Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Зиглин, Об интегрируемости в квадратурах уравнений в вариациях в системах с дополнительным первым интегралом, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 4, 213–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1449>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:58:26

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В КВАДРАТУРАХ
УРАВНЕНИЙ В ВАРИАЦИЯХ В СИСТЕМАХ
С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ПЕРВЫМ ИНТЕГРАЛОМ

С. Л. Зиглин

В [1] и других работах, указанных в [2], доказано отсутствие дополнительного (т.е. функционально независимого от известных) мероморфного первого интеграла в некоторых задачах динамики.

В [2] доказано наличие в этих задачах мероморфного частного решения такого, что система в вариациях вдоль этого решения не интегрируется в обобщенных квадратурах. Здесь термин “обобщенные квадратуры” понимается в следующем смысле (ср. [3]). Будем называть однозначную функцию одного комплексного переменного обобщенно мероморфной, если она аналитична во всей комплексной плоскости, кроме не более чем счетного числа точек. Обобщенно квадратурной будем называть функцию, выражающуюся через обобщенно мероморфные с помощью операций решения алгебраических уравнений, дифференцирования, интегрирования, суперпозиций и мероморфных операций¹. (Мероморфная операция $\overline{F}$, согласно [3], заключается в сопоставлении набору из n функций $f_1, \dots, f_n$ определенной почти при всех значениях аргумента мероморфной функции F от них, $\overline{F}: (f_1, \dots, f_n) \mapsto F(f_1, \dots, f_n)$).

В настоящей работе устанавливается связь между этими явлениями. Имеет место следующая теорема.

Пусть D — область в n -мерном линейном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, и ν — аналитическое векторное поле в D . Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \nu(x), \quad x \in D. \quad (1)$$

Пусть $x = \varphi(t)$ — обобщенно мероморфное решение уравнения (1), не являющееся положением равновесия. Рассмотрим систему уравнений в вариациях вдоль этого решения:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \nu}{\partial x}(\varphi(t))\xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n. \quad (2)$$

Пусть $H = (H_1, \dots, H_{n-3})$ — аналитические первые интегралы уравнения (1) такие, что их дифференциалы $dH = (dH_1, \dots, dH_{n-3})$ линейно независимы вдоль решения $x = \varphi(t)$.

¹Отметим, что в [2] в определении обобщенно квадратурной функции пропущена операция решения алгебраических уравнений.

ТЕОРЕМА. *Если уравнение (1) имеет мероморфный первый интеграл, функционально независимый от H , то система (2) интегрируется в обобщенных квадратурах.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью частного решения $\xi = \dot{\varphi}(t)$ и первых интегралов dH система (2) сводится к линейной неоднородной системе дифференциальных уравнений второго порядка с обобщенно мероморфными коэффициентами, правая часть которой линейно зависит от постоянных $h_1, \dots, h_{n-3}$ первых интегралов $dH_1, \dots, dH_{n-3}$. Очевидно, для доказательства теоремы достаточно доказать, что указанная система интегрируется в обобщенных квадратурах при $h_1 = \dots = h_{n-3} = 0$.

Из [4; предложение 1.2] следует, что если уравнение (1) имеет мероморфный первый интеграл, функционально независимый от H , то указанная линейная однородная система второго порядка имеет первый интеграл, являющийся однородной рациональной функцией фазовых переменных с обобщенно мероморфными по t коэффициентами. Представим этот первый интеграл в виде несократимой дроби. Предположим, для определенности, что ее числитель не является тождественной константой. Тогда на его нулевом множестве уровня система сводится к линейному однородному дифференциальному уравнению первого порядка с обобщенно квадратурным коэффициентом и интегрируется в обобщенных квадратурах. Понижая с помощью ненулевого частного решения системы, лежащего на этом множестве уровня, порядок системы на единицу, получаем, что она интегрируется в обобщенных квадратурах, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение теоремы остается верным, если в нем заменить обобщенно мероморфное решение на обобщенно квадратурное, а дополнительный мероморфный первый интеграл — на аналитический.

Автор благодарен В. В. Козлову и А. И. Нейштадту за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Л. Зиглин // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17. № 1. С. 8–23. [2] С. Л. Зиглин // Докл. РАН. 2002. Т. 386. № 4. С. 490–491. [3] А. Г. Хованский // УМН. 1971. Т. 26. № 4. С. 251–252. [4] С. Л. Зиглин // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 16. № 3. С. 30–41.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Представлено А. И. Нейштадтом
Принято редколлегией 23.05.2005