 2. Некоторые свойства решений эллиптических уравнений	178
§ 3. Доказательство результатов п. 4° § 1	196
§ 4. О точности результатов п. 4° § 1	203
Список литературы	208

Введение

Настоящая работа посвящена обзору ряда вопросов, связанных с нелокальным поведением (при большом времени) решений задачи Коши и смешанных задач для параболических уравнений, в основном второго порядка.

Систематические исследования по качественной теории уравнений параболического типа стали возможными благодаря фундаментальным работам, посвященным обоснованию вопросов разрешимости задачи Коши и смешанных задач для таких уравнений и систем. Из громадного числа работ по корректности постановок упомянутых выше задач отметим работы С. Н. Бернштейна [1], И. Г. Петровского [2], А. Н. Тихонова [3], М. И. Вишика [4], А. М. Ильина, А. С. Калашникова и О. А. Олейник [5], О. А. Ладыженской [6], В. А. Ильина [7], В. А. Кондратьева [8], а также работы В. П. Михайлова [9] и С. Д. Эйдельмана [10]. Среди зарубежных ученых отметим фундаментальные работы Д. Аронсона и Дж. Серрина [11], Д. Аронсона [12], [13], А. Фридмана [14].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00138).

Одними из первых работ по качественному исследованию поведения при большом времени решений параболических уравнений являются работы А. Н. Тихонова [15] и А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского и Н. С. Пискунова [16]. В работе [15] изучалось поведение при $t \rightarrow \infty$ решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, а в работе [16] изучалось поведение при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для почти линейного параболического уравнения второго порядка с одной пространственной переменной. Обзор по обширной тематике, инициированный работой [16], содержится, например, в [17]. В настоящей работе мы рассмотрим случай линейных уравнений параболического типа. Будем говорить, что решение $u(x, t)$ задачи Коши или смешанной задачи для параболического уравнения стабилизируется в точке $x \in \mathbb{R}^N$, если в этой точке существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t). \quad (1)$$

Если предел (1) существует равномерно относительно x на компакте K в $\mathbb{R}^N$, то говорят о равномерной на K стабилизации. Если предел (1) существует равномерно относительно x во всем $\mathbb{R}^N$, то говорят, что $u(x, t)$ равномерно в $\mathbb{R}^N$ стабилизируется. Отметим, что исследование поведения при большом времени решений задачи Коши и смешанных задач (даже в случае уравнения теплопроводности) потребовало значительных усилий, и ответы на вопросы о необходимых и достаточных условиях стабилизации (даже задачи Коши для уравнения теплопроводности) получены сравнительно недавно [18]. Отметим особо работы [19] В. В. Жикова и [20] С. Л. Каменомостской (S. Kamn), в которых получены критерии поточечной (равномерной в $\mathbb{R}^N$) стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения второго порядка с дивергентной эллиптической частью без младших членов в случае, когда начальная функция $u(x, 0)$ является ограниченной (или, более обще, $u(x, 0) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$).

Одним из первых вопросы о достаточных условиях стабилизации решения задачи Коши и смешанных задач изучил М. Кржижанский [21]–[23], который применил метод, основанный на принципе максимума и построении соответствующих вспомогательных функций сравнения (барьеров). В работе А. М. Ильина [24] изучены достаточные условия на младшие коэффициенты параболического уравнения второго порядка, при выполнении которых решение задачи Коши стабилизируется к нулю при любой ограниченной начальной функции, стремящейся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. При этом установлено, что достаточные условия стабилизации в [24] являются неулучшаемыми.

Обзор работ по стабилизации решения задачи Коши и смешанных задач, выполненных до 1961 г., содержится в § 12 статьи [5]. В п. 4° § 1 настоящей работы будет приведен ряд результатов, которые являются развитием и уточнением результатов работ [5], [24].

Для случая, когда область содержит бесконечность, поведение решения первой и второй смешанной задачи (задачи Неймана) было исследовано в работах [25]–[28] для параболического уравнения второго порядка с дивергентной эллиптической частью и без младших членов. Отметим, что в вопросах стабилизации решения задачи Коши и смешанных задач для параболических уравнений большую роль играет наличие (или отсутствие) в соответствующем параболическом уравнении младших членов. В связи с этим обстоятельством развитие теории стабилизации решений параболических уравнений идет в основном по двум направлениям, в первом из которых изучаются условия на начальную функцию и старшие коэффициенты уравнения (и еще на об-

ласть, в случае смешанных задач), когда младшие коэффициенты уравнения *не влияют* на стабилизацию, а во втором направлении изучаются условия на младшие коэффициенты параболического уравнения, при которых решение стабилизируется при произвольной функции $u(x, 0)$ из некоторого класса единственности соответствующей задачи.

Отметим также, что в большинстве работ по стабилизации решений параболических уравнений накладывается жесткое требование ограниченности (или даже суммируемости по Лебегу) начальной функции в соответствующей области и требование ограниченности коэффициентов параболического уравнения. Вопросы о необходимых и достаточных условиях поточечной стабилизации решения задачи Коши (даже для уравнения теплопроводности) в случае растущих начальных функций (из класса А. Н. Тихонова [3] или степенного класса) были решены в работе [29] (см. также [30]). Влияние младших коэффициентов параболического уравнения на стабилизацию решения задачи Коши и смешанных задач в случае ограниченных начальных функций исследовано в работах Р. З. Хасьминского [31] и А. М. Ильина и Р. З. Хасьминского [32].

Точные достаточные условия на младшие коэффициенты параболического уравнения, гарантирующие стабилизацию решения задачи Коши с любой начальной функцией $u_0(x)$, растущей на бесконечности не быстрее некоторой фиксированной степени $|x|^m$, $m > 0$, были получены в работах [33]–[35].

В настоящее время отсутствуют обзорные работы, посвященные последовательно изложению всех основных фактов теории стабилизации решений параболических уравнений.

Обзор по работам, посвященным влиянию характеристик области и ее границы на стабилизацию решений смешанных задач (в основном задачи Неймана) для параболических уравнений без младших членов, можно найти в работах [36], [37]. Обзору работ по стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения без младших членов и с ограниченными или растущими начальными функциями посвящена работа [38].

Настоящую работу мы посвящаем обзору работ по стабилизации решений параболических уравнений, выполненных за последние десятилетия, которые находятся в области наших интересов и развивают результаты основателей и первых творцов этой замечательной ветви теории уравнений в частных производных.

В статье принята сквозная нумерация в каждом параграфе, а при ссылке на формулу (N_1) из § N_2 мы пишем (N_1, N_2) .

§ 1. О стабилизации решений параболических уравнений

1°. Определения и исходные факты. Приведем список применяемых далее обозначений:

$$x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N, \quad \mathbb{R}_+^1 = \{t : t > 0\}, \quad \overline{\mathbb{R}}_+^1 = \{t : t \geq 0\}, \\ \mathbb{R}_+^{N+1} = \{x, t : x \in \mathbb{R}^N, t > 0\}, \quad \overline{\mathbb{R}}_+^{N+1} = \{x, t : x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0\},$$

$H_{(t_1, t_2]} = \{x, t : x \in \mathbb{R}^N, t_1 < t \leq t_2\}$ – слой в $\mathbb{R}_+^{N+1}$, в частности, $H = H_{(0, T]}$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $B_R^{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < R\}$ – открытый шар с центром в $x = x_0$ радиуса R , $\overline{B}_R^{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \leq R\}$, в частности,

$B_R \equiv B_R^0$; объем шара $B_R^{x_0}$ в $\mathbb{R}^N$ вычисляется по формуле $|B_R^{x_0}| = R^N \omega_N N^{-1}$, где $\omega_N = 2\pi^{N/2}[\Gamma(N/2)]^{-1}$ – площадь сферы радиуса 1 в $\mathbb{R}^N$, $\Gamma(\nu)$ – интеграл Эйлера второго рода; $S_{\lambda_1}^{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^N : \frac{\lambda_1}{2} < |x - x_0| < 2\lambda_1\}$ – открытый шаровой слой в $\mathbb{R}^N$, в частности,

$$S_{\lambda_1} \equiv S_{\lambda_1}^0, \quad a(x) = a_{ik}(x) \quad (i, k = 1, \dots, N),$$

$a(x, t) = a_{ik}(x, t)$ ($i, k = 1, \dots, N$) – квадратные матрицы размера $N \times N$ с вещественными коэффициентами,

$$(a(x)\xi, \xi) = \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x)\xi_i\xi_k, \quad (a(x, t)\xi, \xi) = \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x, t)\xi_i\xi_k$$

– квадратичные формы, порождаемые матрицами $a(x)$ и $a(x, t)$ соответственно. Всегда будет предполагаться симметричность матриц $a(x)$ и $a(x, t)$, т.е.

$$a_{ik}(x) = a_{ki}(x), \quad a_{ik}(x, t) = a_{ki}(x, t) \quad (i, k = 1, \dots, N);$$

$\nabla V = (V_{x_1}, \dots, V_{x_N}) = \text{grad } V(x)$ – градиент скалярной функции $V(x)$,

$$\begin{aligned} V_{x_i} &\equiv \frac{\partial}{\partial x_i} V \quad (i = 1, \dots, N), \\ V_{x_i x_k} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} \quad (i, k = 1, \dots, N), \\ \text{div } V &= \sum_{i=1}^N V_{x_i}. \end{aligned}$$

Пусть Q – область в $\mathbb{R}^{N+1}$, под пространством $W_2^{1,0}(Q)$ будем понимать [12], [39] пополнение множества финитных функций $C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ по норме

$$\|f\|_{W_2^{1,0}(Q)} = \left[\int_Q (f^2(x, t) + (\nabla f, \nabla f)) \, dx \, dt \right]^{1/2},$$

где $(\nabla f, \nabla f)$ – скалярный квадрат вектора ∇f , (x, y) – скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$.

Аналогично, пространство $W_2^{1,1}(Q)$ есть пополнение множества финитных функций $C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ по норме [39]

$$\|f\|_{W_2^{1,1}(Q)} = \left[\int_Q (f^2(x, t) + f_t^2(x, t) + (\nabla f, \nabla f)) \, dx \, dt \right]^{1/2}.$$

Пусть $L(x)$ – оператор вида

$$L(x) = \sum_{i,k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \right), \quad a_{ik}(x) = a_{ki}(x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $a_{ik}(x)$ – измеримые и ограниченные функции в $\mathbb{R}^N$ и выполняется условие

$$\lambda^{-1}|\xi|^2 \leq (a(x)\xi, \xi) \leq \lambda|\xi|^2, \quad \lambda > 0, \quad |\xi|^2 = \sum_{i=1}^N \xi_i^2. \quad (2)$$

Будем рассматривать также оператор

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (3)$$

где на симметрическую матрицу $a_{ik}(x)$ наложены те же условия (2).

Если коэффициенты в (1) или в (3) зависят еще от t , т.е. $a_{ik}(x, t)$, то будем писать в (1) и в (3) $L(x, t)$, $\mathcal{L}(x, t)$, где $t \geq 0$, вместо $L(x)$ или $\mathcal{L}(x)$.

В $\mathbb{R}_+^{N+1}$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{i,k=1}^N (a_{ik}(x, t) u_{x_i})_{x_k} + \sum_{i=1}^N b_i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u - u_t = 0,$$

или, кратко,

$$L(x, t)u + (b(x, t), \nabla u) + c(x, t)u - u_t = 0, \quad (4)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad |u_0(x)| \leq M. \quad (5)$$

Всегда будем предполагать¹, что $\lambda^{-1}|\xi|^2 \leq (a(x, t)\xi, \xi) \leq \lambda|\xi|^2$ ($\lambda > 0$),

$$|b_i(x, t)| \leq M, \quad |c(x, t)| \leq M, \quad c(x, t) \leq 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}. \quad (6)$$

Под обобщенным решением задачи Коши (4), (5) в $\mathbb{R}_+^{N+1}$ будем понимать (см., например, [12], [39]) такую функцию $u(x, t)$, которая при всех $R > 0, T > 0$ принадлежит пространству $W_2^{1,0}(B_R \times (0, T))$ и при каждом $T > 0$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} [(a \nabla u, \nabla \eta) - \eta((b, \nabla u) + cu) - \eta_t u] dx dt = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \eta(x, 0) dx \quad (7)$$

при всех пробных функциях $\eta(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, носитель которых лежит в полупространстве $\{x, t : x \in \mathbb{R}^N, t < T\}$. Известно (см., например, [12], [39]), что если функция $u_0(x)$ является ограниченной (точнее, если $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$) и если ее норму обозначить через $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, то решение задачи Коши (4), (5) существует, ограничено и такое решение единственно и принадлежит $C(\mathbb{R}_+^{N+1})$ и

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Рассмотрим случай нелинейного уравнения, т.е. когда параболическое уравнение имеет вид

$$\sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x, t) u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^N b_i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u - u_t = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (8)$$

¹Более слабые условия см. в [12].

или, кратко,

$$\mathcal{L}(x, t)u + (b(x, t), \nabla u) + c(x, t)u - u_t = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (9)$$

где $u(x, t)$ – классическое решение (т.е. $u(x, t)$ непрерывна в $\overline{\mathbb{R}_+^{N+1}}$ и имеет непрерывные производные, входящие в (8)), удовлетворяющее уравнению (8) и начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad |u_0(x)| \leq M, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (10)$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены следующие условия (см., например, [14]) на коэффициенты уравнения (9):

- 1) оператор $\mathcal{L}(x, t)$ является параболическим в $H_{(0, T]}$ для любого $T > 0$, т.е. для каждой точки $(x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}$ выполнены неравенства (2);
- 2) коэффициенты уравнения (9) – непрерывные в $H_{(0, T]}$ функции, удовлетворяющие равномерному условию Гёльдера в $H_{(0, T]}$;
- 3) в $H_{(0, T]}$ выполнены неравенства (6),

и будем считать, что функция $u(x, t)$ в (9) имеет в $\mathbb{R}_+^{N+1}$ непрерывные производные по переменным x до второго порядка включительно и непрерывные производные первого порядка по t .

В работах [5], [14] установлено, что если $\mathcal{L}(x, t)$ – параболический оператор с непрерывными коэффициентами и выполнены условия

$$|a_{ik}(x, t)| \leq M, \quad |b_i(x, t)| \leq M, \quad c(x, t) \leq M(1 + |x|^2),$$

то существует не более одного решения задачи Коши (9), (10) в $H_{(0, T]}$, удовлетворяющего условию

$$|u(x, t)| \leq B \exp \{\beta |x|^2\} \quad (11)$$

с некоторыми постоянными $\beta > 0$ и $B > 0$.

Пусть $u(x, t)$ – решение задачи Коши (4), (5) (или (9), (10)). Будем говорить, что решение $u(x, t)$ стабилизируется в точке $x \in \mathbb{R}^N$, если существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = V(x). \quad (12)$$

Если предел (12) существует равномерно по $x \in \mathbb{R}^N$, то будем говорить, что решение $u(x, t)$ стабилизируется равномерно по $x \in \mathbb{R}^N$; если предел (12) существует равномерно по x на K , где K – произвольный компакт $K \subset \mathbb{R}^N$, то будем говорить, что решение $u(x, t)$ стабилизируется равномерно по x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

В $\mathbb{R}^N$ рассмотрим эллиптическое уравнение

$$\sum_{i, k=1}^N (a_{ik}(x) V_{x_k})_{x_i} + \sum_{i=1}^N b_i(x) V_{x_i} + c(x) V = 0,$$

или, кратко,

$$L(x)V + (b(x), \nabla V) + c(x)V = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^N. \quad (13)$$

Будем считать, что коэффициенты уравнения (13) – ограниченные и измеримые функции в $\mathbb{R}^N$, $a_{ik}(x) = a_{ki}(x)$ ($i, k = 1, \dots, N$) и выполнено условие эллиптичности (2). Под локальным решением уравнения (13) в $\mathbb{R}^N$ будем понимать решение

в стандартном определении [40]. Именно, функция $V(x)$ называется обобщенным решением уравнения (13) в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, если $V(x) \in W_2^1(\Omega^1) \cap L^\infty(\Omega^1)$, где Ω^1 – произвольная ограниченная подобласть $\Omega^1 \subset \Omega$ такая, что $\overline{\Omega^1} \subset \Omega$, и справедливо интегральное тождество

$$\int_{\Omega} [-(a \nabla V, \nabla \varphi) + \varphi((b, \nabla V) + cV)] dx = 0 \quad (14)$$

при любой пробной функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, имеющей компактный носитель в Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если коэффициенты уравнения (4) не зависят от t , т.е. уравнение имеет вид

$$L(x)u + (b(x), \nabla u) + c(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (15)$$

и решение задачи Коши (15), (5) стабилизируется равномерно по x в некоторой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, то легко видеть, что функция $V(x)$, определяемая в (12), удовлетворяет уравнению

$$L(x)V + (b(x), \nabla V) + c(x)V = 0, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^N, \quad (16)$$

в смысле интегрального тождества (14).

Путем замены $W(x, t) = u(x, t) - V(x)$, где $u(x, t)$ – решение задачи Коши (15), (5), а $V(x)$ – решение уравнения (13), мы сведем вопрос о существовании предела (12) к случаю, когда предельная функция в (12) является нулевой, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x, t) = 0. \quad (17)$$

Аналогичное замечание можно сделать и для случая, когда коэффициенты уравнения (4) равномерно по $x \in \mathbb{R}^N$ стремятся при $t \rightarrow \infty$ к предельным функциям, зависящим от x .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если коэффициенты уравнения (9) имеют предельные функции

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_{ik}(x, t) = a_{ik}(x), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} b_i(x, t) = b_i(x), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c(x, t) = c(x)$$

равномерно по x в некоторой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ и соответствующее эллиптическое уравнение

$$\mathcal{L}(x)V + (b(x), \nabla V) + c(x)V = 0$$

имеет классическое решение $V(x)$, определяемое для всех x из области Ω (в $\mathbb{R}^N$), и если это решение $V(x)$ ограничено вместе со своими производными, входящими в уравнение, то путем замены $W(x, t) = u(x, t) - V(x)$ мы сведем вопрос о существовании предела (12) в Ω (в $\mathbb{R}^N$) к вопросу о существовании нулевого предела (17) в Ω (в $\mathbb{R}^N$) [5].

2°. О стабилизации решений параболических уравнений с младшими членами. Недивергентный случай. В 1938 г. А. Н. Тихонов доказал [15], что если Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $G = \Omega \times (0, \infty)$ – прямой полуцилиндр с основанием Ω и $u(x, t)$ – решение первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности в цилиндре G :

$$\begin{aligned} \Delta u - u_t &= 0, \quad (x, t) \in G = \Omega \times (0, \infty), \\ u|_{\partial\Omega} &= \varphi(x), \quad t > 0, \quad u(x, 0) = 0, \end{aligned}$$

то решение $u(x, t)$ этой задачи стабилизируется в G равномерно по $x \in \Omega$ к функции $V(x)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = V(x),$$

которая является решением уравнения Лапласа в области Ω и принимает на границе $\partial\Omega$ значения функции $\varphi(x)$, т.е.

$$\Delta V = 0 \text{ в } \Omega, \quad V|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \quad (18)$$

В работе В. Фулкса [41] сформулированный выше результат А. Н. Тихонова был обобщен следующим образом.

Пусть $u(x, t)$ – решение уравнения теплопроводности в полуцилиндре G . Пусть при $t = 0$ $u(x, 0) = 0$, и пусть $\psi(x, t) \geq 0$ – непрерывная граничная функция $u|_{\partial\Omega} = \psi(x, t)$, $t > 0$, где $\psi(x, t)$ не убывает по t и сходится при $t \rightarrow +\infty$ к непрерывной функции $\varphi(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(x, t)$, $x \in \partial\Omega$. Тогда решение $u(x, t)$ положительно, не убывает по t и стабилизируется равномерно по $x \in \Omega$ к функции $V(x)$, являющейся решением задачи Дирихле (18) для уравнения Лапласа в области Ω .

В работе Р. Нарасимхана [42] исследован вопрос о достаточных условиях асимптотической устойчивости при $t \rightarrow \infty$ (обобщающей понятие асимптотической устойчивости, исследованной А. М. Ляпуновым для обыкновенных дифференциальных уравнений) решений первой краевой задачи для параболических систем второго порядка с коэффициентами, зависящими только от x . Асимптотическая устойчивость решений краевых задач для общих параболических уравнений второго порядка была также исследована в работе [43]. Уравнения в [42] и [43] содержат слабые нелинейности в правых частях.

В работе М. Кржижанского [21] доказано, что регулярное решение однородного параболического уравнения

$$a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u - u_t = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (19)$$

где $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $c(x, t) \leq 0$ и коэффициенты уравнения (19) непрерывны внутри полосы $\{x, t : 0 \leq x \leq 1, t \geq 0\}$, стабилизируется к нулю равномерно по $x \in [0, 1]$, если существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(0, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(1, t) = 0.$$

Аналогичный результат был установлен М. Кржижанским в [22] и для случая, когда уравнение (19) рассматривается в четверть-пространстве $\{x, t : 0 \leq x < \infty, t > 0\}$.

А. Фридман доказал [14], [44], [45] теоремы о равномерной стабилизации к нулю при $t \rightarrow +\infty$ решений краевых задач для параболического уравнения вида (9) с правой частью $f(x, t)$, рассматриваемых или в полуцилиндре, или в расширяющейся области и при условии, что граничные функции стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Там же сформулированы и доказаны теоремы, обобщающие сформулированный выше результат А. Н. Тихонова [15] и В. Фулкса [41] на случай неоднородного параболического уравнения.

В [5; § 12] дан обзор результатов о стабилизации решений задачи Коши и смешанных задач для параболических уравнений. Так как мы далее обобщим ряд результатов из [5], то для удобства читателя мы приведем ряд результатов из [5; § 12].

Предполагается, что коэффициенты уравнения (9) ограничены и коэффициент $c(x, t)$ удовлетворяет неравенству (6) и что рассматриваемые решения и $u_0(x)$ ограничены в $\overline{\mathbb{R}}_+^{N+1}$.

ТЕОРЕМА 1 [5; §12]. Пусть $u(x, t)$ является решением задачи Коши (9), (10) или решением уравнения (9) в цилиндре $G = \Omega \times (0, \infty)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющим начальному условию $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, и одному из граничных условий

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0, \quad (20)$$

или

$$l(u) \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + au \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0,$$

где $\partial\Omega \times (0, \infty)$ – боковая поверхность цилиндра G , $a(x) \leq 0$, ν – направление в $\mathbb{R}^N$, составляющее острый угол с внутренней нормалью к границе области Ω .

Пусть

$$c(x, t) \leq -C_0 < 0, \quad (21)$$

где C_0 – постоянная. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad (22)$$

равномерно по $x \in \Omega$.

В теореме 2 §12 работы [5] доказано, что для случая первой краевой задачи условие (21) можно отбросить. Пусть функция $u(x, t)$ удовлетворяет в цилиндре $G = \Omega \times (0, \infty)$ уравнению (9) (Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$), начальному условию $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, и пусть $u|_{\partial\Omega} = 0$ при $t > 0$, тогда существует предел (22), равномерный по $x \in \Omega$.

Если дополнительно потребовать, чтобы выполнялось условие

$$a(x, t) \leq -a_0 < 0 \quad \text{для } x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (23)$$

тогда, как доказано в теореме 3 §12 [5], решение уравнения (9), удовлетворяющее начальному условию $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, и на боковой поверхности цилиндра краевому условию

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + a(x, t)u \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0, \quad (24)$$

имеет предел (22) равномерно по $x \in \Omega$.

