Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Поляков, О равновесных распределениях на множестве перестановок целых чисел, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 2, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm145>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:36:53

О РАВНОВЕСНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НА МНОЖЕСТВЕ ПЕРЕСТАНОВОК ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

А. Б. Поляков

1. В связи с некоторыми вопросами квантовой статистической механики, К.-Х. Фихтнер рассмотрел в [1] специальный класс случайных перестановок счетного множества. Вкратце опишем его модель, поскольку она существенно используется в этой заметке.

Пусть $\mathcal{Z}$ – произвольное счетное множество. Для любых $Z_1, Z_2 \subset \mathcal{Z}$ обозначим через E_{Z_1, Z_2} множество всех биективных отображений из Z_1 в Z_2 .

Пусть $\alpha = (\alpha_{x,y}), x, y \in \mathcal{Z}$, – матрица, удовлетворяющая условиям:

$$(a) \quad \alpha_{x,y} \geq 0, \quad x, y \in \mathcal{Z}; \quad (b) \quad \alpha_{x,x} = 1, \quad x \in \mathcal{Z}.$$

Для всякого конечного подмножества $Z' \subset \mathcal{Z}$ определим вероятностную меру $P_{Z'}$ на множестве $(Z')^{Z'} = \{g: Z' \rightarrow Z'\}$ по формуле: $P_{Z'}(\{g\}) = 0$, если $g \notin E_{Z', Z'}$, и

$$P_{Z'}(\{g\}) = \prod_{x \in Z'} \alpha_{x,g(x)} / \sum_{h \in E_{Z', Z'}} \prod_{x \in Z'} \alpha_{x,h(x)}, \quad \text{если } g \in E_{Z', Z'}.$$

На множестве $\mathcal{Z}^{\mathcal{Z}} = \{f: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}\}$ введем цилиндрическую σ -алгебру $\mathcal{F}(\mathcal{Z})$. Пусть $E_{\mathcal{Z}}$ – множество перестановок $g \in E_{\mathcal{Z}, \mathcal{Z}}$, разлагающихся на конечные циклы. Потребуем, чтобы матрица α удовлетворяла условию “компактности”:

$$(c) \quad \sum_{A \subset \mathcal{Z}, |A| < \infty} \sum_{y \in A} \sum_{g \in D_A} \prod_{x \in A} \alpha_{x,g(x)} < \infty, \quad y \in \mathcal{Z},$$

где D_A – совокупность всех циклических перестановок множества A .

ТЕОРЕМА 1 [1]. Если выполнены условия (a)–(c), то для всякой последовательности $\{Z_l\}_{l=1}^{\infty}$ конечных подмножеств $\mathcal{Z}$, $Z_l \subset Z_{l+1}$, $\bigcup_l Z_l = \mathcal{Z}$, существуют подпоследовательность $\{Z_{l(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ и вероятностная мера P на $(\mathcal{Z}^{\mathcal{Z}}, \mathcal{F}(\mathcal{Z}))$ такие, что 1) $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{Z_{l(n)}}$ в смысле сходимости всех конечномерных распределений; 2) $P(E_{\mathcal{Z}}) = 1$.

2. Рассмотрим в качестве $\mathcal{Z}$ одномерную целочисленную решетку $\mathbb{Z}$, положим $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ и зададим преобразование $T: \Omega \rightarrow \Omega$ по формуле:

$$T(f)(x) = f(x+1) - 1, \quad x \in \mathbb{Z}, \quad f \in \Omega.$$

Очевидно, T – взаимнооднозначное отображение, T и T^{-1} измеримы и $TE_{\mathbb{Z}} = E_{\mathbb{Z}}$.

Цель этой заметки – ввести на множестве перестановок $E_{\mathbb{Z}}$ класс T -инвариантных мер, которые в известном смысле можно считать равновесными состояниями. Для этого будем рассматривать теплицевы матрицы $\alpha = (\alpha_{x,y}), x, y \in \mathbb{Z}$: $\alpha_{x,y} = \alpha_{x',y'}$, если $y - x = y' - x'$. Положим $\alpha_j = \alpha_{x,y}$, когда $y - x = j, j \in \mathbb{Z}$, и $S(\alpha) = \{j \in \mathbb{Z} : \alpha_j \neq 0\}$.