Таким образом, в теореме 1 можно отбросить условие (21) на коэффициент $c(x, t)$, если выполнено условие (23). При доказательстве указанных теорем 1–3 из [5; §12] применяется принцип максимума в ограниченной области для смешанных задач и принцип максимума для полосы $H(0, T]$ в случае задачи Коши. Соответствующие варианты принципа максимума доказаны в [5; §1].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теоремах 2 и 3 [5; §12] условия удовлетворения $u(x, t)$ уравнению (9) в цилиндре $G = \Omega \times (0, \infty)$ и соответственно условиям (20) или (24) можно заменить на условия удовлетворения функцией $u(x, t)$ следующим неравенствам (теорема 2):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, t)u + (b(x, t), \nabla u) + c(x, t)u - u_t &\leq 0 \quad \text{в } G, \\ u|_{\partial\Omega} &\geq 0, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (25)$$

или неравенствам (теорема 3)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, t)u + (b(x, t), \nabla u) + c(x, t)u - u_t &\leq 0 \quad \text{в } G, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + a(x, t)u \Big|_{\partial \Omega} &\leq 0, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (26)$$

тогда предел (22) в утверждениях этих теорем следует заменить на следующий предел:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\inf_x u(x, t) \right] \geq 0.$$

Это замечание основано на том факте, что принцип максимума в цилиндре $G = \Omega \times (0, \infty)$ справедлив не только для решений $u(x, t)$ уравнения (9), но и для функций $u(x, t)$, которые являются суперпараболическими функциями, т.е. удовлетворяют неравенствам (25) или (26).

В работе [46] установлен принцип максимума для суперпараболических функций, понимаемых и в слабом смысле, т.е. когда соответствующие неравенства трактуются в интегральном смысле.

В теореме 4 (см. [5; § 12]) доказано, что если $u(x, t)$ – решение задачи Коши (9), (10) с ограниченной начальной функцией $u_0(x)$ и если существует такая положительная в $\mathbb{R}^N$ функция $V(x)$, что

$$\mathcal{L}(x, t)V + (b(x, t), \nabla V) + c(x, t)V \leq 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (27)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty, \quad (28)$$

то $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ равномерно по x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Утверждение теоремы 4 носит условный характер, ибо требуется указать условия на коэффициенты уравнения (9), которые гарантировали бы существование функции $V(x) > 0$, удовлетворяющей соотношениям (27) и (28).

С этой целью была установлена теорема 5 (см. [5; § 12]), которая утверждает, что если $u(x, t)$ – ограниченное решение задачи Коши (9), (10) с ограниченной начальной функцией, коэффициент $c(x, t)$ удовлетворяет неравенству $c(x, t) \leq -C_0 < 0$ для всех $x \in G_1$, где G_1 – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, и существует положительная функция $V(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, удовлетворяющая соотношению (27) при $|x| \geq R$, $t > 0$ и такая, что выполнено условие (28), то $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ равномерно по x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Легко видеть, что достаточным условием существования функции $V(x)$ в теореме 5 с требуемыми свойствами является расходимость следующего интеграла:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^\infty r \exp \left(- \int_{r_0}^r \frac{q(y)}{y} dy \right) dr = +\infty,$$

где

$$q(y) = \sup_{\substack{|x|=y \\ t>0}} \frac{\sum_{i=1}^N a_{ii}(x, t) + b_i(x, t)x_i}{\sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x, t)(x_i x_k / y^2)},$$

при этом в качестве функции $V(|x|)$ в теореме 5 следует взять функцию

$$V(|x|) = \int_R^{|x|} r \exp \left\{ - \int_{r_0}^r \frac{q(y)}{y} dy \right\} dr.$$

Известно, что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности $\Delta u - u_t = 0$ с начальной функцией $u(x, 0) = u_0(x)$, которая стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$, само стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ (см. [24]).

Тот же результат имеет место и для уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i,k=1}^N a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^N b_i u_{x_i} + cu - u_t = 0$$

при условии, что $c \leq 0$. Это легко следует из явной формулы для решения. Однако подобное утверждение о существовании предела $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ решения задачи Коши (9), (10) уже не имеет места для параболического уравнения (9) с переменными коэффициентами, даже если выполнено условие $c(x, t) \leq 0$.

В работе А. М. Ильина [24] установлена следующая теорема: если $u(x, t)$ является решением уравнения (9), удовлетворяющим условиям

- 1) $u(x, 1) = u_0(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$;
- 2) уравнение (9) является равномерно параболическим (т.е. выполнено неравенство (2));
- 3) коэффициенты $b_i(x, t)$ ограничены в полосе $H_{[1, T]}$ при любом $T > 1$, $|b_i(x, t)| \leq M$ при $|x| \leq r_0$, $r_0 > 0$;
- 4) $\sum_{i=1}^N [a_{ii}(x, t) + x_i b_i(x, t)] > \delta > 0$ для любого $t > 1$ и $|x| \geq r_0 > 0$;
- 5) $c(x, t) \leq 0$, $(x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}$,

то $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ равномерно по x в $\mathbb{R}^N$.

В [24] на примерах показано, что при невыполнении хотя бы одного из перечисленных условий 1)–5) теоремы утверждение может оказаться неверным.

При доказательстве этой теоремы в [24] был установлен обобщенный принцип максимума, в условиях которого требуется, чтобы ограниченная функция $u(x, t)$ удовлетворяла неравенству (25) всюду в области $G = \Omega \times (0, T)$, кроме конечного числа поверхностей S_k ($k = 1, \dots, m$), при этом функция $u(x, t)$ должна быть непрерывной в замкнутой области $\bar{G}$ и иметь нормальные производные на поверхностях S_k по обе стороны этих поверхностей так, чтобы выполнялось следующее условие на скачок нормальной производной:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_+} < \frac{\partial u}{\partial \nu_-}. \quad (29)$$

При этом сохраняется классическое доказательство принципа максимума (см. [5; §1, теоремы 1, 8, 9]). Отметим только, что функция $u(x, t)$ в силу (29) не может принимать на поверхностях S_k минимальное значение.

Подобным образом можно ослабить и условия теоремы 4 из [5; §12] и взять в качестве $V(x)$ непрерывную функцию, удовлетворяющую неравенству (25) всюду, кроме конечного числа поверхностей S_k ($k = 1, \dots, m$), на которых выполняются неравенства (29).

Используя методику работы [21], Ю. Н. Черемных установил [47] в одномерном случае точные по порядку оценки при $t \rightarrow \infty$ решения первой краевой задачи для уравнения (19) в криволинейном цилиндре с нулевыми граничными условиями. В эти оценки входит интеграл от величины, обратной квадрату переменной по t ширины $\psi(t)$ соответствующей полуполосы.

Сформулируем один из результатов работы [47].

Рассмотрим уравнение (19), заданное в области G , граница которой $(\overline{G} \setminus G)$ состоит из отрезка $a \leq x \leq b$ оси x , прямой $x = 0$ и гладкой кривой $x = \psi(t)$, $t \geq 0$, для которой:

$$1) \ \psi(t) \in C^{(1)} \quad (t \geq 0); \quad 2) \ 0 < \psi(t) \leq 1; \quad 3) \ -\frac{B}{4H} \leq \psi' \leq 0,$$

и пусть $u(x, t)$ – решение уравнения (19) в G и выполнены условия

$$u(0, t) = u(x, t)|_{x=\psi(t)} = 0 \quad \text{при} \quad t \geq 0.$$

Тогда в области G имеет место оценка

$$|u(x, t)| \leq 2 \max_{0 \leq x \leq \psi(0)} |u(x, 0)| \exp \left\{ -\frac{a_0}{2H} \int_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)} \right\}.$$

В работе [47] установлен целый ряд точных результатов об асимптотике при $t \rightarrow \infty$ решения первой краевой задачи в криволинейных по t областях, а также приведены примеры, показывающие точность полученных в [47] результатов.

Большой интерес представляет случай, когда коэффициенты $b_i(x, t)$ уравнения (9) (или (19)) отличны от нуля и функция $\psi(t)$ стремится к бесконечности. Первый результат в случае гладких коэффициентов и одной пространственной переменной получен в работе [47]. В этой работе показано, что возможно логарифмическое расширение G области при $t \rightarrow \infty$. Окончательный результат принадлежит А. М. Ильину [48], который доказал, что $\psi(t)$ должно расти не быстрее чем логарифмически (см. [48; теоремы 1, 3]).

В работе Р. З. Хасьминского [31] была дана классификация дифференциальных операторов вида

$$p(x) = \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (30)$$

относительно принадлежности оператора $p(x)$ одному из классов (A_1) , (A_2) , (A_3) (определения (A_i) , $i = 1, 2, 3$, мы приводим ниже) и установлена связь между стабилизацией решения задачи Коши вида

$$p(x)u + c(x)u - u_t = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (31)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (32)$$

и принадлежностью оператора $p(x)$ одному из классов (A_i) , $i = 1, 2, 3$.

Предполагается, что

$$(a(x), \xi, \xi) \geq \gamma(x)|\xi|^2,$$

где $\gamma(x) > 0$ и $\gamma(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^N$, $c(x) \leq 0$.

Пусть Ω – некоторая ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Будем говорить, что оператор $p(x)$ (30) принадлежит классу (A_1) , если для области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ существует не менее двух различных ограниченных решений внешней задачи Дирихле для эллиптического уравнения $p(x)u = 0$. Оператор $p(x)$ принадлежит классу (A_2) , если $p(x) \notin (A_1)$ и уравнение $p(x)u = -1$ не имеет положительного решения в $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Оператор $p(x)$ принадлежит классу (A_3) , если $p(x) \notin (A_1)$ и $p(x) \notin (A_2)$.

Примером оператора из класса (A_2) может служить оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$. Оператор Лапласа в $\mathbb{R}^N$ при $N \geq 3$ дает пример оператора класса (A_1) . Примером оператора $p(x)$ из класса (A_3) может служить оператор

$$p(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \operatorname{arctg} x \frac{\partial}{\partial x}.$$

В работе [31] установлены следующие утверждения.

Пусть $u(x, t)$ является ограниченным решением задачи Коши (31), (32), и пусть $u_0(x)$ является финитной. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $p(x) \in (A_1)$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^\infty |u(x, t)| dt < \infty;$$

б) если $p(x) \in (A_2)$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0,$$

но при $c(x) \equiv 0$ и $u_0(x) \geq 0$

$$\int_0^\infty u(x, t) dt = \infty.$$

Пусть начальная функция $u_0(x)$ ограничена (но может быть не финитна), тогда:

в) если $p(x) \in (A_3)$ и $c(x) \equiv 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) l(x) dx,$$

где $l(x) > 0$ – единственное решение сопряженного уравнения $p^*(x) l(x) = 0$, для которого

$$\int_{\mathbb{R}^N} l(x) dx = 1;$$

г) если $p(x) \in (A_2)$ или $p(x) \in (A_3)$, $c(x) \leq 0$ и $c(x) \not\equiv 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0.$$

Таким образом, в случае, когда коэффициенты уравнения (31) не зависят от t , сформулированные выше утверждения дают достаточно полную классификацию поведения решений при $t \rightarrow \infty$, по крайней мере для случая финитных функций $u_0(x)$. Но если коэффициенты уравнения (31) зависят еще и от t , то картина зависимости поведения решения от коэффициентов уравнения оказывается более сложной. Это видно из цитируемых ниже результатов работы [32].

В работе [32] А. М. Ильина и Р. З. Хасьминского получены достаточные условия на коэффициенты уравнения (9), при выполнении которых остаются верными утверждения, аналогичные приведенным выше результатам а)–г) работы [31].

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$p(x, t) = \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^N b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (33)$$

Предположим, что выполнено условие

$$(a(x, t)\xi, \xi) \geq \gamma(x)|\xi|^2, \quad (34)$$

где $\gamma(x) > 0$ – непрерывная функция в $\mathbb{R}^N$, $c(x, t) \leq 0$,

$$|a_{ik}(x, t)| \leq M(1 + |x|^2), \quad |b_i(x, t)| \leq M(1 + |x|) \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

В теореме 1 работы [32] установлено, что если существует функция $V = V(|x|) > 0$ такая, что

$$p(x, t)V \leq 0 \quad \text{при } |x| \geq R > 0 \text{ и каждом } t > 0, \quad (35)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(|x|) = 0, \quad (36)$$

то существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ решения задачи Коши (9), (10) равномерно по x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Достаточным условием существования функции $V(|x|)$, удовлетворяющей (35) и (36), является сходимость следующего интеграла:

$$\int_{r_0}^{\infty} r \exp \left\{ - \int_{r_0}^r g(y) dy \right\} dr < \infty,$$

где

$$g(y) = \inf_{\substack{|x|=y \\ t \geq 0}} \frac{\sum_{i=1}^N (a_{ii}(x, t) + b_i(x, t)x_i)}{\sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x, t)(x_i x_k / y^2)}.$$

При этом, как легко видеть, функция

$$V(|x|) = \int_{|x|}^{\infty} r \exp \left\{ - \int_{r_0}^r g(y) dy \right\} dr$$

удовлетворяет условиям (35), (36).

Предполагая, что для некоторых ограниченных областей Ω и Ω_1 из $\mathbb{R}^N$ таких, что $\Omega \subset \Omega_1$, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} c(x, t) &< -C_0 < 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \\ c(x, t) &\equiv 0 \quad \text{при } x \in \Omega_1 \setminus \Omega, \end{aligned}$$

авторы [32] устанавливают теорему 2, в которой утверждается, что решение задачи Коши (9), (10) имеет предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) > 0,$$

если существует функция $V(|x|)$ такая, что выполнены условия (35) и (36) и $\inf u_0(x) > 0$.

Если же $u(x, t)$ – решение задачи (31), (32) и $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_0(x) = k$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = V(x),$$

где $V(x)$ – единственное решение эллиптического уравнения

$$p(x)V(x) + c(x)V(x) = 0,$$

для которого существует предел $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = k$.

Основным результатом работы [32] являются следующие теоремы 3 и 3'.

ТЕОРЕМА 3 [32]. Если $u(x, t)$ – решение уравнения (9) при $c(x, t) \equiv 0$ и $u(x, 0) = u_0(x)$, где $u_0(x)$ – ограниченная функция, и при $|x| \geq R_0$ и $t \geq 0$ существует функция $V(|x|, t)$, для которой:

- 1) $\left(p(x, t - t_0) - \frac{\partial}{\partial t}\right)V(|x|, t) \leq 0$;
- 2) $V(|x|, 0) \geq 1$;
- 3) $\int_0^\infty V(|x|, t) dt < \infty$,

то $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \mu$, где μ – постоянная, причем $\mu > 0$, если $u_0(x) \geq 0$, и сходимость равномерна на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

В [32] указаны достаточные условия (в терминах коэффициентов уравнения (9)), при выполнении которых легко построить функцию $V(x, t)$, удовлетворяющую требованиям 1)–3) теоремы 3.

ТЕОРЕМА 3' [32]. Если $u(x, t)$ – решение уравнения (9) при $c(x, t) \equiv 0$, коэффициенты $a_{ik}(x, t)$ уравнения (9) ограничены всюду при $t \geq t_0$ и

$$\sum_{i=1}^N [a_{ii}(x, t) + b_i(x, t)x_i] < -\beta < 0, \quad (37)$$

то существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \mu$$

решения задачи Коши (9), (10), равномерный по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$, причем $\mu > 0$, если $u_0(x) \geq 0$ в $\mathbb{R}^N$.

В работе [32] доказана также теорема, устанавливающая связь результатов о стабилизации решения задачи Коши (9), (10) с предельным поведением при $y \rightarrow +\infty$ решения эллиптического уравнения в полупространстве $\mathbb{R}_+^{N+1} = \{x \in \mathbb{R}^N : y > 0\}$:

$$a_1(y)V_{yy} + b(y)V_y + p(x)V + c(x)V = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (38)$$

удовлетворяющего граничному условию

$$V(x, 0) = V_0(x), \quad (39)$$

где $V_0(x)$ – непрерывная и ограниченная в $\mathbb{R}^N$ функция, $p(x)$ определено в (30). Здесь считается, что $a_1(y) > 0$, а $b(y)$ удовлетворяет условию Гёльдера при всех $y > 0$.

ТЕОРЕМА 7 [32]. Пусть для решения задачи Коши

$$\begin{aligned} p(x)u + c(x)u - u_t &= 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N, \\ u|_{t=0} &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \mu$ для каждого $x \in \mathbb{R}^N$, где $p(x)$ определено в (30). Если выполнены условия

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^t \frac{b(y)}{a_1(y)} dy\right\} dt &= \infty, \\ \int_0^\infty dt \int_t^\infty \frac{1}{a_1(u)} \exp\left\{\int_t^u \frac{b(s)}{a_1(s)} ds\right\} du &= \infty, \end{aligned}$$

то для решения задачи (38), (39) существует предел

$$\lim_{y \rightarrow \infty} V(x, y) = \mu.$$

В работе [49] изучалось поведение при большом времени t положительных решений линейного параболического неравенства

$$p(x, t)u + c(x, t)u - u_t \leq 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (40)$$

где оператор $p(x, t)$ определен в (33), при условии, что коэффициент $c(x, t)$ *положителен* для некоторых значений (x, t) в $\mathbb{R}_+^{N+1}$, при этом в [49] устанавливались теоремы о достаточных условиях на поведение коэффициентов в неравенстве (40), при выполнении которых решение $u(x, t)$ этого неравенства не стабилизируется в том смысле, что справедливо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = +\infty. \quad (41)$$

В [49] установлен результат (теорема 1), согласно которому если выполнены следующие условия:

- 1) существует положительная и непрерывная в $\mathbb{R}^N$ функция $\gamma(x)$, для которой имеют место неравенства (34),
- 2) $|a_{ik}(x, t)| \leq M(x)$, $|b_i(x, t)| \leq M(x)$, где $M(x)$ – некоторая положительная и непрерывная в $\mathbb{R}^N$ функция,
- 3) существует функция $V(x) > 0$, удовлетворяющая условиям

$$p(x, t)V \leq 0 \quad (42)$$

при достаточно больших x , $|x| \geq R$, и всех $t > 0$ и

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty, \quad (43)$$

- 4) коэффициент $c(x, t)$ удовлетворяет неравенству $c(x, t) \geq C_1$ при $|x| < \delta$, где $C_1 > 0$, $\delta > 0$,
- 5) функция $u(x, t)$ является решением неравенства (40) и $u(x, 0) \neq 0$,

то справедливо предельное соотношение (41).

Более точно, существуют функция $\psi(x) > 0$ и число $\beta > 0$, для которых справедливо неравенство

$$u(x, t) \geq \psi(x) \exp(\beta t) \quad \text{при } t \geq 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно терминологии, введенной Н. Мейерсом и Дж. Серрином [50], функцию $V(x) > 0$, удовлетворяющую условиям (42) и (43), называют антибарьером, отвечающим неравенству (40) (или уравнению (9)) на бесконечности.

Если функция $V(x) > 0$ удовлетворяет условиям (35) и (36), то эту функцию $V(x)$ называют барьером, отвечающим неравенству (40) (или уравнению (9)) на бесконечности [50].

В случае оператора Лапласа барьер существует при $N \geq 3$, а антибарьер – при $N = 1, 2$.

Итак, в работе [49] (теорема 1) доказано, что если антибарьер существует и $c(x, t) \geq 0$, $c(x, t) \neq 0$, то положительное решение неравенства (40) стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$ экспоненциально.

Если для уравнения (9) существует барьер, то это утверждение, вообще говоря, неверно (см. [49; теорема 4]), и если дополнительно предположить, что коэффициент $c(x, t)$ является достаточно большим, то (см. [49; теорема 2]) справедливо предельное равенство (41).

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя понятие барьера (антибарьера) для уравнения (9), мы могли бы дать другую, эквивалентную, переформулировку теорем 4 и 5 из §12 работы [5] и теорем 1 и 2 из работы [32] в терминах существования антибарьера (или соответственно барьера) для уравнения (9). Мы этого не будем делать и отметим только, что понятие антибарьера было впервые введено в работе М. Кржижанского [51] и затем с успехом использовалось в качественной теории уравнений в частных производных другими авторами, среди которых мы особо выделим работы С. Симоды и М. Нагумо [52], а также Н. Мейерса и Дж. Серрина [50] и работу П. Бесала и Р. Файфа [49] и Т. Кузано [53].

Далее мы обобщим концепцию антибарьера, перенеся это понятие с классических решений суперпараболических неравенств на обобщенные решения соответствующих суперпараболических неравенств с дивергентной эллиптической частью. Это мы сделаем ниже, в п. 4° настоящего параграфа.

3°. О необходимых и достаточных условиях стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений с младшими членами. В работе В. В. Жикова [54] рассмотрены параболические уравнения, коэффициенты которых либо суть гладкие периодические функции аргументов x и t , либо не зависят от t и являются квазипериодическими функциями аргумента x .

В работе [54] изучены следующие задачи Коши:

$$L(x, t)u + (b(x, t), \nabla u) - u_t = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (44)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad (45)$$

и

$$L(x, t)u + (b(x, t), \nabla u) + c(x, t)u - u_t = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (46)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (47)$$

Предполагается, что выполнено условие (2) параболичности и что решения задач (44), (45) и (46), (47) являются ограниченными функциями в $\mathbb{R}_+^{N+1}$.

Наряду с задачами (44), (45), в [54] рассмотрен и ее частный случай

$$\mathcal{L}(x, t)u - u_t = 0, \quad (48)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (49)$$

Как отмечено в [54], одной из желательных формулировок задач об асимптотике и стабилизации является следующая: найти параболический оператор

$$B = \sum_{i, k=1}^N \hat{a}_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t} \quad (50)$$

с постоянными коэффициентами $\hat{a}_{ik}$, λ_i и периодическую функцию $\rho(x)$ такие, что если $V(x, t)$ является решением задачи Коши

$$BV = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (51)$$

$$V(x, 0) = \rho(x)u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (52)$$

то для любого начального значения $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(x, t) - V(x, t)) = 0, \quad (53)$$

т.е. имеет место теорема о равностабилизации решений задач Коши (44), (45) и (51), (52).

При дополнительных условиях, при которых вектор $b = (b_1, \dots, b_N)$ мало отличается от постоянного, т.е. имеет вид $b = b^1 + \varepsilon$, где b^1 – постоянный вектор, $\varepsilon > 0$ – достаточно малое, такие результаты о равностабилизации (53) имеют место.

Предполагается [54], что коэффициенты уравнений (44) и (46) являются достаточно гладкими и периодическими с периодом единица по каждому аргументу $(x_1, \dots, x_N, t)$.

ТЕОРЕМА 1 [54]. Пусть вектор $b = (b_1, \dots, b_N)$ мало отличается от постоянного вектора b^1 . Тогда найдутся параболический оператор вида (50) с постоянными коэффициентами и гладкая периодическая функция $\rho(x)$ такие, что если $u(x, t)$ – решение задачи (44), (45), а $V(x, t)$ – решение задачи (51), (52), то имеет место предельное соотношение (53).

ТЕОРЕМА 2 [54]. Пусть вектор $b = (b_1, \dots, b_N)$ мало отличается от постоянного, а функция $s(x, t)$ мало отличается от константы. Тогда существуют параболический оператор B вида (50) с постоянными коэффициентами, вещественное число μ и гладкие периодические положительные функции $\rho(x)$, $q(x, t)$ такие, что если $u(x, t)$ – решение задачи (46), (47), а $V(x, t)$ – решение задачи (51), (52), то имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |e^{\mu t} u(x, t) - q(x, t) V(x, t)| = 0. \quad (54)$$

Теоремы о равностабилизации позволяют найти критерий стабилизации, изучив “методом усреднения”, принадлежащего В.В. Жикову [19], решение задачи Коши (51), (52) с постоянными коэффициентами.

На этом пути в [54] получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 3 [54]. Для решения задачи Коши (44), (45) предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = l \quad \text{при каждом } x \in \mathbb{R}^N \quad (55)$$

существует тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\int_{(B_1 y, y) \leq R^2} \rho(y) u_0(x + y) dy}{\int_{(B_1 y, y) \leq R^2} \rho(y) dy}, \quad (56)$$

где B_1 – матрица, обратная матрице $\hat{a}_{ik}$ оператора (50), (x, y) – скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$.

Аналогичная теорема справедлива и для решения задачи (46), (47), при этом предел (53) заменяется на предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mu t} u(x, t) q^{-1}(x, t) = l.$$

В работе [54] получены результаты и для квазипериодических коэффициентов. В этом случае уравнения считаются стационарными, т.е. коэффициенты не зависят от t .

Переходя к формулировке этих результатов, напомним, что функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_N)$ называется квазипериодической, если она допускает представление

$$f(x) = \varphi(\omega^1 \cdot x, \dots, \omega^m \cdot x),$$

где $\varphi(y_1, \dots, y_m)$ – непрерывная периодическая (с периодом единица по каждому аргументу $y_1, \dots, y_m$) функция, $\omega^1, \dots, \omega^m$ – элементы из $\mathbb{R}^N$, $\omega^i \cdot x = \omega_1^i x_1 + \dots + \omega_N^i x_N$. Частоты $\omega^1, \dots, \omega^m$ можно считать рационально независимыми в том смысле, что $k_i \omega_j^i \neq 0$ для любого $j = 1, \dots, N$ и любого целочисленного вектора $k = (k_1, \dots, k_m) \neq 0$. Следствием независимости является равенство

$$\langle f \rangle = \langle \varphi \rangle,$$

где $\langle f \rangle$ – среднее значение почти периодической функции f , $\langle \varphi \rangle$ – среднее значение периодической функции φ .

В [54] установлен следующий результат.

ТЕОРЕМА 4 [54]. Пусть $u(x, t)$ – решение задачи Коши

$$\sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x) u_{x_i x_k} - u_t = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N), \quad (57)$$

а матрица $\{a_{ik}(x)\}$ квазипериодична и мало отличается от постоянной. Тогда найдутся квазипериодическая функция $\rho(x)$ и положительно определенная постоянная матрица $\{\hat{a}_{ik}\}$ такие, что если $V(x, t)$ есть решение задачи Коши

$$\sum_{i,k=1}^N \hat{a}_{ik} V_{x_i x_k} - V_t = 0, \quad V(x, 0) = \rho(x) u_0(x), \quad (58)$$

то имеет место равенство (53).

В задачах, связанных с квазипериодическими функциями, обычно накладывается дополнительное условие на частоты ω^i , а именно требование

$$|k_i \omega_j^i| \geq C^{-1} |k|^{-\tau} \quad (j = 1, \dots, m), \quad (59)$$

где C и τ – положительные постоянные, $k = (k_1, \dots, k_m)$ – любой ненулевой целочисленный вектор.

В теореме 4 такого рода условия не накладываются, однако рассмотрение уравнений с младшими членами неизбежно приводит к условиям (59).

ТЕОРЕМА 5 [54]. Пусть коэффициенты a_{ik} , b_i , c являются квазипериодическими и выполнено условие (59), b_i и c мало отличаются от констант. Тогда найдутся параболический оператор с постоянными коэффициентами вида (50), вещественное число μ и квазипериодическая функция $\rho(x)$ такие, что если $u(x, t)$ – решение задачи Коши (46), (47), $V(x, t)$ – решение задачи Коши (51), (52), то имеет место соотношение (54). При этом если $c \equiv 0$, то $\mu = 0$.

В работе К. В. Валикова [55] теоремы, доказанные В. В. Жиковым в [54], распространены на некоторые уравнения параболического типа с младшими коэффициентами при меньших ограничениях.

Сформулируем основные результаты работы [55].

В полупространстве $\mathbb{R}_+^{N+1}$ рассматривается уравнение

$$\sum_{i,k=1}^N a_{ik}(t) u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^N b_i(x, t) u_{x_i} - u_t = 0 \quad (60)$$

с измеримыми ограниченными коэффициентами $a_{ik}(t) = a_{ki}(t)$, $b_i(x, t)$ и начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (61)$$

где $u_0(x)$ – измеримая функция, $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Предполагается выполненным условие (2) равномерной параболичности.

Пусть $Q = \Omega \times (0, T)$, Ω – область в $\mathbb{R}^N$. Вводится банахово пространство $L_{q,r}(Q)$ ($q, r \in [2, +\infty)$) измеримых в Q функций $u(x, t)$ с нормой

$$\|u\|_{q,r} = \left[\int_0^T \left(\int_\Omega |u(x, t)|^q dx \right)^{r/q} dt \right]^{1/r}. \quad (62)$$

Предполагается [55], что коэффициенты $b_i(x, t)$ имеют вид

$$b_i(x, t) = b_{i,1}(x, t) + b_{i,2}(x, t),$$

где

$$b_{i,1}(x, t) \in L_{q,r}(\mathbb{R}_+^{N+1}), \quad \frac{N}{2q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} |b_{i,2}(x, t)| &\leq b(x) \in L_N(\mathbb{R}^N) \quad \text{при } N \geq 3, \\ b_{0,2}(x, t) &= 0 \quad \text{при } N = 1, 2. \end{aligned} \quad (64)$$

В формулируемых ниже теоремах 1 и 2 из [55] предполагается, что число

$$\mu_0 = \|b\|_{N, \mathbb{R}^N}$$

удовлетворяет условию малости

$$\mu_0 < \frac{N-2}{N^2(2N-2)\lambda} \quad \text{при } N \geq 3,$$

где λ – постоянная из неравенства (2).

ТЕОРЕМА 1 [55]. Пусть постоянные $\widehat{a}_{ik}$ такие, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R a_{ik}(t) dt = \widehat{a}_{ik}. \quad (65)$$

Тогда для существования поточечного в $\mathbb{R}^N$ предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = l \quad (66)$$

решения задачи (60), (61) необходимо и достаточно, чтобы существовал предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\det B}}{\omega_N R^N} \int_{(Bx, x) < R^2} u_0(y) dx = l,$$

где B – матрица, обратная матрице $\widehat{a}_{ik}$ (65), (x, y) – скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$.

В теореме 2 из [55] на $a_{ik}(t)$ не налагается никаких ограничений, кроме измеримости и равномерной параболичности, однако от коэффициентов $b_i(x, t)$ дополнительно требуется, чтобы $b_{i,2}(x, t) \equiv 0$ для всех размерностей.

ТЕОРЕМА 2 [55]. Для равномерной стабилизации $u(x, t)$ задачи (60), (61) к постоянной l (66) необходимо и достаточно, чтобы равномерно по $\beta \in \mathbb{R}^N$ существовал предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^N} \int_{\beta + K_R} u_0(x) dx = l,$$

где K_R – куб в $\mathbb{R}^N$, $K_R = \{x : x \in \mathbb{R}^N, 0 < x_i < R, i = 1, \dots, N\}$, $\beta + K_R$ – сдвиг на вектор β куба K_R .

Ограничения (63), (64) в размерностях один и два, а в теореме 2 и во всех размерностях оставляют в стороне уравнения с независимыми от t коэффициентами b_i . При $N \geq 2$ вместо (60) в [55] рассмотрено уравнение

$$\Delta u + \sum_{i=1}^N b_i(x) u_{x_i} - u_t = 0, \quad (67)$$

в котором вектор $b(x) = (b_1(x), \dots, b_N(x))$ потенциален, т.е. имеет вид

$$b(x) = \text{grad } B(x),$$

где $B(x)$ – ограниченная в $\mathbb{R}^N$ функция и $B(x) \in W_2^{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Положим $c(x) = \exp B(x)$.

ТЕОРЕМА 3 [55]. Пусть функция $B(x)$ имеет на бесконечности радиальный предел

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} B(\omega x) = \overline{B}(\varphi),$$

для почти всех x на единичной сфере в $\mathbb{R}^N$, φ – совокупность угловых координат в $\mathbb{R}^N$. Для существования точечного в $\mathbb{R}^N$ предела (66) задачи Коши (67), (61) необходимо и достаточно, чтобы существовал предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^{-N} \int_{|x| < R} c(x) u_0(x) dx}{R^{-N} \int_{|x| < R} c(x) dx} = l.$$

ТЕОРЕМА 4 [55]. Для существования равномерного в $\mathbb{R}^N$ предела (66) решения задачи Коши (67), (61) необходимо и достаточно, чтобы равномерно по $\beta \in \mathbb{R}^N$ существовал предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\int_{\beta+K_R} c(x) u_0(x) dx}{\int_{\beta+K_R} c(x) dx} = l.$$

Рассмотрим одномерное уравнение

$$(a(x)u_x)_x + b(x)u_x - c(x)u_t = 0 \quad (68)$$

в предположении равномерной параболичности

$$c(x) \geq \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda^{-1} \leq a(x) \leq \lambda, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \lambda > 0,$$

и при условии $b(x) \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^1)$.

Положим

$$\begin{aligned} h(x) &= \exp \int_0^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi, \quad p(x) = c(x)h(x), \\ q(x) &= a(x)h(x), \quad r(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{q(\xi)} \end{aligned}$$

и обозначим через $s(x)$ функцию, обратную к $r(x)$. Допустим, что функция $h(x)$ ограничена в $\mathbb{R}^1$.

ТЕОРЕМА 5 [55]. Пусть выполнено условие

$$\lim_{R \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{r(R)} \int_0^R p(x) dx = A_{\pm}^2, \quad (69)$$

где $A_{\pm}$ — некоторые константы. Для поточечной стабилизации $u(x, t)$, т.е. существования предела (66) решения задачи Коши (68), (61), необходимо и достаточно, чтобы существовал предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(A_+ + A_-)R} \int_{s(-A_-^{-1}R)}^{s(A_+^{-1}R)} p(x) u_0(x) dx = l.$$

Отметим, что для уравнения (68) при $b(x) \equiv 0$ теорема о стабилизации получена в работе Ф. О. Порпера, С. Д. Эйдельмана [56]. Случай $a(x) \equiv 1$, $b(x) = 0$ в условиях существования пределов

$$\lim_{R \rightarrow \pm\infty} R^{-1} \int_0^R p(x) dx = p_{\pm}^2, \quad \lim_{R \rightarrow \pm\infty} R^{-1} \int_0^R \frac{dx}{q(x)} = q_{\pm}^{-2} \quad (70)$$

изучался в работе В. В. Жикова [19] и, с других позиций, в работе А. К. Гушина и В. П. Михайлова [57], где впервые получены интересные критерии стабилизации в одномерном случае.

Условия (69) слабее (70), так как они могут выполняться, когда пределы (70) не существуют. К. В. Валиков обобщил результаты [55] в работе [58].

В $\mathbb{R}_+^{N+1}$ рассматриваются две задачи Коши:

$$L(x, t)u + b(x, t)u - c(x, t)u_t = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (71)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad (72)$$

и

$$L(x, t)V - c(x, t)V_t = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (73)$$

$$V(x, 0) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (74)$$

Считается [58], что

$$b_{ik}(x, t) \in L_{q,r}(\mathbb{R}_+^{N+1}), \quad (75)$$

где норма $L_{q,r}(\mathbb{R}_+^{N+1})$ введена равенством (62) при $\Omega = \mathbb{R}_+^{N+1}$ и некоторых $q, r \geq 2$, связанных соотношениями (63) и

$$\lambda^{-1} \leq c(x, t) \leq \lambda, \quad \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) \leq 0, \quad \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) \in L_{1,\text{loc}}(\overline{\mathbb{R}_+^{N+1}}).$$

Будем говорить, что решения u и V задач (71), (72) и (73), (74) близки (равномерно близки) при $t \rightarrow +\infty$, если для любого $x \in \mathbb{R}^N$ (равномерно по $x \in \mathbb{R}^N$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(x, t) - V(x, t)) = 0. \quad (76)$$

Близость решений параболических уравнений исследовалась в работах [58]–[60], [72], [73]. Интересные результаты о близости получены в [59] методом В. В. Жикова [19], [54]. Этим же методом в [58] устанавливаются следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1 [58]. Пусть $q \in (N, \infty)$ при $N \geq 2$ и $q \in [2, +\infty)$ при $N = 1$. Тогда решения задач (71), (72) и (73), (74) равномерно близки при $t \rightarrow +\infty$, т.е. существует предел (76) равномерно по $x \in \mathbb{R}^N$.

Рассмотрим случай $q = N \geq 3$ ($r = \infty$) при условии

$$|b_i(x, t)| \leq b_i(x) \in L_N(\mathbb{R}^N).$$

ТЕОРЕМА 2 [58]. Если выполнено условие малости

$$\|b\|_{N, \mathbb{R}^N} < \frac{N-2}{(2N-2)\lambda},$$

λ – постоянная из (2), то решения $u(x, t)$, $V(x, t)$ задач (71), (72) и (73), (74) соответственно близки при $t \rightarrow \infty$ (т.е. существует предел (76)). Здесь $b(x) = (b_1(x), \dots, b_N(x))$, а $\|\cdot\|_{p, \Omega}$ – норма в $L_p(\Omega)$.

Из теорем 1 и 2 следует, что если критерий стабилизации известен для решений задачи (73), (74), то без всяких изменений этот критерий переносится на случай задачи (71), (72). Отметим, что в теореме 1 [58] отсутствует условие малости коэффициентов $b_i(x, t)$, которое было сформулировано в теореме 1 работы [54].

Однако сказанное здесь о снятии условий малости в [58] не относится к теоремам 4 и 5 работы [54], в которых рассматриваются уравнения со стационарными квазипериодическими коэффициентами.

4°. О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшими коэффициентами и с дивергентной главной частью. В $\mathbb{R}_+^{N+1}$ рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\sum_{i,k=1}^N (a_{ik}(x)u_{x_i})_{x_k} + \sum_{i=1}^N b_i(x)u_{x_i} + c(x)u - u_t = 0,$$

или, кратко,

$$L(x)u + (b(x), \nabla u) + c(x)u - u_t = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad (77)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (78)$$

где $u_0(x)$ – непрерывная и ограниченная в $\mathbb{R}^N$ функция, $|u_0(x)| \leq C$.

Будем считать, что коэффициенты уравнения (77) измеримы и ограничены в $\mathbb{R}^N$, выполнено условие (2) и

$$c(x) \leq 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^N. \quad (79)$$

Далее мы сформулируем точные достаточные условия на младшие коэффициенты уравнения (77), которые гарантируют стабилизацию к нулю

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad (80)$$

равномерно по x на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^N$ решения задачи Коши (77), (78) при любой ограниченной начальной функции $u_0(x)$ (теоремы 1–3), и точные достаточные условия на младшие коэффициенты уравнения (77), которые гарантируют существование предела (80) решения задачи (77), (78) и для любой непрерывной функции, удовлетворяющей условию роста

$$|u_0(x)| < C(1 + |x|^m), \quad C > 0, \quad m > 0 \quad (81)$$

(теоремы 4 и 5).

ЗАМЕЧАНИЕ. Для случая, когда в уравнении (77) $L = \Delta$ – оператор Лапласа, результаты, аналогичные формулируемым ниже теоремам 1 и 2, установлены в [33]. Теорема 3 является новой, и мы приводим ее доказательство в § 4. Для случая, когда в уравнении (77) коэффициенты $b_i(x) \equiv 0$, утверждения, аналогичные формулируемым ниже теоремам 4 и 5, доказаны в [34].

Будем говорить, что коэффициенты $b_k(x)$ ($k = 1, \dots, N$) удовлетворяют условиям (B_1) , если существуют $B > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1)$, для которых

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|)^{1+\varepsilon} |b_k(x)| = B. \quad (82)$$

Будем говорить, что коэффициенты $b_k(x)$ ($k = 1, \dots, N$) удовлетворяют условиям (B_2) , если существует постоянная $B > 0$, для которой

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|) \sum_{i=1}^N |b_i(x)| = B. \quad (83)$$

Будем говорить, что ограниченный в $\mathbb{R}^N$ коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию (C_1) , если существует постоянная $\alpha > 0$, для которой

$$c(x) \leq -\alpha^2 \quad \text{при } |x| < 1. \quad (84)$$

Будем говорить, что ограниченный в $\mathbb{R}^N$ коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию (C_2) , если существует постоянная $\alpha > 0$, для которой

$$c(x) \leq -\frac{\alpha^2}{|x|^2} \quad \text{при } |x| > 1. \quad (85)$$

Будем говорить, что ограниченный в $\mathbb{R}^N$ коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию (C_3) , если существуют постоянные $\alpha > 0$ и $S > 0$, для которых

$$c(x) \leq -\frac{\alpha^2}{|x|^2 (\ln |x|)^S} \quad \text{при } |x| > 2. \quad (86)$$

Имеет место следующий результат [33], [34].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $N = 1$ или $N = 2$, коэффициенты $b_i(x)$ ($i = 1, \dots, N$) уравнения (77) удовлетворяют условиям (B_1) , а коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию (C_1) . Тогда решение задачи Коши (77), (78) стабилизируется к нулю (т.е. существует предел (80)) равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в уравнении (77) $c(x) \equiv 0$, то утверждение теоремы 1 может не выполняться.

Действительно, решение задачи Коши $\Delta u - u_t = 0$, $u|_{t=0} = 1$ имеет вид $u(x, t) \equiv 1$, и оно не стабилизируется к нулю ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие (C_1) на $c(x)$ можно сформулировать иначе: существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что неравенство (84) имеет место при всех x , для которых $|x - x_0| < 1$. Однако с помощью линейной замены мы легко сведем этот случай к случаю, когда $x_0 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 1 не имеет места при размерностях $N \geq 3$, ибо справедливо следующее утверждение, доказанное нами в [33].

ЛЕММА 1. При $N \geq 3$ существуют коэффициент $c(x)$ уравнения

$$\Delta u + c(x)u - u_t = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (87)$$

удовлетворяющий условию (C_1) , и ограниченная в $\mathbb{R}^N$ начальная функция

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (88)$$

для которых решение задачи Коши (87), (88) не имеет предела (80) ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.

С тем чтобы получить аналог теоремы 1 при $N \geq 3$, мы усилим условия на коэффициенты уравнения (77).

ТЕОРЕМА 2. Если коэффициенты $b_i(x)$ ($i = 1, \dots, N$) уравнения (77) удовлетворяют условию (B_2) , коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию (C_2) , то решение задачи Коши (77), (78) стабилизируется к нулю равномерно по x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Следующее утверждение, доказанное нами в [33], показывает, что утверждение теоремы 1 нельзя усилить, заменив в нем стабилизацию (80), равномерную на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$, на стабилизацию, равномерную во всем $\mathbb{R}^N$.

ЛЕММА 2. При $N = 1$ или $N = 2$ существуют коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию (C_1) , и ограниченная в $\mathbb{R}^N$ начальная функция, для которых решение задачи Коши (87), (88) не имеет равномерного в $\mathbb{R}^N$ предела (80).

В $\mathbb{R}_+^{N+1}$ рассмотрим решение уравнения

$$\Delta u + \sum_{i=1}^N b_i(x) u_{x_i} + c(x) u - u_t = 0, \quad (89)$$

удовлетворяющее условию

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (90)$$

ЛЕММА 3. I) При $N = 1$ существуют ограниченный в $\mathbb{R}^1$ коэффициент $b_1(x)$, имеющий при $|x| \geq 1$ вид

$$b_1(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{x} & \text{при } x \geq 1 \text{ и } \beta > 1, \\ -\frac{\beta}{x} & \text{при } x \leq -1 \text{ и } \beta < -1, \end{cases}$$

и коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию (C_1) , и ограниченная в $\mathbb{R}^1$ начальная функция $u_0(x)$, для которых решение задачи Коши (89), (90) не стабилизируется к нулю ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^1$.

II) При $N = 2$ существуют ограниченные в $\mathbb{R}^N$ коэффициенты $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$, имеющие при $x^2 + y^2 \geq 1$ следующий вид:

$$b_1(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad b_2(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (91)$$

коэффициент $c(x, y)$, удовлетворяющий условию (C_1) , и ограниченная в $\mathbb{R}^2$ начальная функция $u_0(x, y)$, для которых решение задачи Коши (89), (90) не стабилизируется к нулю ни в одной точке $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Ради краткости мы докажем в § 4 лемму 3 только в случае $N = 2$. Лемма 3 утверждает, что условие (B_1) на коэффициенты уравнения (77) в теореме 1 является точным, ибо в условии (B_1) нельзя положить $\varepsilon = 0$.

ЛЕММА 4. При $N \geq 3$ существуют коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию (C_2) , и ограниченная в $\mathbb{R}^N$ начальная функция $u_0(x)$, для которых решение задачи Коши (87), (88) не имеет равномерного в $\mathbb{R}^N$ предела (80).

Таким образом, лемма 4, доказанная в [33], является аналогом леммы 2 к теореме 1 [33], и она утверждает, что в теореме 2 тоже нельзя заменить существование предела (80), равномерного на компактах K в $\mathbb{R}^N$, на существование равномерного в $\mathbb{R}^N$ предела (80).

ЛЕММА 5. *Существуют ограниченные в $\mathbb{R}^N$ коэффициенты $b_i(x)$ ($i = 1, \dots, N$), имеющие при $|x| \geq 1$ следующий вид:*

$$b_i(x) = m \frac{x_i}{|x|^{2-\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad m > 0, \quad (92)$$

коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию (C_2) , и ограниченная в $\mathbb{R}^N$ начальная функция $u_0(x)$, для которых решение задачи Коши (89), (90) не стабилизируется к нулю при $t \rightarrow \infty$ ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.

Лемма 5 показывает, что условие (B_2) на коэффициенты $b_i(x)$ в теореме 2 является точным. Лемма 5 будет доказана в § 4.

ЛЕММА 6. *Если коэффициент $c(x)$ в уравнении (87) имеет вид*

$$c(x) = \begin{cases} -\alpha^2 |x|^{-2-\varepsilon} & \text{при } |x| > 1, \quad 0 < \varepsilon < 1, \\ 0 & \text{при } |x| \leq 1, \end{cases}$$

то существует ограниченная в $\mathbb{R}^N$ начальная функция $u_0(x)$, для которой решение задачи Коши (87), (88) не стабилизируется к нулю ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.

Лемма 6 доказана нами в [33], и она показывает, что условия (C_2) на коэффициент $c(x)$ в теореме 2 являются точными по порядку убывания относительно $|x|^{-2}$ при $|x| \rightarrow \infty$. Однако если наложить условия (C_3) на коэффициент $c(x)$, то можно доказать, что теорема 2 допускает уточнение (теорема 3) для задачи (89), (90).

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Если $N \geq 3$ и коэффициенты $b_i(x)$ ($i = 1, \dots, N$) удовлетворяют условиям (B_2) , а коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условиям (C_3) при $S \in (0, 1]$, то решение задачи Коши (89), (90) стабилизируется к нулю равномерно по x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$.*

Эта теорема является новой и будет доказана в § 3.