Пусть вначале множество $S(\alpha)$ конечно. Положим $k(\alpha) = \max\{|j| : j \in S(\alpha)\}$, если $\max\{|j| : j \in S(\alpha)\} \neq 0$, и $k(\alpha) = 1$ в противном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $S \subset \mathbb{Z}$. Последовательность $(a_1, \dots, a_m), a_i \in S$, назовем S -допустимой, если существуют $n \in \mathbb{N}, n \geq m$, и перестановка g множества $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что: 1) $g(i) - i \in S, i \in N_n$; 2) существует подмножество $\{i_0, i_0 + 1, \dots, i_0 + m - 1\} \subset N_n$ такое, что $g(i_0 + l) - i_0 - l = a_{l+1}, l = 0, 1, \dots, m - 1$.

Построим ориентированный конечный связный граф $\Gamma(\alpha)$, взяв в качестве его вершин все $S(\alpha)$ -допустимые последовательности длины $2k, k = k(\alpha)$, а в качестве ребер такие пары вершин $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{2k}), \bar{a}' = (a'_1, \dots, a'_{2k})$, что 1) $a_2 = a'_1, a_3 = a'_2, \dots, a_{2k} = a'_{2k-1}$; 2) $(a_1, \dots, a_{2k}, a'_{2k})$ $S(\alpha)$ -допустима. Для любых двух вершин $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{2k})$ и $\bar{a}' = (a'_1, \dots, a'_{2k})$ положим $A_{\bar{a}\bar{a}'}(\alpha) = \alpha_{a'_{2k}}$, если $(\bar{a}, \bar{a}')$ – ребро в $\Gamma(\alpha)$, и $A_{\bar{a}\bar{a}'}(\alpha) = 0$ в противном случае. Далее, введем матрицу $A(\alpha) = (A_{\bar{a}\bar{a}'}(\alpha))$, обозначим $Y(\Gamma(\alpha))$ множество бесконечных в обе стороны путей в $\Gamma(\alpha)$ и положим $E_{\mathbb{Z}}(\alpha) = \{g \in E_{\mathbb{Z}} : g(x) - x \in S(\alpha), x \in \mathbb{Z}\}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha = (\alpha_{x,y})$ – теплицева матрица, удовлетворяющая условиям (а)–(с) и $|S(\alpha)| < \infty$; $k = k(\alpha)$. Тогда существует T -инвариантная вероятностная мера P такая, что $P(E_{\mathbb{Z}}(\alpha)) = 1$ и $P = \lim_{l \rightarrow \infty} P_{Z_l}$ для всякой последовательности $\{Z_l\}_{l=1}^{\infty}$ конечных подмножеств $\mathbb{Z}$, $Z_l \subset Z_{l+1}$ и $\bigcup_l Z_l = \mathbb{Z}$; динамическая система $(E_{\mathbb{Z}}(\alpha), P, T)$ изоморфна системе $(Y(\Gamma(\alpha)), \tilde{P}, \tilde{T})$, где $\tilde{T}$ – сдвиг на один шаг влево на $Y(\Gamma(\alpha))$, а $\tilde{P}$ – равновесная марковская мера [2] для матрицы $A(\alpha)$.

3. Обратимся к теплицевым матрицам $(\alpha_{x,y})$ с $|S(\alpha)| = \infty$. Ограничимся при этом симметрическими матрицами $(\alpha_j = \alpha_{-j}, j \in \mathbb{Z})$. По $\alpha = (\alpha_{x,y})$ определим теплицеву матрицу $\alpha^{(m)} = (\alpha_{x,y}^{(m)})$, $m \geq 1$, положив $\alpha_{x,y}^{(m)} = \alpha_{x,y}$, если $|y - x| \leq m$, и $\alpha_{x,y}^{(m)} = 0$, если $|y - x| > m$.

Согласно теореме 2, для $\alpha^{(m)}$ определена вероятностная мера $P = P_{\alpha^{(m)}}$, $m \geq 1$. Рассмотрим последовательность чисел $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ таких, что $0 \leq \gamma_i \leq q^i$, где $q \in (0, 1/3)$, $1 \leq i \leq l$, и последовательность натуральных чисел $\{j_r\}_{r=1}^{\infty}$, $l < j_r$, $j_r < j_{r+1}$.