Неравенство $0 < S \leq 1$ в теореме 3 является точным, ибо имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 7. *При $N \geq 3$ существуют коэффициенты $b_i(x)$ ($i = 1, \dots, N$), удовлетворяющие условиям (B_2) , коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условиям (C_3) при $S > 1$, и ограниченная в $\mathbb{R}^N$ начальная функция, для которых решение задачи Коши (89), (90) не стабилизируется к нулю ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.*

Лемма 7 будет доказана в § 4.

Теперь перейдем к рассмотрению случая, когда начальная функция $u_0(x)$ в задаче Коши (77), (78) удовлетворяет условию роста (81).

Имеет место следующее утверждение [35].

ТЕОРЕМА 4. *Если $u_0(x)$ удовлетворяет условию (81) и коэффициенты $b_i(x)$ ($i = 1, \dots, N$) удовлетворяют условиям (B_2) , тогда существует постоянная $\alpha_0^2 = \alpha_0^2(m, B, N, \lambda) > 0$ такая, что если для коэффициента $c(x)$ выполнено условие (C_2) при*

$$\alpha^2 > \alpha_0^2, \quad (93)$$

то решение задачи Коши (77), (78) имеет предел (80) равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

В случае, когда в уравнении (77) $L = \Delta$, т.е. главная часть (77) – оператор Лапласа, мы указываем точный вид постоянной α_0^2 в условии (93) теоремы 4.

ТЕОРЕМА 5 [35]. Если начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет условию роста (81), в уравнении (77) $L(x) = \Delta$, коэффициенты $b_i(x)$ ($i = 1, \dots, N$) удовлетворяют условию (B₂), тогда если $c(x)$ удовлетворяет условию (C₂) при

$$\alpha^2 > \alpha_0^2 = m(m + N - 2 + B), \quad (94)$$

то решение задачи Коши (77), (78) имеет предел (80) равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Теоремы 4 и 5 будут доказаны в § 3. В случае, когда в уравнении (77) $b_i(x) = 0$, а для коэффициента $c(x, t)$ выполнено условие (C₂) при всех $t > 0$, теорема 4 доказана в работе [34].

Неравенство (94) является точным, как это вытекает из следующего утверждения, которое доказывается аналогично лемме 2 из [35].

ЛЕММА 8. Для любых $m > 0$, $B > 0$ существуют ограниченные в $\mathbb{R}^N$ коэффициенты $b_i(x)$ ($i = 1, \dots, N$), имеющие при $|x| > 2$ следующий вид:

$$b_i(x) = B \frac{x_i}{|x|^2}, \quad (95)$$

и коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию (C₂) при

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 = m(m + N - 2 + B),$$

для которых решение задачи Коши (77), (78) с $L(x) = \Delta$ не стабилизируется к нулю ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.

ЛЕММА 9. Для любых $m > 0$, $B > 0$ существуют начальная функция $u_0(x)$, удовлетворяющая условию (81), коэффициенты $b_k(x)$ ($k = 1, \dots, N$), удовлетворяющие условиям (B₂), и коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию (C₂) при

$$\alpha^2 > m(m + N - 2 + B),$$

для которых решение задачи Коши (89), (90) не имеет равномерного в $\mathbb{R}^N$ предела (80).

Лемма 9 (см. [35]) является аналогом лемм 1 и 4 и показывает, что утверждение теорем 4 и 5 нельзя усилить и получить в условиях теорем 4 и 5 существование равномерного в $\mathbb{R}^N$ предела (80).

Доказательства теорем 1–5, сформулированных в настоящем пункте, основаны на применении понятия обобщенного решения (антибарьера), отвечающего уравнению (77), т.е. такого $V(x)$, что:

$$1) \quad V(x) > 0; \quad 2) \quad V(x) \in W_2^{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^N); \quad 3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V(x) = \infty$$

и $V(x)$ удовлетворяет стационарному уравнению (13) в смысле тождества (14). Эти доказательства будут приведены в § 3.

При доказательстве теорем 1–5 применяются следующие утверждения, которые имеют и самостоятельный интерес.

ЛЕММА 10. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда существует функция $\Gamma(x)$ такая, что:

$$1) \quad \Gamma(x) > 0 \text{ в } \mathbb{R}^N; \quad 2) \quad \Gamma(x) \in W_2^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N); \quad 3) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \Gamma(x) = +\infty;$$

$$4) \quad \int_{\mathbb{R}^N} [(a \nabla \Gamma, \nabla \varphi) - \varphi((\nabla \Gamma, b) + c\Gamma)] dx = 0$$

для любой финитной функции $\varphi(x)$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

ЛЕММА 11. Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда существует функция $\Gamma(x)$ такая, что:

$$1) \quad \Gamma(x) > 0 \text{ в } \mathbb{R}^N; \quad 2) \quad \Gamma(x) \in W_2^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N); \quad 3) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \Gamma(x) = +\infty;$$

$$4) \quad \int_{\mathbb{R}^N} [(a \nabla \Gamma, \nabla \varphi) - \varphi((\nabla \Gamma, b) + c\Gamma)] dx = 0$$

для любой финитной функции $\varphi(x)$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

ЛЕММА 12. Пусть выполнены условия теоремы 4, тогда для каждого $m > 0$ существует постоянная $\alpha_0 = \alpha_0(m, N, B, \lambda) > 0$ и существует отвечающее этому α_0 решение уравнения

$$L(x)\Gamma + (b(x), \nabla \Gamma) + q_{\alpha_0}(x)\Gamma = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^N,$$

где

$$q_{\alpha_0}(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha_0^2}{|x|^2} & \text{при } |x| > 2, \\ 0 & \text{при } |x| \leq 2, \end{cases}$$

удовлетворяющее при $|x| \geq 1$ неравенству

$$\Gamma_{\alpha_0}(x) \geq C|x|^m.$$

Доказательство лемм 10–12 будет дано в § 2.

5°. Стабилизации решений параболических уравнений без младших членов. Влияние начальных функций и областей. Вопросам, связанным с условиями существования предела при $t \rightarrow \infty$ решены задачи Коши и смешанных задач в терминах свойств начальной функции $u_0(x)$ в случае, когда младшие коэффициенты уравнения не влияют на стабилизацию, посвящено большое число работ.

Стабилизации решения Коши без младших членов с ограниченной или растущей начальной функцией посвящена обзорная статья [38].

Начало интересных исследований по стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности положено в 50-х годах М. Кржижанским [23]. В частности, им построен пример ограниченной начальной функции, для которой решение задачи Коши

$$\Delta u - u_t = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (96)$$

не имеет предела при $t \rightarrow \infty$.

В работе [10] (см. также [60]) показано, что из оценок Нэша модуля непрерывности решения и момента фундаментального решения уравнения

$$L(x, t)u - u_t = 0, \quad (97)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (98)$$

вытекает достаточное условие существования равномерного в $\mathbb{R}^N$ предела (80), которое выражается в терминах существования равномерного по x в $\mathbb{R}^N$ предела шарового среднего:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N}{\omega_N R^N} \int_{|x-y| \leq R} u_0(y) dy = A. \quad (99)$$

В. Д. Репников и С. Д. Эйдельман [18] показали, что условие (99) в случае уравнения (97) с переменными коэффициентами $a_{ik}(x, t)$ и ограниченной $u_0(x)$ является и необходимым условием равномерной в $\mathbb{R}^N$ стабилизации решения задачи (97), (98).

Доказательству этого критерия стабилизации решения задачи (96) посвящена работа В. Д. Репникова и С. Д. Эйдельмана [61].

В 1969 г. Ю. Н. Дрожжинов [62] установил, что такой же критерий стабилизации имеет место и для случая полуограниченных начальных функций из класса, который обеспечивает представление решения задачи Коши (96) в виде интеграла Пуассона.

В работе Ю. Н. Дрожжинова и Б. И. Завьялова [63] в качестве следствия из установленных ими теорем тауберова типа получен критерий существования квазипредела решения задачи (96) с непрерывной начальной функцией $u_0(x)$ из класса Шварца $S^1(\mathbb{R}^1)$.

При $\alpha > -1$ рассмотрим интегральные средние Чезаро–Рисса порядка α от начальной функции $u_0(x)$:

$$S_R^\alpha u_0(x) = \frac{2}{B(N/2, \alpha + 1)\omega_N R^N} \int_{|x-y| \leq R} u_0(y) \left(1 - \frac{|x-y|^2}{R^2}\right)^\alpha dy. \quad (100)$$

Во многих работах (см. библиографию в [38]) достаточные условия существования предела (80) решения задачи (97), (98) выражались в терминах существования предела

$$\lim_{R \rightarrow \infty} S_R^\alpha u_0(x) \quad (101)$$

средних (100).

Необходимое условие стабилизации равномерной в $\mathbb{R}^1$ стабилизации решения задачи Коши (96) с начальной функцией $u_0(x)$, удовлетворяющей условию (81), дает следующее утверждение, доказанное в [64].

ТЕОРЕМА [64]. Пусть $u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, удовлетворяет условию (81) и решение задачи (96) имеет предел (80) равномерно в $\mathbb{R}^1$, тогда существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{n+1}{R} \int_{|x-y| \leq R} \left(1 - \frac{|x-y|}{R}\right)^n u_0(y) dy$$

средних целого порядка, $n \geq t$, равномерно по x на каждом сегменте $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$.

В [65] установлено более точное утверждение.

ТЕОРЕМА [65]. Если начальная функция $u_0(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяет условию (81) и решение задачи Коши (96) имеет равномерный в $\mathbb{R}^N$ предел (80), то при

$$\alpha > m - 1 \quad (102)$$

существует предел (101) шаровых средних Чезаро–Рисса порядка α от $u_0(x)$, равномерный по x на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^N$.

В [65] доказано, что условие $\alpha > m - 1$ является точным и не может быть заменено на $\alpha > m - 1 - \varepsilon, \varepsilon > 0$.

В работе [66] (см. также [67]) установлено, что необходимое условие равномерной в $\mathbb{R}^N$ стабилизации решения задачи Коши (96) начальной функцией $u_0(x)$ из тихоновского класса нельзя выразить в терминах равномерной сходимости шаровых средних Чезаро–Рисса какого-либо порядка $\alpha \geq 0$, ибо, как доказано в [68], для любого $\alpha \geq 0$ существует непрерывная в $\mathbb{R}^N$ начальная функция $u_0(x)$, удовлетворяющая условию А. Н. Тихонова

$$|u_0(x)| \leq C(\varepsilon)e^{\varepsilon|x|^2} \quad (103)$$

и такая, что решение задачи Коши (96) не стабилизируется равномерно в $\mathbb{R}^N$, а ее шаровые средние Чезаро–Рисса (100) порядка α не имеют предела (101) ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.

Необходимые и достаточные условия поточечной стабилизации решения задачи Коши (96) с начальной функцией из класса А. Н. Тихонова установлены в работе В. Д. Репникова [29], и эти условия выражаются в терминах средних типа (101), когда порядок $\alpha(R)$ стремится к бесконечности при $R \rightarrow \infty$ согласованно с $C(\varepsilon)$, характеризующим класс функций (103) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Далее мы будем рассматривать ограниченные функции $u_0(x)$.

Случай простейшего уравнения с переменными коэффициентами вида

$$\Delta u - p(x)u_t = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (104)$$

рассмотрен в работах А. К. Гущина и В. П. Михайлова [57], [69].

В предположении, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-N} \int_{|x-y| \leq R} |p(y) - p_0| dy = 0, \quad p_0 > 0,$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^N$, в [69] доказано, что существование предела (99) в какой-либо точке $x \in \mathbb{R}^N$, а следовательно, и в каждой точке $x \in \mathbb{R}^N$ (равномерно на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$) необходимо и достаточно для стабилизации решения задачи (104) в этой точке (и равномерно на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^N$).

В работах Е. Б. Сандакова [70], [71] аналогичные результаты были получены для параболического уравнения высокого порядка.

В работе Ф. О. Порпера и С. Д. Эйдельмана [56] были получены результаты о стабилизации решения задачи Коши для одномерного уравнения

$$(T(x)(S(x)u(x, t))_x)_x - q(x)u_t = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^2, \quad (105)$$

которые являются весьма близкими к утверждениям работы А. К. Гущина и В. П. Михайлова [57], где изучалась задача Коши для одномерного параболического уравнения с ограниченной начальной функцией и были получены интересные результаты о необходимых и достаточных условиях стабилизации решения задачи Коши.

В работе Ф. О. Порпера и С. Д. Эйдельмана [72] замечено, что при получении критерия равномерной в $\mathbb{R}^1$ стабилизации решения задачи Коши для уравнения (105) от условий на коэффициенты можно освободиться. Это не относится к случаю теорем о близости решений при $t \rightarrow \infty$. Многомерный случай изучен в [73].

В работах В. В. Жикова [19] и С. Л. Каменостской [20] содержатся наиболее точные и полные результаты по стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений второго порядка без младших коэффициентов и с ограниченной начальной функцией $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

В них, в частности, доказано, что для равномерной стабилизации решения задачи Коши (97), (98) с ограниченной в $\mathbb{R}^N$ начальной функцией необходимо и достаточно, чтобы существовал равномерный в $\mathbb{R}^N$ предел шарового среднего (99) от $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

В предположении, что коэффициенты $a_{ik}(x, t)$ удовлетворяют условию, что существуют пределы

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{N+1}} \int_0^R d\tau \int_{|x| \leq R} [a_{ik}(x, \tau) - \hat{a}_{ik}]^2 dx = 0, \quad (106)$$

где $\hat{a}_{ik}$ – положительно определенная матрица, в [20] доказано, что существование поточечного в $\mathbb{R}^N$ предела

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\int_{(By, y) \leq R^2} u_0(x + y) dy}{\int_{(By, y) \leq R^2} dy} = l,$$

где B – матрица, обратная матрице $\hat{a}_{ik}$, необходимо и достаточно для существования поточечного в $\mathbb{R}^N$ предела (80).

Исследованию зависимости от неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ коэффициентов уравнения без младших членов

$$L(x, t)u - u_t = 0, \quad (x, t) \in G = \Omega \times (0, \infty), \quad (107)$$

удовлетворяющего условиям

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (108)$$

посвящены работа А. К. Гушина, В. П. Михайлова и Ю. А. Михайлова [26] и работы А. К. Гушина [27], [74]–[76].

В работах А. К. Гушина [27], [74], [75] решена следующая задача: найти функцию $U(t)$, $t > 0$, и такой класс начальных функций $u_0(x)$, что при каждой функции $u_0(x)$ из этого класса решение задачи (107), (108) стремится к нулю не медленнее функции $U(t)$, т.е.

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq CU(t), \quad (109)$$

и для любой неотрицательной начальной функции $u_0(x) \not\equiv 0$ решение стремится к нулю не быстрее функции $U(t)$, т.е.

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \geq C_{u_0} U(t), \quad (110)$$

где $C = C_{u_0} > 0$ зависит от u_0 .

Установлено [74], что для широкого класса неограниченных областей максимальная скорость стабилизации задачи (107)–(109) определяется функцией

$$V(R) = \text{mes } \Omega(R, 0),$$

где

$$\Omega(R, x) = \{\xi \in \Omega : |\xi - x| \leq R\},$$

и в качестве функции $U(t)$ в оценках (109) и (110) можно взять функцию

$$U(t) = \frac{1}{V(\sqrt{t})}.$$

Можно считать, что начало координат $O \in \Omega$. От коэффициентов уравнения зависят лишь постоянные C и C_{u_0} в оценках (109) и (110).

Для областей Ω , “не сужающихся на бесконечности” (т.е., грубо говоря, таких, из которых можно выкатить на бесконечность шар некоторого радиуса), классом начальных функций, обеспечивающим максимальную скорость стабилизации, определяемую из неравенств (109) и (110), является пространство $L_1(\Omega)$ [74], и постоянная в (110) имеет вид $C_0 \|u_0\|_{L_1(\Omega)}$. Условие $u_0 \in L_1(\Omega)$ неуклучшаемо, если $u_0(x) \geq 0$ [28], [75].

Для “сужающихся” областей, для которых $\lim V(r)/r = 0$, максимальный порядок стремления решения к нулю обеспечивается условием

$$\int_{\Omega} |x| |u_0(x)| dx < \infty$$

на начальную функцию [27].

В работе А. К. Гушина [76] установлен критерий равномерной в области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ стабилизации решения второй смешанной задачи (107), (108). При условиях, что $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\Omega \in \mathcal{U}(aV^{(n-1)/n})$ (см. [76]), этот критерий является близким к соответствующему критерию для задачи Коши [19].

ТЕОРЕМА [76]. *Для равномерной относительно x из $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ стабилизации решени задачи (107), (108), т.е. для существования предела*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = l \quad \text{равномерно по } x \text{ из } \Omega,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{V(x, R)} \int_{\Omega(x, R)} u_0(y) dy = l \quad \text{равномерно по } x \text{ из } \Omega, \quad V(x, R) = \text{mes } \Omega(R, x).$$

Вопросы стабилизации решения первой смешанной задачи

$$L(x, t)u - u_t = 0 \quad \text{в } D = \Omega \times (0, \infty), \quad (111)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0, \quad (112)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (113)$$

были изучены в работах [21], [22], [25], [47], [48] и в работах [77], [78].

Наиболее сильный результат получен в работе [25] Ф. Х. Мукминова. В предположении, что неограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ удовлетворяет условию: существует постоянная $\theta > 0$ такая, что для всякой точки x границы $\partial\Omega$ справедливо неравенство

$$\text{mes}(\{y : |x - y| < r\} \setminus \Omega) \geq \theta r^N, \quad r > 0,$$

и для некоторого класса начальных функций, включающего в себя все ограниченные функции $u_0(x)$, в работе Ф. Х. Мукминова [25] установлено, что необходимым и достаточным условием равномерной стабилизации к нулю решения задачи (111)–(113) является следующее условие:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-N} \int_{|x-y| < R} u_0(y) dy = 0$$

равномерно по x из Ω таким, что $\text{dist}(x, \partial\Omega) \geq R + 1$.

Доказательство опирается на полученную в [25] оценку функции Грина.

Вопросы стабилизации решения третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка

$$L(x, t)u - u_t = 0 \quad \text{в } G = \Omega \times (0, \infty), \quad (114)$$

$$\left(\sum_{i,k=1}^N a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_k - \nu_0 u \right) \Big|_{(x,t) \in \Gamma} = 0, \quad (115)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (116)$$

были изучены в работах [79]–[81], [14], где $\Gamma = \partial G \cup \{t > 0\}$, $\nu = (\nu_0, \dots, \nu_N)$ – вектор внешней к Γ нормали и D_0 – проекция сечения области Ω гиперплоскостью $t = 0$.

Наиболее сильные результаты получены в работе В. Г. Ушакова [81], в которой исследовано асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ решения третьей смешанной задачи (114)–(116) в нецилиндрической области. Эти результаты аналогичны по форме сформулированному выше результату А. К. Гушина [74], т.е. справедливы оценки (109) и (110).

§ 2. Некоторые свойства решений эллиптических уравнений

Здесь мы докажем леммы 10–12, сформулированные в п. 4° § 1, и другие необходимые факты о решениях эллиптических уравнений.

В $\mathbb{R}^N$ рассмотрим эллиптическое уравнение

$$\sum_{i,k=1}^N (a_{ik}(x) \Gamma_{x_k})_{x_i} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \Gamma_{x_i} + q(x) \Gamma = 0,$$

или, кратко,

$$L(x) \Gamma + (b(x), \nabla \Gamma) + q(x) \Gamma = 0, \quad (1)$$

где $a_{ik}(x) = a_{ki}(x)$, выполнено условие (2,1) эллиптичности, коэффициенты уравнения (1) измеримы и ограничены в $\mathbb{R}^N$. Пусть при $N = 1$ или $N = 2$ коэффициенты $b_i(x)$ удовлетворяют условиям (B_1) , а коэффициент $q(x)$ определен равенством

$$q(x) = \begin{cases} -\alpha^2 & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Напомним [40], что под решением уравнения (1) в $\mathbb{R}^N$ мы понимаем такую функцию $\Gamma(x)$, которая принадлежит классу $W_2^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ и при любой пробной функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\mathbb{R}^N} [(a(x)\nabla\Gamma, \nabla\varphi) - \varphi((\nabla\Gamma, b) + \Gamma q)] dx = 0. \quad (3)$$

Докажем лемму 10 при $N = 2$, ибо в случае $N = 1$ доказательство проводится аналогично, но требует отдельной записи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 10 будем подразделять на отдельные пункты.

1°. Докажем, что существует ограниченное и положительное в $\mathbb{R}^2$ решение уравнения (1).

Пусть $B_n = \{x : |x| < n\}$, $n \in \mathbb{N}$, – последовательность кругов в $\mathbb{R}^2$. Пусть фиксировано некоторое $M > 0$. В каждом круге B_n рассмотрим задачу

$$L(x)V_n + (b(x), \nabla V_n) + q(x)V_n = 0 \quad \text{в } B_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

$$V_n|_{|x|=n} = M. \quad (5)$$

Известно [40], [82], что при каждом n решение задачи (4), (5) существует и единственно. Из усиленного принципа максимума [82] вытекает, что для $V_n(x)$ справедливы неравенства

$$0 < V_n(x) < M \quad (6)$$

и что семейство функций $\{V_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N}$, является невозрастающим: $V_{n_2} \leq V_{n_1}$ при $n_2 > n_1$, $x \in B_n$.

Из оценок Э. Де Джорджи (см. [40], [82]) следует, что $V_n(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера равномерно по x в каждом круге B_r , $r < n$. Это означает, что семейство функций $\{V_n(x)\}$ удовлетворяет лемме Арцеля [83] на каждом компакте K в B_n . Применяя диагональный процесс, получим, что существует подпоследовательность $\{V_{n_k}(x)\}$ последовательности $\{V_n(x)\}$, которая сходится в $\mathbb{R}^2$ к некоторой функции $V(x)$, причем сходимость является равномерной на каждом компакте K в $\mathbb{R}^2$. Из этого следует, что $V_{n_k}(x) \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} V(x)$ в $L^2(B_r)$ при каждом $r > 0$.

Из оценки [84]

$$\int_{B_{r_1}} |\nabla V_{n_k}|^2 dx \leq c(r_1, r_2) \int_{B_{r_2}} |V_{n_k}|^2 dx, \quad 0 < r_1 < r_2, \quad (7)$$

следует, что существует слабо сходящаяся в $W_2^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ подпоследовательность:

$$V_{n_{k_i}}(x) \xrightarrow{n_{k_i} \rightarrow \infty} V(x) \quad \text{слабо в } W_2^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^2).$$

Отсюда легко следует, что предельная функция $V(x)$ является обобщенным $W_2^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ -решением уравнения (1), для которого справедливы неравенства

$$0 \leq V(x) \leq M. \quad (8)$$

2°. Докажем, что построенное в п. 1° решение $V(x)$ таково, что существует предел

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = m \leq M. \quad (9)$$

Рассмотрим кольцо $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2 : \lambda/2 < |x| < 2\lambda\}$, $\lambda > 2$, и воспользуемся следующим известным утверждением.

ЛЕММА 13 (О. А. Ладженская; см. [40], [82]). Если $V(x) \geq 0$ – любое ограниченное решение уравнения

$$L(x)V + (b, \nabla V) = 0, \quad |x| < 1, \quad (10)$$

то существует δ , $0 < \delta < 1$, для которого

$$\operatorname{osc}_{|x| < 1/2} V(x) \leq \delta \cdot \operatorname{osc}_{|x| < 1} V(x). \quad (11)$$

[Здесь $\operatorname{osc}_{B_r} V = \sup_{B_r} V(x) - \inf_{B_r} V(x)$.]

Из этой леммы и неравенства (8) следует, что

$$\operatorname{osc}_{|x|=\lambda} V(x) \leq \delta \cdot \operatorname{osc}_{\lambda/2 < |x| < 2\lambda} V(x) \leq \delta \cdot 2M.$$

Применяя внешний принцип максимума Дж. Серрина [85] к функции $V(x)$ в области $|x| > \lambda$, будем иметь

$$\operatorname{osc}_{|x| > \lambda} V(x) \leq \delta \cdot 2M. \quad (12)$$

Для удобства читателя напомним принцип максимума.

ЛЕММА 14 Дж. Серрин [85]. Если $N = 2$ и $V(x)$ – ограниченное решение $V(x)$ уравнения (10) при $|x| > \lambda$ – удовлетворяет неравенству $V(x)|_{|x|=\lambda} \leq M$, то $V(x) \leq M$ при $|x| > \lambda$.²

Рассмотрим кольцо $S_{2\lambda} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \lambda < |x| < 4\lambda\}$, применим лемму 13 О. А. Ладженской и неравенство (12), при этом получим

$$\operatorname{osc}_{|x|=2\lambda} V(x) \leq \delta \operatorname{osc}_{\lambda < |x| < 4\lambda} V(x) \leq 2M\delta^2.$$

Из леммы 14 тогда следует, что

$$\operatorname{osc}_{|x| > 2\lambda} \leq 2M\delta^2.$$

Далее по индукции легко получаем, что

$$\operatorname{osc}_{|x| > 2^k \lambda} V(x) < 2M\delta^{k+1}, \quad 0 < \delta < 1 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (13)$$

Из неравенства (13) и критерия Коши существования предела [83] получим, что существует предел (9).

3°. Докажем, что предел (9) равен нулю, т.е. что $m = 0$.

Вначале установим, что не существует точек x_0 из $\mathbb{R}^2$, для которых $V(x_0) > m$.

Предположим противное, т.е. что существует $x_0 \in \mathbb{R}^2$, для которой

$$V(x_0) > m. \quad (14)$$

Положим $\varepsilon = (V(x_0) - m)/2 > 0$. В силу существования предела (9) для выбранного $\varepsilon > 0$ найдется R такое, что при $|x| \geq R$ справедливо неравенство

$$-\varepsilon < V(x) - m < \varepsilon,$$

²В [85] рассматриваются классические решения. Легко видеть, что лемма 14 справедлива для решений уравнения (10) из $W_2^{1,\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^2)$ в смысле интегрального тождества (3).

т.е. неравенство

$$V(x) < \frac{V(x_0) - m}{2} + m = \frac{V(x_0) + m}{2} < V(x_0), \quad |x| \geq R. \quad (15)$$

Выберем натуральное k так, чтобы точка x_0 , в которой $V(x_0) > m$, попала внутрь круга B_{kR} радиуса kR . На границе круга B_{kR} в силу (15) справедливо неравенство

$$V(x)|_{|x|=kR} < V(x_0). \quad (16)$$

По теореме Вейерштрасса [83] непрерывная в замкнутом круге $\overline{B}_{kR}$ функция $V(x)$ достигает максимального значения. В силу (16) максимум $V(x)$ не может достигаться на границе $|x| = kR$, следовательно, максимальное значение $V(x)$ достигается во внутренней точке круга B_{kR} . Это приводит к противоречию, ибо, согласно принципу максимума [40], [82], любое решение уравнения (1) в круге $\overline{B}_{kR}$ при $q(x) \leq 0$ достигает своего максимального значения на границе этого круга. Следовательно, доказано, что $V(x)$ удовлетворяет неравенству $V(x) \leq m$, $x \in \mathbb{R}^N$.

Из усиленного принципа максимума Хопфа [82] тогда следует, что

$$V(x) < m \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^2. \quad (17)$$

Рассмотрим кольцо $\overline{S}_{2\lambda} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \lambda \leq |x| \leq 4\lambda\}$. Тогда для всех $x \in \overline{S}_{2\lambda}$ в силу (17) имеем $m - V(x) > 0$. По теореме Вейерштрасса [83] непрерывная в $\overline{S}_{2\lambda}$ функция $h(x) = 1/(m - V(x))$ является ограниченной в этом кольце, т.е. существует постоянная $M_1 > 0$, для которой

$$h(x) \leq M_1, \quad x \in \overline{S}_{2\lambda}.$$

Последнее неравенство может быть переписано так:

$$V(x) \leq m - \frac{1}{M_1}, \quad x \in \overline{S}_{2\lambda}. \quad (18)$$

Применяя лемму 14 [85] к решению $V(x)$ уравнения (1) во внешности круга $B_{4\lambda}$, получим в силу (18) неравенство

$$V(x) \leq m - \frac{1}{M_1}, \quad |x| > 4\lambda, \quad M_1 > 0. \quad (19)$$

Неравенство (19) приводит к противоречию с существованием предела (9), равного m .

Итак, доказано, что не существует точек x из $\mathbb{R}^2$, для которых имеют место неравенства (14) и (17). Следовательно, доказано, что $V(x) \equiv m = \text{const}$, $x \in \mathbb{R}^2$, где m — предел (9). Но $V(x)$ является решением уравнения (1) и ясно, что среди всех констант m только $m = 0$ является решением уравнения (1). Из принципа максимума [40], [82] тогда имеем $V \equiv 0$ в $\mathbb{R}^2$.

4°. Докажем, что существует решение $\Gamma(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям 1)–3) леммы 10. Рассмотрим семейство функций

$$\Gamma_n(x) = \frac{V_n(x)}{V_n(0)} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (20)$$

где $V_n(x)$ – решение задачи (4), (5). Ясно, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ функция $\Gamma_n(x)$ удовлетворяет уравнению (4) в круге B_n и $\Gamma_n(0) = 1$. Применим к $\Gamma_n(x)$ неравенство Харнака [82], справедливое для любого неотрицательного решения уравнения (4):

$$\sup_{B_r} \Gamma_n(x) \leq C_1 \inf_{B_r} \Gamma_n(x), \quad (21)$$

и, учитывая, что $\Gamma_n(0) = 1$, получим неравенство

$$\sup_{|x| \leq r} \Gamma_n(x) \leq C,$$

в котором постоянная C зависит от N, l, r , но не зависит от n . Таким образом, семейство функций (20) является компактным относительно равномерной сходимости на компакте K в $\mathbb{R}^2$.

Применяя диагональный процесс, можно выделить из $\{\Gamma_n(x)\}$ подпоследовательность $\{\Gamma_{n_k}(x)\}$, которая сходится при $n_k \rightarrow \infty$ к некоторой функции $\Gamma(x)$ равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^2$. Отсюда следует, что

$$\Gamma_{n_k}(x) \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \Gamma(x) \quad \text{в } L^2(B_r), \quad r > 0.$$

Из оценки (7) тогда получим, что существует подпоследовательность $\{\Gamma_{n_{k_i}}(x)\}$, для краткости ее снова обозначим $\Gamma_{n_k}(x)$, которая слабо в $W_2^{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ сходится к $\Gamma(x)$. Отсюда легко следует, что $\Gamma(x)$ является обобщением решения уравнения (1) в смысле интегрального тождества (3) и при этом $\Gamma(0) = 1, \Gamma(x) > 0, x \in \mathbb{R}^2$.

5°. Докажем, что построенное в п. 4° решение $\Gamma(x)$ уравнения (1) таково, что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Gamma(x) = +\infty. \quad (22)$$

Вначале докажем, что функция $\Gamma(x)$ является неограниченной в $\mathbb{R}^2$. Предположим противное, тогда существует постоянная $M > 0$, для которой $0 \leq \Gamma(x) \leq M, x \in \mathbb{R}^2$. Применяя для $\Gamma(x)$ построения п. 2° и 3°, мы аналогично предыдущему докажем, что существует предел

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Gamma(x) = 0,$$

и, следовательно, из принципа максимума [82] получим, что $\Gamma(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}^2$. Получим противоречие, ибо $\Gamma(0) = 1$. Полученное противоречие доказывает, что $\Gamma(x)$ является неограниченной в $\mathbb{R}^2$, т.е. для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in \mathbb{R}^2$, в которой

$$\Gamma(x)|_{x=x_n} \geq n. \quad (23)$$

Теперь докажем (22). Пусть (22) неверно. Тогда существуют постоянная A и последовательность $y_n, |y_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, для которой

$$\Gamma(x)|_{x=y_n} \leq A \quad \text{при } n \geq N(A). \quad (24)$$

Используя неравенство (24), тот факт, что функция $\Gamma(x)$ является решением уравнения

$$L(x)\Gamma + (b, \nabla \Gamma) = 0 \quad \text{при } |x| > 1, \quad (25)$$

и неравенство Харнака (21), легко доказать, что существует постоянна $C_2 > 0$, для которой

$$\Gamma(x)|_{|x|=|y_n|} \leq C_2 A, \quad n \geq N(A). \quad (26)$$

Действительно, пусть $n \geq N(A)$. Обозначим $\lambda_n = |y_n|$, построим в кольце $S_{\lambda_n} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \lambda_n/2 < |x| < 2\lambda_n\}$ окружность $|x| = \lambda_n$ и заменим в уравнении (25) переменные по формулам $x_i = \frac{\lambda_n}{4}\sigma_i$ ($i = 1, 2$). Тогда кольцо $\bar{S}_{\lambda_n}$ перейдет в кольцо $2 \leq |\sigma| \leq 8$, окружность $|x| = \lambda_n$ — в окружность $|\sigma| = 4$, уравнение (25) — в уравнение

$$\sum_{i,k=1}^N \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left(a_{ik} \left(\frac{\lambda_n}{4} \sigma \right) \frac{\partial W}{\partial \sigma_k} \right) + \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_n}{4} b_k \left(\frac{\lambda_n}{4} \sigma \right) \frac{\partial W}{\partial \sigma_k} = 0 \quad \text{в } 2 < |\sigma| < 8, \quad (27)$$

где $W = \Gamma\left(\frac{\lambda_n}{4}\sigma\right)$.

Из условий (2,1) равномерной эллиптичности и условий (B_1) легко следует, что коэффициенты преобразованного уравнения (27) имеют в кольце $2 < |\sigma| < 8$ верхние грани, не зависящие от λ_n . Поэтому оценки для решений W в кольце $2 < |y| < 8$ уравнения (27) будут справедливы с теми же постоянными и в кольце S_{λ_n} для решений $\Gamma(x)$ уравнения (25). Рассмотрим окружность $|\sigma| = 4$. Некоторая точка σ_1 этой окружности является образом точки y_n (24) при отображении $\sigma_i = \frac{4}{|y_n|} x_i, |x| = |y_n|$.

Впишем в кольцо $2 \leq |\sigma| \leq 8$ замкнутый круг $\bar{B}_1^{\sigma_1}$ с центром в точке σ_1 и радиуса 1 и применим неравенство Харнака (21). В результате получим

$$\sup_{\bar{B}_1^{\sigma_1}} W \leq C_1 W(\sigma_1) \leq C_1 A. \quad (28)$$

Круг $B_1^{\sigma_1}$ пересекает окружность $|\sigma| = 4$ в двух точках σ'_2 и σ''_2 . Возьмем любую из этих точек (например, σ'_2) и впишем в кольцо $2 \leq |\sigma| \leq 4$ круг $\bar{B}_1^{\sigma'_2}$ с центром в точке σ'_2 радиуса 1. Применяя неравенство Харнака (21) в $B_1^{\sigma'_2}$ и затем неравенство (28), получим

$$\sup_{\bar{B}_1^{\sigma'_2}} W \leq C_1 \inf_{\bar{B}_1^{\sigma'_2}} W \leq C_1^2 A. \quad (29)$$

Круг $B_1^{\sigma'_2}$ пересекает окружность $|\sigma| = 4$ в двух точках σ'_3 и σ''_3 , одна из которых (пусть это будет σ'_3) не принадлежит кругу $B_1^{\sigma_1}$. Впишем круг $B_1^{\sigma'_3}$, $|\sigma'_3| = 4$, и, применяя неравенство Харнака (21) в $\bar{B}_1^{\sigma'_3}$, а затем неравенство (29), получим

$$\sup_{\bar{B}_1^{\sigma'_3}} W \leq C_1 \inf_{\bar{B}_1^{\sigma'_3}} W \leq C_1^3 A. \quad (30)$$

Продолжая далее процесс построения вписанных кругов с центрами на окружности $|\sigma| = 4$ и радиуса 1, мы покроем окружность $|\sigma| = 4$ конечной цепью k_0 кругов радиуса 1 и получим неравенство

$$\sup_{|\sigma|=4} W \leq C_1^{k_0} A, \quad k_0 = 32\pi. \quad (31)$$

Совершая обратный переход к переменным x_i от переменных σ_i : $\sigma_i = \frac{4}{\lambda_n} x_i$, получим, что неравенство (26) доказано. При этом $C_2 = C_1^{k_0}$.

Учитывая справедливость неравенства (26) при $|x| = |y_k|$ и применяя в области $|x| > |y_n|$ лемму 14 (внешний принцип максимума [85]), получим, что

$$\Gamma(x) \leq C_2 A \quad \text{для} \quad |x| \geq |y_n|. \quad (32)$$

Получили противоречие, ибо, как доказано выше, в силу (23) функции $\Gamma(x)$ являются неограниченными. Следовательно, (22) доказано.

Лемма 10 доказана.

Для доказательства леммы 11 нам потребуется следующее утверждение, имеющее и самостоятельный интерес.

ЛЕММА 15. *Если $u(x) \geq 0$ – решение уравнения*

$$L(x)u + (b(x), \nabla u) + q(x)u = 0, \quad |x| < 1, \quad q(x) \leq q_0 < -0, \quad (33)$$

удовлетворяющее условию

$$u|_{|x|=1} = M > 0, \quad (34)$$

то существует δ ($0 < \delta < 1$), для которого

$$u(0) \leq M\delta. \quad (35)$$

Для случая, когда $b_i(x) = 0$, доказательство леммы 15 можно найти в [34], и оно основывается только на оценках функции Грина задачи Дирихле в единичном шаре для уравнения без младших членов: $L(x)u = 0$, $|x| < 1$, приведенных в работе [86].

Для функции Грина задачи Дирихле в единичном шаре для уравнения $Lu + (b, \nabla u) = 0$ точно такие же оценки получены в работе Г. Стампаккья [84]. Поэтому мы не будем доказывать лемму 15, отсылая читателя к работе [34].

ЛЕММА 16. *Пусть $u(x) \geq 0$ – любое решение уравнения (1) в кольце $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N : \lambda/2 < |x| < 2\lambda\}$, $\lambda > 2$, где*

$$q(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha^2}{|x|^2} & \text{при } |x| > 1, \\ 0 & \text{при } |x| \leq 1, \end{cases} \quad (36)$$

а для $b_i(x)$ выполнено условие (B₂), и пусть $u(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$u|_{|x|=2\lambda} \leq M, \quad u|_{|x|=\lambda/2} \leq M, \quad M > 0.$$

Тогда существует δ ($0 < \delta < 1$), для которого

$$u|_{|x|=\lambda} \leq M\delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В уравнении (1) сделаем замену переменных $x_i = \frac{\lambda}{4}y_i$ ($i = 1, \dots, N$). Тогда уравнение (1) перейдет в уравнение

$$L\left(\frac{\lambda}{4}y\right)V + \frac{\lambda}{4}\left(b\left(\frac{\lambda}{4}y\right), \nabla V\right) + \frac{\lambda^2}{4^2}q\left(\frac{\lambda}{4}y\right)V = 0, \quad 2 < |y| < 8, \quad (37)$$

где $V = \Gamma\left(\frac{\lambda}{4}y\right)$.

Учтем, что в силу условий эллиптичности (2,1) и условий (B₂) на $b_k(x)$ ($k = 1, \dots, N$) коэффициенты преобразованного уравнения (37) имеют верхние грани в слое $2 \leq |y| \leq 8$, не зависящие от λ . Применяя лемму 15 к решению V уравнения (37) в шаре B_1^y с центром в любой точке y такой, что $|y| = 4$, получим, что существует δ ($0 < \delta < 1$), для которого

$$V(y) \leq \delta M, \quad |y| = 4.$$

Из произвольности $y \in \{|y| = 4\}$ следует, что

$$\sup_{|y|=4} V(y) \leq \delta M, \quad 0 < \delta < 1.$$

Возвращаясь к переменным x , получим, что требуемое неравенство доказано. Лемма 16 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 11 из п. 4° § 1.

1°. Докажем, что существует ограниченное решение из $W_2^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ уравнения (1), где коэффициент $q(x)$ определен по формуле (36), а коэффициенты $b_i(x)$ удовлетворяют условию (B₂).

В шаре $B_n = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < n\}$, $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим уравнение

$$L(x)V_n + (b(x), \nabla V_n) + q(x)V_n = 0, \quad x \in B_n, \quad (38)$$

удовлетворяющее условию

$$V_n(x)|_{|x|=n} = M, \quad M > 0. \quad (39)$$

Известно, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ решение $V_n(x)$ задачи (38), (39) существует и удовлетворяет неравенствам

$$0 < V_n(x) \leq M. \quad (40)$$

Из оценок Де Джорджи–Нэша (см. [40], [82]) решений линейных эллиптических уравнений следует, что $V_n(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера равномерно в каждой области $\{|x| < n\}$. Это означает, что семейство $\{V_n(x)\}$ удовлетворяет лемме Арцела [83] на каждом компакте K в области $\{|x| < n\}$.

Следовательно, существует подпоследовательность последовательности $\{V_n(x)\}$, которая равномерно по x сходится на каждом компакте K в $|x| < n$, $n \in \mathbb{N}$. Применяя диагональный процесс, получим, что существует подпоследовательность $\{V_{n_k}(x)\}$, которая сходится к некоторой функции $V(x)$, причем сходимость является равномерной на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Из этого следует, что $V_{n_k}(x) \rightarrow V(x)$ в $L^2(B_r)$ при $n_k \rightarrow \infty$ для каждого $r > 0$. Из оценки (7) вытекает, что существует подпоследовательность $\{V_{n_{k_i}}(x)\}$, которая сходится к $V(x)$ слабо в $W_2^1(B_r)$ при каждом $r > 0$. Отсюда легко следует, что функция $V(x)$ является обобщенным решением уравнения (1) в $\mathbb{R}^N$ и

$$0 < V(x) < M.$$

2°. Применяя лемму 16, докажем, что решение $V(x)$ уравнения (1), построенное в предыдущем п. 1°, имеет предел

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0. \quad (41)$$

Предположим, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) \neq 0$, и так как $V(x) > 0$, то $V(x) \geq \gamma > 0$. Обозначим

$$\beta = \overline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} V(x) \geq \gamma > 0.$$

Ясно, что верхний предел всегда существует.

По определению верхнего предела имеем

$$V(x) \leq \beta, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Поэтому

$$V(x)|_{|x|=\lambda/2} \leq \beta, \quad V(x)|_{|x|=2\lambda} \leq \beta.$$

По лемме 16 тогда имеем

$$V|_{|x|=\lambda} < \delta\beta, \quad \text{где } 0 < \delta < 1,$$

но

$$\beta = \overline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} V(x) \leq \delta\beta.$$

Полученное противоречие доказывает (41).

Из принципа максимума [82] и неравенства Харнака [82]

$$\sup_{|x|=\lambda} V \leq C \inf_{|x|=\lambda} V < \varepsilon C, \quad (42)$$

тогда легко получим, что $V(x) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^N$.

3°. Докажем, что существует решение $\Gamma(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям 1)–3) леммы 11.

Зафиксируем x_0 , $|x_0| > 1$, и рассмотрим семейство функций

$$\Gamma_n(x) = \frac{V_n(x)}{V_n(x_0)}, \quad |x_0| > 1, \quad (43)$$

где $V_n(x)$ – решение задачи (38), (39), построенное в п. 1°.

Ясно, что $\Gamma(x_0) = 1$ и функция $\Gamma_n(x)$ является решением уравнения (38) в B_n . Применяя неравенство Харнака [82], будем иметь

$$\sup_{B_r} \Gamma_n(x) \leq C_1 \inf_{B_r} \Gamma_n(x) \leq C_1 \Gamma_n(x_0) = C_1, \quad (44)$$

где C_1 зависит от (N, λ_1, r) .

Следовательно, семейство функций $\{\Gamma_n(x)\}$ является ограниченным по n равномерно по x на каждом компакте в B_r . Применяя диагональный процесс, выделим подпоследовательность $\{\Gamma_{n_k}(x)\}$, которая сходится к некоторой функции $\Gamma(x)$ равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Отсюда следует, что $\Gamma_{n_k}(x) \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \Gamma(x)$ в $L^2(B_r)$ при каждом $r > 0$. Из оценки (7) тогда получим, что существует подпоследовательность $\Gamma_{n_{k_i}}(x)$, которая слабо в $W_2^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ сходится к функции $\Gamma(x)$. Отсюда легко следует, что предельная функция $\Gamma(x)$ является обобщенным решением (из $W_2^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$) уравнения (1), удовлетворяющим условию $\Gamma(x_0) = 1$. Ясно также, что $\Gamma(x) > 0$ в $\mathbb{R}^N$. Остается доказать, что $\Gamma(x)$ обладает свойством

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Gamma(x) = \infty. \quad (45)$$

Вначале докажем, что функция $\Gamma(x)$ является неограниченной в $\mathbb{R}^N$. Предположим противное: существует $M > 0$ такое, что $0 < \Gamma(x) \leq M$ в $\mathbb{R}^N$.

Применяя для $\Gamma(x)$ построения пп. 1° и 2°, получим, что существует предел $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Gamma(x) = 0$. Из (42) тогда легко вытекает, что $\Gamma(x) \equiv 0$. Получили противоречие, ибо $\Gamma(x_0) = 1$. Следовательно, $\Gamma(x)$ является неограниченной в $\mathbb{R}^N$, т.е. для любого $n \in \mathbb{N}$ существует последовательность $x_n \in \mathbb{R}^N$, $|x_n| \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), такая, что

$$\Gamma(x)|_{x=x_n} > n. \quad (46)$$

Докажем, что справедливо (45). Предположим противное. Тогда существуют $A > 0$ и последовательность $y_n \in \mathbb{R}^N$, $|y_n| \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), для которых

$$\Gamma(x)|_{x=y_n} \leq A. \quad (47)$$

Используя неравенство (47), тот факт, что $\Gamma(x)$ является решением уравнения

$$L(x)\Gamma + (b(x), \nabla \Gamma) - \frac{\alpha^2}{|x|^2} \Gamma = 0 \quad \text{при } |x| > 1 \quad (48)$$

и “послойное” неравенство Харнака [82]

$$\sup_{\lambda/2 \leq |x| \leq 2\lambda} \Gamma(x) \leq C_1 \inf_{\lambda/2 \leq |x| \leq 2\lambda} \Gamma(x) \quad (49)$$

с постоянной C_1 , не зависящей от λ , легко установить, что имеет место неравенство

$$\Gamma(x)|_{|x|=|y_n|} \leq C_2 A, \quad y_n \rightarrow \infty. \quad (50)$$

Доказательство неравенства (50) является аналогичным доказательству неравенства (26), и мы не будем на нем останавливаться. Отметим только, что при доказательстве неравенства (50) следует применить преобразование подобия $x_i = \frac{\lambda_n}{4} \sigma_i$, где $\lambda_n = |y_n|$, $i = 1, \dots, N$, покрыть сферу $|\sigma| = 2$ конечным числом шаров единичного радиуса и использовать неравенства Харнака (44), а затем совершить обратный переход к переменным x_i и воспользоваться неравенством (49).