ТЕОРЕМА 3. Для любых $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ и $\{j_r\}_{r=1}^{\infty}$, указанных выше, существует последовательность положительных чисел $\{\eta_r\}_{r=1}^{\infty}$ такая, что для всякой симметрической теплицевой матрицы α с $|S(\alpha)| = \infty$, удовлетворяющей условиям (а)–(с) и следующим ограничениям: 1) $\alpha_j = \gamma_j$, $1 \leq j \leq l$; 2) $0 < \alpha_{j_r} \leq \eta_r$, $r = l+1, l+2, \dots$; 3) $\alpha_j = 0$, если $j > l$ и $j \neq j_r$, $r = l+1, l+2, \dots$, последовательность вероятностных мер $\{P_{\alpha^{(m)}}\}_{m=1}^{\infty}$ слабо сходится к некоторой вероятностной мере P_{α} на $(\Omega, \mathcal{F})$.

ТЕОРЕМА 4. Если выполнены условия теоремы 3, то

а) мера P_{α} T -инвариантна; б) $P_{\alpha}(E_{\mathbb{Z}}(\alpha)) = 1$; в) P_{α} есть гиббсовское распределение для матрицы α в следующем смысле [1]: для всякого конечного множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ и любого $g_1: \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ при P_{α} -н.в. $f \in \Omega$

$$P_{\alpha}(\{g \in \Omega : g(x) = g_1(x), x \in \Lambda\} | \mathcal{F}_{\mathbb{Z} \setminus \Lambda})(f)$$

$$= \begin{cases} \prod_{x \in \Lambda} \alpha_{x, g_1(x)} / \sum_{h \in E_{\Lambda, g_1}(\Lambda)} \prod_{x \in \Lambda} \alpha_{x, h(x)}, & \text{если } f(\mathbb{Z} \setminus \Lambda) = \mathbb{Z} \setminus g_1(\Lambda), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим через $\mathcal{M}(\alpha, T)$ множество всех T -инвариантных вероятностных мер P на $(\Omega, \mathcal{F})$ с конечной энтропией $h_P(T) < \infty$ и таких, что $P(E_{\mathbb{Z}}(\alpha)) = 1$. Определим функцию $v_{\alpha}: E_{\mathbb{Z}}(\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле $v_{\alpha}(g) = \ln \alpha_{g(0)}$. Обозначим $\lambda_m(\alpha)$ максимальное собственное значение матрицы $A(\alpha^{(m)})$ и $\lambda(\alpha) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m(\alpha)$.

ТЕОРЕМА 5. Для всякой последовательности натуральных чисел $\{j_r\}_{r=1}^{\infty}$, $1 < j_1 < \dots < j_r < \dots$, существует последовательность положительных чисел $\{\eta_r\}_{r=1}^{\infty}$, $\eta_r \rightarrow 0$, такая, что если симметрическая теплицева матрица α с $|S(\alpha)| = \infty$ удовлетворяет условиям (а)–(с) и, кроме того, 1) $0 < \alpha_1 \leq 1/3$; 2) $\alpha_j = 0$, если $1 < j \neq j_r$, $r \geq 1$; 3) $0 < \alpha_{j_{r+1}} < \alpha_{j_r} < \eta_r$, $r \geq 1$; то а) $\lambda(\alpha) < \infty$ и $\sup_{P \in \mathcal{M}(\alpha, T)} \left\{ h_P(T) + \int_{E_{\mathbb{Z}}(\alpha)} v_{\alpha}(g) dP(g) \right\} = \ln \lambda(\alpha)$; б) мера P_{α} принадлежит $\mathcal{M}(\alpha, T)$ и является равновесным состоянием, т.е. на ней достигается верхняя грань функционала в а).

Автор выражает благодарность Б. М. Гуревичу за постановку задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Fichtner K. H. // Probab. Theory Related Fields. 1991. V. 89. № 1. P. 35–60. [2] Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. М.: Мир, 1992.