Учитывая справедливость неравенства (50), применим к каждому слою

$$\overline{S}_{\lambda_n} = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \frac{\lambda_n}{2} \leq |x| \leq 2\lambda_n \right\}$$

неравенство Харнака (49), принцип максимума [82], получим неравенство

$$\sup_{\{x: |x| > \lambda_n\}} \Gamma(x) \leq AC_2.$$

Получили противоречие, ибо, как доказано выше, имеет место неравенство (46). Итак, (45) доказано.

Лемма 11 доказана.

В $\mathbb{R}^N$ рассмотрим уравнение (1), где коэффициент $q(x)$ определен по формуле (36), а коэффициенты $b_k(x)$ ($k = 1, \dots, N$) удовлетворяют условиям (B₂). Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 17. I. Для любого $\alpha > 0$ существует положительное решение уравнения (1).

II. Для каждого положительного решения $\Gamma(x)$ уравнения (1) существует постоянная $l = l(N, \alpha, \lambda) > 0$ такая, что

$$\Gamma(x) \leq C_3(1 + |x|^l). \quad (51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. В каждом шаре B_n ($n = 1, 2, \dots$) рассмотрим задачу (38), (39), где $q(x)$ определено равенством (36). Из принципа максимума [82] следует, что $0 < V_n(x) < M$ ($n = 1, 2, \dots$).

Рассмотрим при некотором x_0 таком, что $|x_0| \geq 2$, семейство функций (43).

Далее, применяя неравенство Харнака (44), оценки Де Джорджи, лемму Арцела и неравенство (7), мы аналогично доказательству леммы 16 в п. 1° докажем, что существует решение $\Gamma(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям $\Gamma(x_0) = 1$, $\Gamma(x) > 0$. Таким образом, утверждение I будем считать доказанным.

Докажем утверждение II. Рассмотрим последовательность колец

$$\overline{S}_k = \{x \in \mathbb{R}^N : 2^{k-1} \leq |x| \leq 2^k\}.$$

Пусть $\alpha > 0$ и $\Gamma_\alpha(x)$ – одно из отвечающих ему положительных решений уравнения (1).

Обозначим $M(k) = \sup_{S_k} \Gamma_\alpha(x)$ и докажем, что имеет место неравенство

$$M(k+1) \leq CM(k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (52)$$

с постоянной C , не зависящей от k .

Рассмотрим более широкое кольцо

$$\{x \in \mathbb{R}^N : 2^{k-2} \leq |x| \leq 2^{k+1}\}.$$

В этом замкнутом кольце в силу теоремы Вейерштрасса [83] существуют точки, в которых $\Gamma_\alpha(x)$ достигает $M(k)$ и $M(k+1)$, и так как $\Gamma_\alpha(x)$ – решение уравнения (1), то

для $\Gamma(x)$ имеет место неравенство Харнака вида (49) при $\lambda = 2^n$ по множеству S_k . Так как постоянная C в неравенстве (49) не зависит от λ , то неравенство (52) доказано.

Будем итерировать неравенство (52), спускаясь по индукции от k до $k-1$. Через k шагов из (52) получим неравенство

$$M(k+1) \leq C^k M(1). \quad (53)$$

Для любого $x \in \mathbb{R}^N$ с $|x| > 1$ найдется номер k ($k = 1, 2, \dots$), для которого $2^{k-1} \leq |x| \leq 2^k$. Так как $k-1 \leq \log_2 |x| \leq k$, то после элементарных преобразований получим неравенство

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &\leq M(k+1) \leq M(1) \cdot 2^{k \log_2 C} \\ &\leq M(1) \cdot 2^{\log_2 C \log_2 (|x|2)} \leq M(1)(|x|2)^{\log_2 C} \leq C_3(1+|x|)^l, \end{aligned} \quad (54)$$

где $l = \log_2 C = l(N, \alpha, \lambda_1) > 0$.

Лемма 17 доказана.

ЛЕММА 18. В шаре B_1 рассмотрим задачу

$$L(x)u + (b(x), \nabla u) + \alpha^2 q_1(x)u = 0, \quad (55)$$

$$u|_{|x|=1} = M > 0, \quad (56)$$

где

$$q_1(x) \leq q_0 < 0, \quad |b_k(x)| < C, \quad \alpha \geq \alpha_0 > 3. \quad (57)$$

Существует постоянная $k = k(N, \lambda_1, q_0) > 0$, для которой

$$u(0) \leq e^{-[\alpha]k}. \quad (58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В (55) сделаем замену переменных $x_i = y_i/\alpha$ ($i = 1, \dots, N$). Тогда уравнение (55) перейдет в уравнение

$$L\left(\frac{y}{\alpha}\right)W + \left(b\left(\frac{y}{\alpha}\right), \nabla W\right) + q_1\left(\frac{y}{\alpha}\right)W = 0, \quad |y| < \alpha, \quad (59)$$

$$W|_{|y|=\alpha} = M, \quad (60)$$

где $W = u(y/\alpha)$.

В силу условия эллиптичности (2,1) и ограничений (57) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &\leq \left(a\left(\frac{y}{\alpha}\right)\xi, \xi\right) \leq \lambda, \quad \frac{1}{\alpha} \left|b_i\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right| \leq \frac{C}{\alpha_0} \leq C, \quad |\xi| = 1, \\ q_1\left(\frac{y}{\alpha}\right) &\leq q_0 < 0. \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует, что преобразованное уравнение (59) имеет в шаре B_α верхние грани коэффициентов, не зависящие от α . На поверхности сферы $\{|y| = \alpha - 1\} \subset B_\alpha$ фиксируем любую точку y_1 такую, что $|y_1| = \alpha - 1$. По лемме 15 найдется δ ($0 < \delta < 1$), для которого в центре шара $B_1^{y_1}$ имеет место неравенство

$$W(y_1) \leq M(1 - \delta), \quad |y_1| = \alpha - 1.$$

Из произвольности точки $y_1 \in \{|y| = \alpha - 1\}$ следует, что для всех точек сферы $|y| = \alpha - 1$ справедливо неравенство

$$W|_{|y|=\alpha-1} \leq M(1 - \delta).$$

Применяя принцип максимума [82], получим, что в замкнутом шаре $\overline{B}_{\alpha-1}$ имеет место неравенство

$$W|_{|y| \leq \alpha-1} \leq M(1 - \delta). \quad (61)$$

На поверхности сферы $\{|y| = \alpha - 2\} \subset B_\alpha$ зафиксируем произвольную точку y_2 , $|y_2| = \alpha - 2$, и впишем в B_α шар $B_1^{y_2}$ с центром в y_2 радиуса 1. В силу леммы 15 и неравенства (61) получим, что существует постоянная δ ($0 < \delta < 1$), для которой в центре y_2 шара $B_1^{y_2}$, $|y_2| = \alpha - 2$, имеет место неравенство

$$W(y_2) \leq M(1 - \delta)^2.$$

Из произвольности точки $y_2 \in \{|y| = \alpha - 2\}$ и принципа максимума, как и выше, мы легко получим неравенство

$$W|_{|y| \leq \alpha-2} \leq M(1 - \delta)^2.$$

Продолжая аналогичные построения, за $[\alpha]$ шагов мы получим, что решение уравнения (59) удовлетворяет неравенству

$$W|_{|y|=\alpha-[\alpha]} \leq M(1 - \delta)^{[\alpha]} = M e^{-[\alpha]k}, \quad (62)$$

где $k = \ln \frac{1}{1 - \delta}$.

Так как $W(0) \leq \sup_{|y|=\alpha-[\alpha]} W(y)$, то, применяя (62) и возвращаясь к переменным x , получим, что (58) доказано.

Лемма 18 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 12. Пусть $\alpha > 0$ и $\Gamma_\alpha(x) > 0$ – решение уравнения (1) с коэффициентом $q(x)$ (36), которое мы построили в лемме 17. Рассмотрим кольцо $S'_R = \{x \in \mathbb{R}^N : R/4 < |x| < R\}$, $R > 4$, и сделаем в уравнении (1) преобразование подобия $x_i = \frac{R}{4} y_i$ ($i = 1, \dots, N$). При этом уравнение (1) преобразуется в уравнение

$$L\left(\frac{R}{4}y\right)W + \frac{R}{4}\left(b\left(\frac{R}{4}y\right), \nabla W\right) - \frac{\alpha^2}{|y|^2}W = 0 \quad \text{в } 1 < |y| < 4, \quad (63)$$

где $W = \Gamma_\alpha\left(\frac{R}{4}y\right)$.

В силу условий равномерной эллиптичности (2,1), условий (B₂) на $b_k(x)$ ($k = 1, \dots, N$) и (36) получим, что верхние грани коэффициентов преобразованного уравнения (63) не зависят от R и что выполнены условия (57) леммы 18 с постоянной $q_0 = -1/4$.

Рассмотрим сферу $\{|y| = 2\}$ и впишем в кольцо $\{1 \leq |y| \leq 4\}$ шар $B_1^{y_1}$ с центром в любой точке $y_1 \in \{|y| = 2\}$. Из леммы 18 и принципа максимума [82] получим неравенство

$$W(y_1) \leq e^{-k[\alpha]} \sup_{1 \leq |y| \leq 4} W(y) \leq e^{-k[\alpha]} \sup_{1 \leq |y| \leq 4} W(y).$$

Из произвольности точки $y_1 \in \{|y| = 2\}$ и принципа максимума имеем неравенство

$$\sup_{|y|=2} W(y) \leq e^{-k[\alpha]} \sup_{|y|=4} W(y).$$

Применяя обозначение $M_R = \sup_{|x|=R} \Gamma_\alpha(x)$ и возвращаясь к переменным x , перепишем последнее неравенство в виде

$$M_{R/2} \leq e^{-k[\alpha]} M_R. \quad (64)$$

Итерируем неравенство (64), заменяя на каждом шаге R на $R/2$. На втором шаге из (64) следует неравенство

$$M_{R/2} \leq e^{-k[\alpha]} M_{R/2} \leq e^{-2[\alpha]k} M_R.$$

Продолжим процесс итерирования неравенства (64) n раз, где n выберем из условия $1 \leq R/2^n \leq 2$, т.е. из условия $n \geq \log_2(R/2)$, и, учитывая, что $|x| \leq R$, и проводя элементарные преобразования, получим неравенство

$$\begin{aligned} M_R &\geq M_1 e^{k[\alpha]n} \geq e^{[\alpha]k \log_2 \frac{R}{2}} M_1 \geq M_1 e^{(\alpha-1)k \log_2 \frac{|x|}{2}} \\ &= 2^{\log_2 e^{k \cdot (\alpha-1) \log_2 \frac{|x|}{2}}} M_1 = M_1 \left(\frac{|x|}{2} \right)^{(\alpha-1)k_2} = C_4 |x|^{(\alpha-1)k_2}, \end{aligned} \quad (65)$$

где

$$k_2 = \log_2 e^k, \quad k = \log \frac{1}{1-\delta}, \quad C_4 = \frac{\sup_{|x| \leq 1} \Gamma_\alpha(x)}{2^{(\alpha-1)k_2}}.$$

Применяя принцип максимума [82], неравенство Харнака (42) и неравенство (65) при $|x| < R$, получим

$$\Gamma_\alpha(x) \geq \inf_{|x|=R} \Gamma(x) \geq \frac{1}{C_1} \sup_{|x|=R} \Gamma(x) \geq \frac{C_3}{C_1} |x|^{(\alpha-1)k_2} = C_5 |x|^{(\alpha-1)k_2}. \quad (66)$$

Используя (66), завершим доказательство леммы 12. По данному $m > 0$ найдем число α_0 из равенства $k_2(\alpha - 1) = m$, т.е. $\alpha_0 = 1 + m/k_2$, и, согласно лемме 17, найдем решение $\Gamma_{\alpha_0}(x)$ уравнения (1), для которого (в силу (66)) будет справедливо неравенство

$$\Gamma_{\alpha_0}(x) > C(|x|^m + 1). \quad (67)$$

Лемма 12 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Для каждого $\alpha_0 > 0$ и каждого решения уравнения (1) $\Gamma_{\alpha_0}(x)$ при $\alpha_1 > \alpha_0$ найдется решение $\Gamma_{\alpha_1}(x)$ уравнения (1), для которого имеет место неравенство

$$\Gamma_{\alpha_1}(x) > \Gamma_{\alpha_0}(x), \quad |x| \geq a,$$

где $a = a(\alpha_0, \alpha_1, N, \lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценки (51) леммы 17 для каждого α_0 и каждого решения Γ_{α_0} уравнения (1) получаем

$$\Gamma_{\alpha_0}(x) \leq C_3(1 + |x|)^l, \quad l = l(N, \alpha_0, \lambda_1). \quad (68)$$

Для фиксированного α_0 выберем α_1 из неравенства

$$(\alpha_1 - 1)k_2 \geq l(N, \alpha_0, \lambda_1)$$

и тогда по лемме 12 найдем решение $\Gamma_{\alpha_1}(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее в силу (65) неравенству

$$\Gamma_{\alpha_1}(x) \geq C_5|x|^{(\alpha_1-1)k_2}. \quad (69)$$

Из неравенств (68), (69) получим требуемое утверждение:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha_1}(x) - \Gamma_{\alpha_0}(x) &\geq C_5|x|^{(\alpha_1-1)k_2} - C_3|x|^{l(N, \alpha_0, \lambda)} \\ &= |x|^{(\alpha_1-1)k_2}(C_5 - C_3|x|^{l-k_2(\alpha_1-1)}) > 0 \quad \text{при } |x| \geq a = \left(\frac{C_5}{C_3}\right)^{\frac{1}{(\alpha_1-1)k_2-l}}. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

При доказательстве теоремы 3 нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 19. Пусть коэффициенты $b_k(x)$ ($k = 1, \dots, N$) удовлетворяют условиям (B₂), коэффициент $q(x)$ определен равенством

$$q(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha^2}{|x|^2(\ln|x|)^s} & \text{при } |x| > 2, \quad 0 < s \leq 1, \quad \alpha > 0, \\ 0 & \text{при } |x| \leq 2. \end{cases} \quad (70)$$

Тогда существует функция $\Gamma(|x|) = \Gamma(x)$ такая, что:

- 1) $\Gamma(x) > 0$; 2) $\Gamma(x) \in W_2^{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^N)$; 3) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Gamma(|x|) = \infty$;
- 4) $\Gamma(x)$ является обобщенным решением неравенства

$$\Delta \Gamma + (b(x), \nabla \Gamma) + q(x)\Gamma \leq 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^N, \quad (71)$$

т.е. имеет место интегральное неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^N} [-(\nabla \Gamma, \nabla \varphi) + ((b, \nabla \Gamma) + q\Gamma)\varphi] dx \leq 0 \quad (72)$$

для любой $\varphi(x) \geq 0$ из класса $C_0^1(\mathbb{R}^N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать решение неравенств (71), (72) в виде $\Gamma = \Gamma(r)$, $r = |x|$, где $\Gamma(r) > 0$, $\Gamma_r(r) \geq 0$ при $r > 0$. Учитывая условия (B₂) и формулу (70), будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma + (b, \nabla \Gamma) + q\Gamma &= \Gamma_{rr} + \frac{N-1}{r}\Gamma_r + \sum_{k=1}^N b_k \frac{x_k}{r}\Gamma_r + q\Gamma \\ &\leq \Gamma_{rr} + \frac{N-1+B}{r}\Gamma_r + q(r)\Gamma \quad \text{при } r > 2. \end{aligned} \quad (73)$$

Пусть $\Gamma(r)$ – решение следующего уравнения:

$$\Gamma_{rr} + \frac{N-1+B}{r}\Gamma_r - \frac{\alpha^2}{r^2(\ln r)^s}\Gamma = 0, \quad r > 2, \quad (74)$$

удовлетворяющее условиям

$$\Gamma|_{r=2} = 1, \quad \Gamma_r|_{r=2} = 0. \quad (75)$$

Тогда правая часть (73) равна нулю. В уравнении (74) проведем замену $t = \ln r$. Тогда $\Gamma_r = \frac{1}{r}\Gamma_t$, $\Gamma_{rr} = \frac{1}{r^2}(\Gamma_{tt} - \Gamma_t)$, и равенства (74), (75) приобретают вид

$$\Gamma_{tt} + (N-2+B)\Gamma_t - \frac{\alpha^2}{t^s}\Gamma = 0, \quad t > t_0 = \ln 2, \quad (76)$$

$$\Gamma|_{t=t_0} = 1, \quad \Gamma_t|_{t=t_0} = 0. \quad (77)$$

Докажем, что $\Gamma(t) > 1$ при $t > t_0$. Предположим противное, т.е. что существует $t_1 > t_0$, для которого $\Gamma(t_1) \leq 1$. Так как $\Gamma(t_0) = 1$ и $\Gamma(t_1) < 1$, то существует точка $t_2 \in (t_0, t_1)$, в которой $\Gamma(t)$ достигает максимума, т.е.

$$\Gamma(t_2) > 0, \quad \Gamma_t(t_2) = 0, \quad \Gamma_{tt}(t_2) \leq 0.$$

Тогда уравнение (75) в $t = t_2$ превращается в равенство

$$\Gamma_{tt}(t_2) = \frac{\alpha^2}{t_2^s}\Gamma(t_2),$$

правая часть которого положительна, а левая часть не положительна.

Полученное противоречие доказывает, что $\Gamma(t) > 1$ при $t > t_0$. Умножим (76) на $e^{\gamma t}$, где $\gamma = N + B - 2$, и проинтегрируем по t от t_0 до t . Будем иметь

$$\int_{t_0}^t (e^{\gamma \tau} \Gamma_\tau)_\tau d\tau = \alpha^2 \int_{t_0}^t \Gamma e^{\gamma \tau} \frac{d\tau}{\tau^s},$$

т.е.

$$e^{\gamma t} \Gamma_t(t) - e^{\gamma t_0} \Gamma_t(t_0) > \frac{\alpha^2}{t^s} \int_{t_0}^t e^{\gamma \tau} d\tau = \frac{\alpha^2}{t^s \gamma} (e^{\gamma t} - e^{\gamma t_0}).$$

Учитывая, что $\Gamma_t(t_0) = 0$ и поделив на $e^{\gamma t}$, получим

$$\Gamma_t \geq \frac{\alpha^2}{\gamma t^s} (1 - e^{-\gamma(t-t_0)}).$$

Выберем $T = T(\gamma, \alpha, t_0)$ так, чтобы $1 - e^{-\gamma(t-t_0)} > 1/2$ при $t > T > t_0$. Достаточно положить

$$T = \frac{\ln 2 + t_0 \gamma}{2},$$

тогда при $t \geq T$ из последнего неравенства получим

$$\Gamma_t \geq \frac{\alpha^2}{2\gamma t^s}, \quad 0 < s \leq 1. \quad (78)$$

Интегрируя это неравенство по t при $s \in (0, 1)$, получим

$$\Gamma(t) - \Gamma(T) > \frac{\alpha^2}{2\gamma(1-s)} [t^{1-s} - T^{1-s}], \quad t > T.$$

Так как $0 < s < 1$, то $\Gamma(t) > C_1 t^{1-s}$ при достаточно большом $T_1 \geq T$. Возвращаясь к переменной r , $r = e^t$, получим

$$\Gamma(r) \geq C_1 (\ln r)^{1-s}, \quad r \geq e^T, \quad 0 < s < 1. \quad (79)$$

Из (79) следует, что $\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma(r) = +\infty$.

При $s = 1$ интегрируем (78) по t , тогда

$$\Gamma(t) - \Gamma(T) > \frac{\alpha^2}{2\gamma} (\ln t - \ln T) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty. \quad (80)$$

Из (79) и (80) следует, что функции

$$\Gamma = \begin{cases} 1 & \text{при } r \leq 2, \\ \Gamma(r) & \text{при } r \geq 2, \end{cases} \quad (81)$$

где $\Gamma(r)$ – решение задачи (74), (75), удовлетворяет требуемым свойствам 1)–4) леммы 19.

Лемма 19 доказана.

Для доказательства теоремы 5 нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 20. Пусть коэффициенты $b_k(x)$ ($k = 1, \dots, N$) удовлетворяют условиям (B_2) и коэффициент $q(x)$ имеет вид (36). Тогда существует функция $\Gamma(r) > 0$, для которой выполнены условия:

1) $\Gamma(r) > 0$; 2) $\Gamma(r) \in W_2^{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^N)$; 3) $\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma(r) = \infty$;
 $\Gamma(r)$ удовлетворяет интегральному неравенству (72) при $q(x)$, определенному в (36).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать решение неравенства (71) или (72) в виде $\Gamma = \Gamma(r)$, где $\Gamma(r) > 0$, $\Gamma'(r) \geq 0$ при $r > 0$. Учитывая условия (B₂) и формулу (36,1), будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma + (b(x), \nabla\Gamma) + q(x)\Gamma &\leq \Gamma_{rr} + \frac{N-1}{r}\Gamma_r + \sum_{k=1}^N b_k(x) \frac{x_k}{r}\Gamma_r - \frac{\alpha^2}{r^2}\Gamma \\ &\leq \Gamma_{rr} + \frac{N-1+B}{r}\Gamma_r - \frac{\alpha^2}{r^2}\Gamma. \end{aligned} \quad (82)$$

Пусть $\Gamma(r) > 0$ – решение уравнения

$$\Gamma_{rr} + \frac{N-1+B}{r}\Gamma_r - \frac{\alpha^2}{r^2}\Gamma = 0, \quad r > 1, \quad (83)$$

удовлетворяющее условиям

$$\Gamma|_{r=1} = 1, \quad \Gamma_r|_{r=1} = 0,$$

тогда функция $\Gamma(|x|)$ удовлетворяет в силу (82) неравенству

$$\Delta\Gamma + (b(x), \nabla\Gamma) + q(x)\Gamma \leq 0 \quad \text{при } |x| > 1. \quad (84)$$

Будем искать решение уравнения (83) в виде $\Gamma = r^l$. Вставляя $\Gamma = r^l$ в (83), получим уравнение

$$l^2 + (N-2+B)l - \alpha^2 = 0, \quad (85)$$

которое имеет корни

$$l_1 = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 + 4\alpha^2}}{2} > 0, \quad l_2 = \frac{-Q - \sqrt{Q^2 + 4\alpha^2}}{2}, \quad (86)$$

где

$$Q = N + B - 2.$$

Решение задачи (83), (84) имеет вид

$$\Gamma(r) = C_1 r^{l_1} + C_2 r^{l_2}, \quad (87)$$

где

$$C_1 = \frac{l_2}{l_1 - l_2} > 0, \quad C_2 = \frac{l_1}{l_1 - l_2}.$$

Определим теперь обобщенное решение $\Gamma_1(x)$ неравенства (82) в $\mathbb{R}^N$, полагая

$$\Gamma_1(x) = \begin{cases} \Gamma(|x|) & \text{при } |x| > 1, \\ 1 & \text{при } |x| \leq 1, \end{cases} \quad (88)$$

где $\Gamma(|x|)$ – решение задачи (83), (84), определенное формулой (87).

Функция (88) по построению принадлежит $W_2^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ и, кроме того, очевидно удовлетворяет неравенству (82) и, следовательно, и в интегральном смысле (72).

Очевидно также, что функция (88) обладает следующими свойствами:

1) $\Gamma_1(x) > 0$; 2) $\Gamma_1(x) \in W_2^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$; 3) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Gamma_1(|x|)|x|^{-l_1} = C_1 > 0$.

Так как в силу (86) $l_1 > 0$, то $\Gamma_1(x) \sim C_1|x|^{l_1} \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$. Следовательно, лемма 20 доказана.

§ 3. Доказательство результатов п. 4° § 1

В бесконечном по t цилиндре $\{x, t : |x| < R, t > 0\}$ рассмотрим уравнение

$$L(x)u + (b(x), \nabla u) + c(x)u - u_t = 0, \quad (1)$$

где $a_{ik}(x) = a_{ki}(x)$, выполнено условие (2,1) параболичности, коэффициенты уравнения (1) измеримы и ограничены при $|x| < R$ и $c(x) \leq 0$ при $|x| < R$.

Пусть $p(x, t)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$p|_{|x|=R} = 0, \quad t > 0, \quad p(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

где $\varphi(x) \in C(B_R)$.

Напомним [39], что $p(x, t)$ называется обобщенным решением задачи (1), (2), если $V(x, t)$ принадлежит классу $W_2^{1,0}(B_R \times (0, T))$, $T > 0$, удовлетворяет первому из равенств (2) и справедливо интегральное тождество

$$\int_0^T \int_{|x| \leq R} [-\eta_t p + (a(x) \nabla p, \nabla \eta) - \eta((b(x), p) + c(x)p)] dx dt = \int_{|x| \leq R} \varphi(x) \eta(x, 0) dx$$

для всех функций $\eta(x, t)$ из $W_2^{1,1}(B_R \times (0, T))$, удовлетворяющих условиям

$$\eta|_{|x| < R, t=T} = 0, \quad \eta|_{|x|=R, 0 < t < T} = 0.$$

Существование и единственность решения задачи (1), (2) хорошо известны [5], [39], [46].

ЛЕММА 21. *Решение задачи (1), (2) имеет предел*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t) = 0 \quad (3)$$

равномерно по $x \in B_R$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если коэффициенты уравнения – гладкие функции, то утверждение, аналогичное лемме 21, хорошо известно (см. теорему 2 из [5; § 12]). Используя известный результат о существовании единственной положительной собственной функции $p(x)$, отвечающей положительному собственному значению λ_0 первой краевой задачи

$$L(x)p + (b(x), \nabla p) + c(x)p + \lambda p = 0, \quad p|_{|x|=2R} = 0,$$

установленный в работах [87], [88], с помощью теоремы М. Г. Крейна, М. А. Рутмана [89], можно легко доказать лемму 21. Ради краткости не будем этого делать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1–3 будем проводить одновременно, ибо они опираются только на свойства 1)–3) функций $\Gamma(x)$, приведенные в леммах 10, 11 и 19 и обоснованные в § 2.

Итак, пусть $\Gamma(x) > 0$ – функция из класса $W_2^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ такая, что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Gamma(x) = +\infty \quad (4)$$

и $\Gamma(x)$ является обобщенным решением (см. (2,1)) из $W_2^{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ уравнения (неравенства)

$$L(x)\Gamma + (b(x), \nabla\Gamma) + q(x)\Gamma = 0 \quad (\leq 0), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (5)$$

где при $N = 1$ или $N = 2$ коэффициенты $b_k(x)$ удовлетворяют условиям (B_1) , а коэффициент $q(x)$ определен равенством (2,2). При $N \geq 3$ коэффициенты $b_k(x)$ ($k = 1, \dots, N$) удовлетворяют условиям (B_2) , а коэффициент $q(x)$ определен равенством (36,2) в случае теоремы 2 и равенством (70,2) в случае теоремы 3.

Наряду с задачей Коши (77,1), (78,1) мы рассмотрим задачу Коши

$$L(x)W + (b(x), \nabla W) + q(x)W - W_t = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (6)$$

$$W(x, 0) = |u_0(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (7)$$

где $q(x)$ определен формулой (2,2) при $N = 1$ или $N = 2$, а при $N \geq 3$ $q(x)$ определен по формуле (36,2) или по формуле (70,2).

Из принципа максимума [12], [39] легко получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 22. *Для решений задач Коши (77,1), (78,1) и (6), (7) справедливо неравенство*

$$|u(x, t)| \leq W(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что для доказательства теорем 1–3 из п. 4° §1 достаточно доказать, что существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x, t) = 0 \quad (9)$$

равномерно по $x \in K$ в $\mathbb{R}^N$.

Фиксируем компакт $K \subset \mathbb{R}^N$ и выберем $r > 0$ так, чтобы $\overline{B}_r \supset K$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \delta(N, r) > 0$ такое, что

$$\delta\Gamma(x) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in \overline{B}_r, \quad (10)$$

где $\Gamma(x)$ – положительное решение соответствующего эллиптического уравнения (5), для которого справедливо (4) (леммы 10, 11, 19).

Рассмотрим функцию

$$V(x, t) = \delta\Gamma(x) - W(x, t), \quad (11)$$

где $\Gamma(x)$ – функция из лемм 10, 11, 19, а $W(x, t)$ – решение задачи (6), (7). Так как $W(x, t)$ является *ограниченной* функцией, $0 < W(x, t) \leq M$, в $\mathbb{R}_+^{N+1}$, а функция $\Gamma(x)$ удовлетворяет предельному равенству (4), то существует $R, R > r$, такое, что

$$V(x, t)|_{|x|=R} \geq 0 \quad \text{для всех } t > 0. \quad (12)$$

Ясно также, что функция $V(x, t)$ (11) удовлетворяет уравнению (неравенству)

$$L(x)V + (b(x), \nabla V) + q(x)V - V_t = 0 \quad (\leq 0), \quad |x| < R, \quad t > 0, \quad (13)$$

и условию

$$V(x, 0) = \delta\Gamma(x) - |u_0(x)|, \quad x \in B_R. \quad (14)$$

Введем обозначение

$$\varphi(x) \equiv \delta\Gamma(x) - |u_0(x)|, \quad |x| < R. \quad (15)$$

Рассмотрим задачу

$$L(x)p + (b(x), \nabla p) + q(x)p - p_t = 0 \ (\leq 0), \quad |x| < R, \quad t > 0, \quad (16)$$

$$p|_{|x|=R} = 0, \quad (17)$$

$$p(x, 0) = \varphi^-(x), \quad |x| < R, \quad (18)$$

где $\varphi^-(x) = \min_{|x| < R} (\varphi(x), 0) \leq 0$.

Из принципа максимума [12], [39] тогда следует, что $p(x, t) \leq 0$ при $|x| < R, t > 0$. Из леммы 21 вытекает, что существует предел (3) равномерно по $x \in B_R$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что при $t \geq T(\varepsilon)$ справедливо

$$p(x, t) > -\frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in B_R. \quad (19)$$

Введем функцию

$$r(x, t) = V(x, t) - p(x, t),$$

где $V(x, t)$ – решение уравнения (13), удовлетворяющее условиям (12) и (14), а $p(x, t)$ – решение задачи (16)–(18).

Ясно, что функция $r(x, t)$ удовлетворяет уравнению (неравенству) (16) при $|x| < R, t > 0$ и условиям

$$r(x, t)|_{|x|=R} \geq 0, \quad t > 0, \quad r(x, 0) = \varphi(x) - \varphi^-(x) = \varphi^+(x) \geq 0,$$

где $\varphi^+(x) = \max_{|x| < R} (\varphi(x), 0) \geq 0$. Следовательно, по принципу максимума [39]

$$r(x, t) \geq 0, \quad |x| < R, \quad t > 0. \quad (20)$$

Учтем далее, что при $|x| < r$ имеет место неравенство (10), а при $t \geq T(\varepsilon)$ справедливо неравенство (19), тогда из (20), (10) и (19) получим

$$0 \leq W(x, t) \leq \delta\Gamma(x) - p(x, t) < \varepsilon \quad \text{при } t > T(\varepsilon) \quad (21)$$

равномерно по $x \in \overline{B}_r$, а поэтому в силу (8) получим, что существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad (22)$$

равномерно на K в $\mathbb{R}^N$.

Теоремы 1–3 из п. 4° §1 доказаны.

Рассмотрим две задачи Коши, задачу (77,1), (78,1) и задачу

$$L(x)V_\alpha + (b(x), \nabla V_\alpha) + q_\alpha(x)V_\alpha - V_t = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N, \quad (23)$$

$$V_\alpha(x, 0) = |u_0(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (24)$$

где функция $u_0(x)$, которая определена равенством (78,1), и функция (24) удовлетворяют условию роста (81,1), коэффициент $q_\alpha(x)$ в (23) определен равенством (36,2), а коэффициенты $b_i(x)$ удовлетворяют условию (B₂).

ЛЕММА 23. При сформулированных условиях имеет место неравенство

$$|u(x, t)| \leq V_\alpha(x, t). \quad (25)$$

Доказательство леммы является прямым следствием принципа максимума [39], [12] и может быть опущено.

Пусть $V_{\alpha_1}(x, t)$ и $V_{\alpha_2}(x, t)$ – решения задачи Коши (23), (24) с одними и теми же коэффициентами $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$, начальной функцией $|u_0(x)|$, но с различными коэффициентами $q_{\alpha_1}(x)$, $q_{\alpha_2}(x)$, определенными в (36,2) при $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ соответственно.

ЛЕММА 24. Если $\alpha_1 \geq \alpha_2$, то имеет место неравенство

$$V_{\alpha_1}(x, t) \leq V_{\alpha_2}(x, t) \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$z(x, t) = V_{\alpha_2}(x, t) - V_{\alpha_1}(x, t).$$

Тогда для $z(x, t)$ получим задачу

$$L(x)z + (b, \nabla z) + q_{\alpha_2}z - z_t = -V_{\alpha_1}(q_{\alpha_2} - q_{\alpha_1}) \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (27)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (28)$$

решение которой имеет вид

$$z(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^N} G_{\alpha_2}(x, y; t, \tau) V_{\alpha_1}(y, \tau) (q_{\alpha_2}(y) - q_{\alpha_1}(y)) dy,$$

где $G_{\alpha_2}(x, y; t, \tau) > 0$ – фундаментальное решение уравнения (23) при $\alpha = \alpha_2$ (см. [90]). Так как $q_{\alpha_1}(y) \leq q_{\alpha_2}(y)$ при $\alpha_2 \leq \alpha_1$ и $V_{\alpha_1} \geq 0$, то $z(x, t) > 0$, т.е. (26) доказано.

Пусть выполнено условие роста (81,1); применяя лемму 12, найдем $\alpha_0 = \alpha_0(m, N, \lambda_1) > 0$ и решение $\Gamma_{\alpha_0}(x)$ уравнения (1,2) (где коэффициент $q(x)$ определен равенством (36,2) при $\alpha = \alpha_0$, а коэффициенты $b_i(x)$ удовлетворяют условию (B₂)), для которого имеет место неравенство

$$\Gamma_{\alpha_0}(x) \geq C|x|^m, \quad |x| > 1.$$

Фиксируем эти $m > 0$ и α_0 .

ЛЕММА 25. Для выбранных $m > 0$ и α_0 и каждого $m_1 > m$ найдутся постоянная $\alpha_1 = \alpha_1(m_1, N, \lambda_1) > \alpha_0$ и решение Γ_{α_1} уравнения (1,2) такие, что выполнено неравенство

$$\Gamma_{\alpha_1}(x) \geq C|x|^{m_1}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (29)$$

и для решения задачи Коши (23), (24) при $\alpha = \alpha_1$ справедливо неравенство

$$V_{\alpha_1}(x, t) \leq C\Gamma_{\alpha_1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m_1 > m$, тогда в силу следствия леммы 12 (приведенного в § 2 сразу после доказательства леммы 12) найдутся $\alpha_1 > \alpha_0$ и решение $\Gamma_{\alpha_1}(x)$ уравнения (1,2), для которых справедливо (29). Рассмотрим функцию

$$z(x, t) = C_5 \Gamma_{\alpha_1}(x) - V_{\alpha_1}(x, t),$$

где $C_5 > 0$ будет выбрано ниже, а функция $V_{\alpha_1}(x, t)$ – решение задачи Коши (23), (24). Функция $z(x, t)$ удовлетворяет тому же уравнению (23) и начальному условию $z(x, 0) = C \Gamma_{\alpha_1}(x) - |u_0(x)|$. Так как $|u_0(x)|$ удовлетворяет условию роста (81,1) и для $\Gamma_{\alpha_1}(x)$ справедливо (29) с $m_1 > m$, то существует $C > 0$, для которого $z(x, 0) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда из принципа максимума [12], [39] получим, что $z(x, t) \geq 0$ внутри слоя $H = \{x, t : x \in \mathbb{R}^N, 0 < t \leq T\}$ для любого $T > 0$. Из произвольности $T > 0$ следует, что неравенство (29) обосновано.

Лемма 25 доказана.

В силу леммы 23 для доказательства теоремы 4 достаточно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. Пусть для $|u_0(x)|$ выполнено условие (81,1), коэффициенты $b_k(x)$ ($k = 1, \dots, N$) удовлетворяют условиям (B₂), тогда существует постоянная $\alpha_2 = \alpha_2(m, N, \lambda_1) > 0$ такая, что решение задачи Коши (23), (24) $V_{\alpha_2}(x, t)$ имеет предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_{\alpha_2}(x, t) = 0 \quad (31)$$

равномерно по x на каждом компакте $K \subset \mathbb{R}^N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем компакт K в $\mathbb{R}^N$ и выберем $r > 0$ так, чтобы $\overline{B}_r \supset K$.

Пусть $m_1 > m$, тогда в силу леммы 12 найдем $\alpha_1 > 0$ такое, чтобы было выполнено (29). Для выбранного α_1 в силу следствия леммы 12 найдем $\alpha_2 > \alpha_1$ и найдем решение $\Gamma_{\alpha_2}(x)$ уравнения (1,2), удовлетворяющее неравенствам

$$\Gamma_{\alpha_2}(x) > \Gamma_{\alpha_1}(x) \quad \text{при} \quad |x| \geq a, \quad (32)$$

$$\Gamma_{\alpha_2}(x) \geq C(1 + |x|^{m_1}). \quad (33)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$, для которого

$$\delta \Gamma_{\alpha_2}(x) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in \overline{B}_r. \quad (34)$$

Рассмотрим функцию

$$W(x, t) = \delta \Gamma_{\alpha_2}(x) - V_{\alpha_2}(x, t), \quad (35)$$

где $V_{\alpha_2}(x, t)$ – решение задачи Коши (23), (24).

Так как $\alpha_2 > \alpha_1$, то в силу (26) и (30) получим

$$V_{\alpha_2}(x, t) \leq V_{\alpha_1}(x, t) \leq C \Gamma_{\alpha_1}(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Из оценок (65,2) и (51,2), установленных в доказательстве леммы 12 и лемме 17 соответственно, получим

$$\begin{aligned} W(x, t) &\geq \delta \Gamma_{\alpha_2}(x) - V_{\alpha_1}(x, t) \geq \delta \Gamma_{\alpha_2}(x) - C \Gamma_{\alpha_1}(x) \geq \delta C_5 |x|^{(\alpha_2-1)k_2} - C_3 |x|^{l_1} \\ &= |x|^{(\alpha_2-1)k_2} (\delta C_5 C_3 |x|^{l(\alpha_1) - (\alpha_2-1)k}) > 0 \end{aligned} \quad (36)$$

при

$$|x| \geq a_1 = \left(\frac{\delta C_5}{C_3} \right)^{\frac{1}{(\alpha_2-1)k_2 - l(\alpha_1)}} > 0,$$

если α_2 выбрать из условия $(\alpha_2 - 1)k_2 > l(\alpha_1)$.

В силу (36) существует $R \geq \max(r, a_1)$ такое, что справедливо неравенство

$$W(x, t)|_{|x|=R} \geq 0 \quad \text{для } t > 0. \quad (37)$$

Поэтому функция (35) удовлетворяет соотношениям

$$L(x)W + (b(x), \nabla W) + q_{\alpha_2}(x)W - W_t = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (38)$$

$$W|_{|x|=R} \geq 0, \quad t > 0, \quad (39)$$

$$W|_{t=0} = \delta \Gamma_{\alpha_2}(x) - C(1 + |x|^m). \quad (40)$$

Рассмотрим функции $z(x, t) = W(x, t) - p(x, t)$, где $W(x, t)$ — функция (35), а $p(x, t)$ является решением задачи

$$L(x)p + (b(x), \nabla p) + q_{\alpha_2}(x)p - p_t = 0, \quad |x| < R, \quad t > 0, \quad (41)$$

$$p|_{|x|=R} = 0, \quad t > 0, \quad (42)$$

$$p(x, 0) = \min(0, \delta \Gamma_{\alpha_2}(x) - C(1 + |x|^m)), \quad |x| < R. \quad (43)$$

В лемме 21 установлено, что существует предел (3), т.е. для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$p(x, t) > -\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } t > T(\varepsilon), \quad x \in B_R. \quad (44)$$

Функция $z(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$L(x)z + (b(x), \nabla z) + q_{\alpha_2}(x)z - z_t = 0, \quad |x| < R, \quad t > 0,$$

и условиям

$$z(x, t)|_{|x|=R} \geq 0, \quad t > 0,$$

$$z(x, 0) = \max(0, \delta \Gamma_{\alpha_2}(x) - C(1 + |x|^m)) \geq 0.$$

Следовательно, по принципу максимума [12], [39] получим $z(x, t) \geq 0$, $|x| \leq R$, $t > 0$, т.е.

$$V_{\alpha_2}(x, t) \leq \delta \Gamma_{\alpha_2}(x) - p(x, t), \quad |x| \leq R, \quad t > 0. \quad (45)$$

Применяя в (45) неравенства (34) и (44), будем иметь

$$V_{\alpha_2}(x, t) < \varepsilon \quad \text{при } t \geq T(\varepsilon), \quad x \in K,$$

т.е. доказано, что существует предел (31), равномерный по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Теорема 4 доказана.

Рассмотрим задачу Коши

$$\Delta V_\alpha + (b(x), \nabla V_\alpha) + q_\alpha(x)V_\alpha - V_{\alpha t} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (46)$$

$$V_\alpha(x, 0) = |u_0(x)|, \quad (47)$$

где $q_\alpha(x)$ определено по формуле (36,2), $b_k(x)$ ($k = 1, \dots, N$) удовлетворяет условиям (B_2) , $u_0(x)$ удовлетворяет условию (81,1).

Применением принципа максимума легко устанавливается неравенство

$$|u_\alpha(x, t)| \leq V_\alpha(x, t), \quad (48)$$

где $V_\alpha(x, t)$ – решение задачи (46), (48), а $u(x, t)$ – решение задачи (77,1), (78,1) с $L = \Delta$.

Точно так же, как в лемме 24, доказывается свойство монотонного убывания по α решений задачи Коши (46), (47)

$$V_{\alpha_1}(x, t) \leq V_{\alpha_2}(x, t), \quad \alpha_1 > \alpha_2. \quad (49)$$

В $\mathbb{R}^N$ рассмотрим неравенство

$$\Delta \Gamma_\alpha + (b(x), \nabla \Gamma_\alpha) + q_\alpha(x)\Gamma_\alpha \leq 0, \quad (50)$$

где коэффициент q_α определен в (36,2).

ЛЕММА 26. Для $m > 0$, $B > 0$ и $\alpha_0^2 = m(m + N - 2 + B)$ существует число $l > 0$, для которого справедливо неравенство

$$V_{\alpha_0}(x, t) \leq l\Gamma_{\alpha_0}(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (51)$$

где $V_{\alpha_0}(x, t)$ – решение задачи (46), (48), Γ_{α_0} – решение неравенства (50) при $\alpha = \alpha_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha_0^2 = m(m + N - 2 + B)$ уравнение (83,2) имеет корни

$$l_1 = m > 0, \quad l_2 = 2 - m - N - B < 0,$$

и функция (88,2) тогда имеет вид

$$\Gamma_{\alpha_0}^1(|x|) = \begin{cases} n_1|x|^m + n_2|x|^{2-N-m-B}, & |x| > 1, \\ 1, & |x| \leq 1, \end{cases} \quad (52)$$

где

$$n_1 = \frac{N + B + m - 2}{N + B + 2m - 2}, \quad n_2 = \frac{m}{N + B + 2m - 2}.$$

Далее, рассматривая функцию

$$z(x, t) = l\Gamma_{\alpha_0}(|x|) - V_{\alpha_0}(x, t),$$

точно так же, как в лемме 25, мы докажем неравенство (51).

Лемма 26 доказана.

Неравенства (48), (49) и (51) являются ключевыми для доказательства теоремы 5, и дальнейший ход доказательства теоремы 5 аналогичен доказательству теоремы 4, и ради краткости не будем это повторять и будем считать, что теорема 5 доказана.

§ 4. О точности результатов п. 4° § 1

В работе [33] установлены утверждения, которые показывают точность условий теорем 1 и 2 из § 1 п. 4°, когда коэффициенты b_k в уравнении (77) отсутствуют.

Докажем лемму 3 из § 1 п. 4° при $N = 2$.

В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим уравнение

$$\Delta \Gamma + b_1(x)\Gamma_{x_1} + b_2(x)\Gamma_{x_2} + c(x)\Gamma = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

где коэффициенты определены формулами

$$c(x) = \begin{cases} -\alpha^2 & \text{при } r \leq 1, \\ 0 & \text{при } r > 1, \end{cases} \quad (2)$$

$$b_k(x) = \begin{cases} \frac{x_k}{r^2} & \text{при } r \geq 1, \\ 0 & \text{при } r < 1. \end{cases} \quad (3)$$

Будем искать решение уравнения (1) в виде функции

$$\Gamma = \Gamma(r) > 0, \quad \Gamma'(r) \geq 0, \quad r > 0.$$

Уравнение (1) с коэффициентами (2), (3) имеет вид

$$\Gamma_{rr} + \frac{1}{r}\Gamma_r - \alpha^2\Gamma = 0, \quad r < 1. \quad (4)$$

Рассмотрим решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям

$$\Gamma(0) = 1, \quad \Gamma_r(0) = 0, \quad (5)$$

и получим, что это решение имеет вид

$$\Gamma(r) = I_0(\alpha r), \quad r > 0, \quad (6)$$

где $I_\nu(x)$ – функция Бесселя порядка ν мнимого аргумента [91].

При $r > 1$ уравнение (1) с коэффициентами (2), (3) имеет вид

$$\Gamma_{rr} + \frac{2}{r}\Gamma_r = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям

$$\Gamma|_{r=1} = I_0(\alpha), \quad \Gamma_r|_{r=1} = \alpha I_1(\alpha). \quad (8)$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$\Gamma = \frac{C_1}{r} + C_2, \quad r > 1,$$

где постоянные определяются из (8), и мы получим

$$\Gamma(r) = -\frac{\alpha}{r}I_1(\alpha) + \alpha I_1(\alpha) + I_0(\alpha). \quad (9)$$

Определим начальную функцию $u_0(x)$ формулой

$$u_0(x) = \begin{cases} I_0(\alpha|x|) & \text{при } |x| \leq 1, \\ \Gamma(|x|) & \text{при } |x| \geq 1, \end{cases} \quad (10)$$

где $\Gamma(|x|)$ определено в (9), и рассмотрим задачу Коши

$$\Delta u + b_1(x)u_{x_1} + b_2(x)u_{x_2} + c(x)u - u_t = 0, \quad (11)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (12)$$

где коэффициенты определены в (2), (3) соответственно, а $u_0(x)$ определено формулой (10). Тогда решение (11), (12) имеет вид

$$u(x, t) = u_0(x) > 0, \quad t > 0. \quad (13)$$

Ясно, что $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u_0(x) > 0$ и решение задачи Коши (11), (12) не стабилизируется к нулю ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.

Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5 § 1 п. 4°. В $\mathbb{R}^N$ при $N \geq 3$ рассмотрим уравнение

$$\Delta \Gamma + \sum_{k=1}^N b_k(x) \Gamma_{x_k} + c(x) \Gamma = 0, \quad (14)$$

где

$$b_k(x) = \begin{cases} \frac{x_k m}{|x|^{2-\varepsilon}} & \text{при } |x| > 1, \quad m > 0, \\ 0 & \text{при } |x| \leq 1, \end{cases} \quad (15)$$

$$c(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha^2}{|x|^2} & \text{при } |x| > 1, \\ 0 & \text{при } |x| \leq 1. \end{cases} \quad (16)$$

Будем искать решение уравнения (14) при $|x| > 1$ в виде $\Gamma = \Gamma(r)$, где $\Gamma(r) > 0$, $\Gamma'(r) \geq 0$ при $r > 0$. Учитывая формулы (15), (16), получим, что уравнение (14) можно записать в виде

$$\Gamma_{rr} + \left(\frac{N-1}{r} + \frac{m}{r^{1-\varepsilon}} \right) \Gamma_r - \frac{\alpha^2}{r^2} \Gamma = 0, \quad r > 1. \quad (17)$$

Ищем решение уравнения (17), удовлетворяющее условиям

$$\Gamma|_{r=1} = 1, \quad \Gamma_r|_{r=1} = 0. \quad (18)$$

Сделаем в (17) замену функции по формуле

$$\Gamma(r) = V(r) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_1^r p(\sigma) d\sigma \right), \quad p(\sigma) = \frac{N-1}{\sigma} + \frac{m}{\sigma^{1-\varepsilon}}. \quad (19)$$

Получим, что $V(r)$ удовлетворяет уравнению

$$V'' - \frac{V}{r^{2-2\varepsilon}} \left[\frac{m^2}{4} + \frac{C_1}{r^\varepsilon} + \frac{C_2}{r^{2\varepsilon}} \right] = 0, \quad r > 1, \quad (20)$$

и условиям

$$V|_{r=1} = 1, \quad V'|_{r=1} = \frac{p(1)}{2} = \frac{N-1+m}{2}, \quad (21)$$

где

$$C_1 = \frac{m}{2}(N + \varepsilon - 2), \quad C_2 = \alpha^2 + \frac{(N-1)(N-3)}{4}, \quad r > 0.$$

Рассмотрим задачу

$$h'' - \frac{h}{r^{2-2\varepsilon}} \left[\frac{m^2}{4} + \frac{2C_1 + 2C_2}{r^\varepsilon} \right] = 0, \quad (22)$$

$$h|_{r=1} = 1, \quad h'|_{r=1} = \frac{N-1+m}{2}. \quad (23)$$

Легко видеть, что

$$h(r) \geq V(r) \quad \text{при} \quad r \geq 1. \quad (24)$$

Вводя обозначение

$$Q(r) = \frac{1}{r^{2-2\varepsilon}} \left[\frac{m^2}{4} + \frac{2C_1 + 2C_2}{r^\varepsilon} \right],$$

перепишем (22), (23) в виде

$$h'' - hQ(r) = 0, \quad h|_{r=1} = 1, \quad h'|_{r=1} = \frac{N-1+m}{2}. \quad (25)$$

Вводя в рассмотрение функцию

$$\alpha_1(r) = \frac{1}{8} \frac{Q''(r)}{Q^{3/2}(r)} - \frac{5}{32} \frac{(Q'(r))^2}{Q^{5/2}(r)},$$

легко показать, что

$$\int_1^\infty |\alpha_1(r)| dr < 1$$

и, кроме того, $Q(r) > 0$ при $r > 1$, $Q''(r)$ непрерывна при $r > 1$ и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{Q'(r)}{Q^{3/2}(r)} = 0.$$

Следовательно, выполнены все условия известной теоремы [92] о (В.К.Б.) асимптотике решений уравнения (25), т.е. существуют два линейно-независимых решения $y_{1,2}(r)$ уравнения (25) и

$$y_1(r) = [Q(r)]^{-1/4} \exp \left\{ \int_1^r \sqrt{Q(\sigma)} d\sigma \right\} (1 + \varepsilon_1(r)), \quad (26)$$

$$y_2(r) = [Q(r)]^{-1/4} \exp \left\{ - \int_1^r \sqrt{Q(\sigma)} d\sigma \right\} (1 + \varepsilon_2(r)), \quad (27)$$

где $\varepsilon_{1,2}(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, и эти асимптотические формулы можно дифференцировать по r :

$$y'_{1,2}(r) = \pm [Q(r)]^{1/2} \exp \left\{ \pm \int_1^r \sqrt{Q(\sigma)} d\sigma \right\} (1 + \varepsilon_{3,4}(r)), \quad (28)$$

$$\varepsilon_{3,4}(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

С помощью решений $y_1(r)$, $y_2(r)$, имеющих асимптотику (26), (27), построим решение задачи (22), (23) и определим главный член асимптотики при $r \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} h(r) &= C_1 y_1(r) + C_2 y_2(r), \\ C_1 y_1(1) + C_2 y_2(1) &= 1, \\ C_1 y'_1(1) + C_2 y'_2(1) &= \frac{N+m-1}{2}. \end{aligned}$$

В итоге получим, что

$$h(r) = C \sqrt{\frac{2}{m}} r^{(1-\varepsilon)/2} \exp \left\{ \frac{m}{2\varepsilon} [r^\varepsilon - 1] \right\} (1 + O(1)) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Используя (19), (24), (29), будем иметь

$$\begin{aligned} 0 < \Gamma(r) &= V(r) \frac{1}{r^{(N-1)/2}} \exp \left\{ -\frac{m}{2\varepsilon} [r^\varepsilon - 1] \right\} \\ &\leq \frac{h(r)}{r^{(N-1)/2}} \exp \left\{ -\frac{m}{2\varepsilon} [r^\varepsilon - 1] \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

и так как для $h(r)$ имеет место (29), то, очевидно, получим, что правая часть (30) стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma(r) = 0. \quad (31)$$

Определим в задаче Коши

$$\Delta u + \sum_{k=1}^N b_k(x) u_{x_k} + c(x) u - u_t = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad (32)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (33)$$

коэффициенты по формулам (15), (16), а начальную функцию $u_0(x)$ – формулой

$$u_0(x) = \begin{cases} \Gamma(|x|) & \text{при } |x| \geq 1, \\ 1 & \text{при } |x| \leq 1, \end{cases} \quad (34)$$

где $\Gamma(r)$ – ограниченное (в силу (31)) решение задачи (17), (18). Ясно, что решение задачи (32), (33) имеет вид $u(x, t) = u_0(x) > 0$ и, следовательно, $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$.

Таким образом, условия (В₂) в теореме 2 § 1 п. 4° являются точными.

Лемма 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7 § 1 п. 4°. Рассмотрим в $\mathbb{R}^N$ эллиптическое уравнение (14), в котором $b_k(x)$ определим формулами

$$b_k(x) = \begin{cases} \frac{Bx_k}{|x|^2} & \text{при } |x| > 2, \\ 0 & \text{при } |x| \leq 2, \end{cases} \quad (35)$$

а коэффициент $c(x)$ определим формулой

$$c(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha^2}{|x|^2 (\ln |x|)^s} & \text{при } |x| \geq 2, \ s > 1, \\ 0 & \text{при } |x| < 2. \end{cases} \quad (36)$$

При $r > 1$ уравнение (14) тогда имеет вид

$$\Gamma_{rr} + \frac{N-1+B}{r} \Gamma_r - \frac{\alpha^2 \Gamma}{r^2 (\ln r)^s} = 0, \quad r > 2. \quad (37)$$

При $s > 1$ ищем ограниченное при $r > 2$ решение уравнения (37), удовлетворяющее условиям

$$\Gamma|_{r=2} = 1, \quad \Gamma_r|_{r=2} = 0. \quad (38)$$

Сделаем в (37) замены $t = r^{N+B-2}$, $\Gamma = V(t)/t$. После очевидных преобразований получим

$$\Gamma_{tt} + \frac{2}{t} \Gamma_t - \frac{\alpha^2}{(N+B-2)^{s+2} t^2 (\ln t)^s} \Gamma = 0, \quad t > 2, \quad (39)$$

$$\Gamma|_{t=2^{N+B-2}} = 1, \quad \Gamma_t|_{t=2^{N+B-2}} = 0. \quad (40)$$

Так как $\Gamma = V(t)/t$, то для функции $V(t)$ после подстановки выражений

$$\Gamma_t = \frac{V_t}{t} - \frac{V}{t^2}, \quad \Gamma_{tt} = \frac{1}{t} V_{tt} - \frac{2}{t} V_t + \frac{2V}{t^3}$$

в (39), (40) получим задачу

$$V_{tt} - \frac{\alpha^2}{(N+B-2)^{2+s}} \frac{V}{t^2 (\ln t)^s} = 0, \quad (41)$$

$$V|_{t=2^{N+B-2}} = 2^{N+B-2}, \quad V_t|_{t=2^{N+B-2}} = 1. \quad (42)$$

Очевидно, что

$$\int_0^\infty \frac{t}{t^2 (\ln t)^s} dt < \infty \quad \text{при } s > 1.$$

Следовательно, мы можем применить к $V(t)$ теорему 5 из [93; с. 135], согласно которой если для коэффициента $Q(t)$ в уравнении

$$V'' + Q(t)V = 0$$

сходится интеграл

$$\int_0^\infty t(Q(t)) dt < \infty,$$

то любое решение $V(t) \geq 0$ этого уравнения имеет предел

$$V(t) \sim d_0 + d_1 t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\Gamma(r) \sim d_1 + \frac{d_0}{r^{N+B-2}} \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Поэтому существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma(r) = d_1 < \infty.$$

Рассмотрим задачу Коши (32), (33), в которой коэффициенты определены по формулам (35), (36), и положим, что $u_0(x)$ определена по формуле (34), в которой $\Gamma(|x|)$ обозначает решение задачи (37), (38). Тогда получим, что $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u_0(x) > 0$ при всех $x > 0$.

Лемма 7 доказана.

Автор выражает глубокую благодарность академику В. А. Ильину, академику А. М. Ильину и профессору В. А. Кондратьеву за внимание к работе и ряд ценных советов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Н. Бернштейн. Ограничение модулей последовательных производных решений уравнений параболического типа // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18. № 7. С. 385–388.
- [2] I. Petrowsky. Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung // Compositio Math. 1935. V. 1. № 3. P. 383–419.
- [3] A. Tychonoff. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur // Матем. сб. 1935. Т. 42. № 2. С. 199–216.
- [4] М. И. Вишик. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения // Матем. сб. 1956. Т. 39. № 1. С. 51–148.
- [5] А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН. 1962. Т. 17. № 3. С. 3–146.
- [6] О. А. Ладыженская. О единственности решения задачи Коши для параболического уравнения // Матем. сб. 1950. Т. 27. № 2. С. 175–184.
- [7] В. А. Ильин. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // УМН. 1960. Т. 15. № 2. С. 97–154.
- [8] В. А. Кондратьев. Краевые задачи для параболических уравнений в замкнутых областях // Труды ММО. 1966. Т. 15. С. 400–451.
- [9] В. П. Михайлов. Теорема существования и единственности решения одной граничной задачи для параболического уравнения в области с особыми точками на границе // Труды МИАН. 1967. Т. 91. С. 47–58.
- [10] С. Д. Эйдельман. Параболические системы. М.: Наука, 1964.
- [11] D. G. Aronson, J. Serrin. Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1967. V. 25. № 2. P. 81–122.
- [12] D. G. Aronson. Non-negative solutions of linear parabolic equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3). 1968. V. 22. № 4. P. 607–694.
- [13] D. G. Aronson. Uniqueness of positive weak solutions of second order parabolic equations // Ann. Polon. Math. 1965. V. 16. P. 285–303.
- [14] А. Фридман. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1965.

- [15] А. Н. Тихонов. Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных // Бюлл. МГУ. Матем. мех. 1938. Т. 1. №9. С. 1–49.
- [16] А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. МГУ. Матем. мех. 1937. Т. 1. №6. С. 1–26.
- [17] А. И. Вольперт. О распространении волн, описываемых нелинейными параболическими уравнениями // И. Г. Петровский. Избранные труды. Дифференциальные уравнения и теория вероятностей. М.: Наука, 1987. С. 333–358.
- [18] В. Д. Репников, С. Д. Эйдельман. Необходимые и достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. №2. С. 298–301.
- [19] В. В. Жиков. О стабилизации решений параболических уравнений // Матем. сб. 1977. Т. 104. №4. С. 597–616.
- [20] S. Kamin. On stabilization of solution of the Cauchy problem for parabolic equations // Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A. 1976. V. 76. №1. P. 43–53.
- [21] M. Krzyżański. Sur l'allure asymptotique des solutions d'équation du type parabolique // Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III. 1956. №4. P. 247–251.
- [22] M. Krzyżański. Sur l'allure asymptotique des solutions des problèmes de Fourier relatifs à une équation linéaire parabolique // Atti. Acad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8). 1960. V. 28. №1. P. 37–43.
- [23] M. Krzyżański. Sur l'allure asymptotique des potentiels de chaleur et de l'intégrale de Fourier-Poisson // Ann. Polon. Math. 1957. V. 8. №2. P. 288–299.
- [24] А. М. Ильин. О поведении решения задачи Коши для параболического уравнения при неограниченном возрастании времени // УМН. 1961. Т. 16. №2. С. 115–121.
- [25] Ф. Х. Мукминов. О равномерной стабилизации решений первой смешанной задачи для параболического уравнения // Матем. сб. 1990. Т. 181. №11. С. 1486–1509.
- [26] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, Ю. А. Михайлов. О равномерной стабилизации решения второй смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1985.. Т. 128. №2. С. 147–168.
- [27] А. К. Гущин. Стабилизация решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1976. Т. 101. №4. С. 459–499.
- [28] А. В. Лежнев. О поведении при больших значениях времени неотрицательных решений второй смешанной задачи для параболического уравнения // Матем. сб. 1986. Т. 129. №2. С. 186–200.
- [29] В. Д. Репников. О связи двух типов усреднений функции класса $T_p(\mathbb{R}^N)$ // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. №4. С. 798–801.
- [30] В. Н. Денисов. О стабилизации интеграла Пуассона в классе функций, имеющих степенной рост // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. №1. С. 30–40.
- [31] Р. З. Хасьминский. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений // Теория вероятн. и ее примен. 1960. Т. 5. №2. С. 196–214.
- [32] А. М. Ильин, Р. З. Хасьминский. Асимптотическое поведение решений параболических уравнений и эргодическое свойство неоднородных диффузионных процессов // Матем. сб. 1963. Т. 60. №3. С. 368–392.
- [33] В. Н. Денисов. О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений с младшим членом // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. №4. С. 506–515.
- [34] В. Н. Денисов. О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с коэффициентом младшего порядка и с растущей начальной функцией // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2003. №23. С. 127–148.
- [35] В. Н. Денисов. О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшими коэффициентами и растущей начальной функцией // Докл. РАН. 2004. Т. 397. №4. С. 439–441.
- [36] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, А. Л. Муравей. О стабилизации решений нестационарных граничных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Динамика сплошной среды. 1975. №23. С. 57–90.

- [37] А. К. Гущин. О зависимости поведения при больших значениях времени решения параболического уравнения от данных задачи // Качественная теория дифференциальных уравнений / Под ред. В. М. Матросова. М., 1988. С. 72–82.
- [38] В. Н. Денисов, В. Д. Репников. О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 1. С. 20–41.
- [39] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [40] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
- [41] W. Fulks. A note on the steady state solutions of the heat equation // Proc. Amer. Math. Soc. 1956. V. 7. № 5. P. 766–770.
- [42] R. Narasimhan. On the asymptotic stability of solutions of parabolic differential equations // J. Ration. Mech. Anal. 1954. V. 3. № 3. P. 303–313.
- [43] З. И. Халилов. Об исследованиях асимптотической устойчивости решений граничных задач для уравнений с частными производными // Докл. АН Азерб. ССР. 1956. Т. 12. № 6. С. 375–378.
- [44] A. Friedman. Convergence of solutions of parabolic equations to steady state // J. Math. Mech. 1959. V. 8. № 1. P. 57–76.
- [45] A. Friedman. Asymptotic behavior of solutions of parabolic equations of any order // Acta. Math. 1961. V. 106. № 1–2. P. 1–43.
- [46] N. Eklund. Generalized super-solutions of parabolic equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 220. P. 235–242.
- [47] Ю. Н. Черемных. Об асимптотике решений параболических уравнений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. № 6. С. 913–924.
- [48] А. М. Ильин. Об одном достаточном условии стабилизации решения параболического уравнения // Матем. заметки. 1985. Т. 37. № 6. С. 851–856.
- [49] P. Besala, P. Fife. The unbounded growth of solutions of linear parabolic differential equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3). 1966. V. 20. P. 719–732.
- [50] N. Meyers, J. Serrin. The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations // J. Math. Mech. 1960. V. 9. № 4. P. 513–538.
- [51] M. Krzyżański. Sur le problème de Dirichlet pour l'équation linéaire du type elliptique dans un domaine non borné // Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fiz. Mat. Natur. (8). 1948. V. 4. P. 408–416.
- [52] S. Simoda, M. Nagumo. Sur la solution bornée de l'équation aux dérivées partielles du type elliptique // Proc. Japan Acad. 1951. V. 27. P. 334–339.
- [53] T. Kusano. On bounded solutions of elliptic partial differential equations of the second order // Funkcial. Ekvac. 1965. V. 7. P. 1–13.
- [54] В. В. Жиков. Асимптотическое поведение и стабилизация решений параболических уравнений второго порядка с младшими членами // Труды ММО. 1983. Т. 46. С. 69–98.
- [55] К. В. Валиков. О стабилизации решений задачи Коши для параболических уравнений второго порядка с младшими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 9. С. 1641–1655.
- [56] Ф. О. Порпер, С. Д. Эйдельман. Теоремы об асимптотической близости решений одномерных параболических уравнений второго порядка // Труды ММО. 1978. Т. 36. С. 85–130.
- [57] А. К. Гущин, В. П. Михайлов. О стабилизации решения задачи Коши для одномерного параболического уравнения // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197. № 2. С. 257–260.
- [58] К. В. Валиков. Близость решений задач Коши для некоторых параболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 686–696.
- [59] А. Г. Сорокина. О близости решений задачи Коши для параболических уравнений второго порядка // Матем. заметки. 1983. Т. 34. № 1. С. 113–121.
- [60] Ф. О. Порпер, С. Д. Эйдельман. Теоремы об асимптотической близости решений многомерных параболических уравнений // УМН. 1980. Т. 35. № 1. С. 211–212.
- [61] В. Д. Репников, С. Д. Эйдельман. Новое доказательство теоремы о стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности // Матем. сб. 1967. Т. 73. № 1. С. 155–159.

- [62] Ю. Н. Дрождинов. Стабилизация решений обобщенной задачи Коши для ультрапараболического уравнения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. № 2. С. 368–378.
- [63] Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов. Квазиасимптотика обобщенных функций и тауберовы теоремы в комплексной области // Матем. сб. 1977. Т. 102. № 3. С. 372–390.
- [64] В. Д. Репников. О равномерной стабилизации решений задачи Коши для уравнения теплопроводности с полиномиально растущей начальной функцией // Операторные методы в дифференциальных уравнениях. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1979. С. 66–71.
- [65] В. Н. Денисов. О необходимых условиях равномерной во всем E^N стабилизации решения задачи Коши в классе начальных функций, имеющих степенной рост // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 4. С. 785–786.
- [66] В. Н. Денисов. О необходимом условии равномерной стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. 1980. № 6. С. 1310–1312.
- [67] В. Н. Денисов. О необходимом условии равномерной стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 2. С. 290–305.
- [68] В. Н. Денисов. К вопросу о необходимом условии стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности, равномерной на любом компакте // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 1. С. 7–16.
- [69] А. К. Гушин, В. П. Михайлов. О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 2. С. 297–311.
- [70] Е. Б. Сандаков. О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 12. С. 2256–2264.
- [71] Е. Б. Сандаков. О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения высокого порядка с одной пространственной переменной // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 5. С. 869–882.
- [72] Ф. О. Порпер, С. Д. Эйдельман. Теоремы о близости решений параболических уравнений и стабилизации решения задачи Коши // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 1. С. 32–35.
- [73] Ф. О. Порпер, С. Д. Эйдельман. Теоремы об асимптотической близости и стабилизации для решений многомерных параболических уравнений второго порядка // Методы функционального анализа в задачах математической физики / Под ред. Ю. А. Митропольского. Киев: Изд-во Ин-та матем. АН УССР, 1978. С. 81–144.
- [74] А. К. Гушин. Об оценках решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка // Труды МИАН. 1973. Т. 126. С. 5–45.
- [75] A. K. Guščin. On the behaviour as $t \rightarrow \infty$ of solutions of the second mixed problem for a second-order parabolic equation // Appl. Math. Optim. 1980. V. 6. № 2. P. 169–180.
- [76] А. К. Гушин. О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения // Матем. сб. 1982. Т. 119. № 4. С. 451–508.
- [77] Ф. Х. Мукминов. О поведении при $t \rightarrow \infty$ решений первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности в неограниченных по пространственным переменным областях // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 11. С. 2021–2033.
- [78] Ф. Х. Мукминов. Стабилизация решения первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1980. Т. 111. № 4. С. 503–521.
- [79] Ю. К. Герасимов. О поведении решения третьей краевой задачи для параболического уравнения // Вестник Моск. ун-та. Сер. I. Матем. мех. 1962. № 5. С. 34–43.
- [80] В. Г. Ушаков. О поведении решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка при $t \rightarrow \infty$ // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 2. С. 310–320.
- [81] В. Г. Ушаков. Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области // Матем. сб. 1980. Т. 111. № 1. С. 95–115.
- [82] Д. Гилбарг, Н. Трудингер. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
- [83] В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. Математический анализ. Т. 1, 2. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004.
- [84] G. Stampacchia. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1965. V. 15. № 1. P. 189–258.

- [85] D. Gilbarg, J. Serrin. On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations // J. Anal. Math. 1955/56. V. 4. P. 309–340.
- [86] W. Littman, G. Stampacchia, H. F. Weinberger. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3). 1963. V. 17. P. 43–77.
- [87] А. Г. Асланян, В. Б. Лидский. О спектре эллиптического уравнения // Матем. заметки. 1970. Т. 7. № 4. С. 495–502.
- [88] Т. М. Керимов, В. А. Кондратьев. О спектре эллиптического оператора второго порядка // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 3. С. 351–358.
- [89] М. Г. Крейн, М. А. Рутман. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // УМН. 1948. Т. 3. № 1. С. 3–95.
- [90] Qi S. Zhang. Large time behavior of Schrödinger heat kernels and applications // Comm. Math. Phys. 2000. V. 210. № 2. P. 371–398.
- [91] Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949.
- [92] М. В. Федорюк. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
- [93] Р. Беллман. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Эдиториал УРСС, 2003.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: V.Denisov.g23@g23.relcom.ru

Поступила в редакцию
20.05.2005