Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алиев, О разрешимости краевой задачи для одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 4, 215–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1450>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:21:49

**О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО
КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

А. Р. АЛИЕВ

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряженный положительно определенный оператор в H и $\varkappa$ – некоторое действительное число: $\varkappa \in \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$.

Определим следующие гильбертовы пространства ($\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$)

$$\begin{aligned} L_{2,\varkappa}(\mathbb{R}_+; H) &= \left\{ u(t) : \|u\|_{L_{2,\varkappa}(\mathbb{R}_+; H)} = \left(\int_0^{+\infty} \|u(t)\|_H^2 e^{-\varkappa t} dt \right)^{1/2} < +\infty \right\}, \\ W_{2,\varkappa}^3(\mathbb{R}_+; H) &= \left\{ u(t) : \|u\|_{W_{2,\varkappa}^3(\mathbb{R}_+; H)} = \left(\int_0^{+\infty} (\|u'''(t)\|_H^2 + \|A^3 u(t)\|_H^2) e^{-\varkappa t} dt \right)^{1/2} < +\infty \right\}, \\ \overset{\circ}{\circ} W_{2,\varkappa}^3(\mathbb{R}_+; H) &= \{ u(t) : u(t) \in W_{2,\varkappa}^3(\mathbb{R}_+; H), u(0) = u'(0) = 0 \}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} L_{2,0}(\mathbb{R}_+; H) &= L_2(\mathbb{R}_+; H), \quad W_{2,0}^3(\mathbb{R}_+; H) = W_2^3(\mathbb{R}_+; H), \\ \overset{\circ}{\circ} W_{2,0}^3(\mathbb{R}_+; H) &= \overset{\circ}{\circ} W_2^3(\mathbb{R}_+; H) \quad (\text{см. [1]}). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим в H полиномиальный операторный пучок

$$P(\lambda) = -\lambda^3 E + \lambda^2 A_1 + \lambda A_2 + A_3 + A^3, \quad (1)$$

где A_j ($j = 1, 2, 3$) – линейные операторы, а E – единичный оператор, и свяжем с пучком (1) краевую задачу

$$P(d/dt)u(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0; +\infty), \quad (2)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad (3)$$

где $f(t) \in L_{2,\varkappa}(\mathbb{R}_+; H)$, $u(t) \in W_{2,\varkappa}^3(\mathbb{R}_+; H)$.

Следует отметить, что при решении многих вопросов в математической физике и механике возникает необходимость кратной полноты части собственных и присоединенных векторов операторных пучков. Существуют различные подходы к изучению этой задачи. Одним из подходов при рассмотрении полиномиальных пучков является исследование операторно-дифференциального уравнения, соответствующего операторному пучку [2], [3]. Целью данной заметки является изучение вопроса разрешимости краевой задачи (2), (3) в определенном весовом пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если вектор-функция $u(t) \in W_{2,\varkappa}^3(\mathbb{R}_+; H)$ удовлетворяет уравнению (2) почти всюду в $\mathbb{R}_+$, то будем ее называть регулярным решением уравнения (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если при любом $f(t) \in L_{2,\varkappa}(\mathbb{R}_+; H)$ существует регулярное решение уравнения (2), удовлетворяющее краевым условиям (3) в смысле $\lim_{t \rightarrow 0} \|A^{5/2-j} u^{(j)}(t)\|_H = 0$, $j = 0, 1$, и имеет место неравенство $\|u\|_{W_{2,\varkappa}^3(\mathbb{R}_+; H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_{2,\varkappa}(\mathbb{R}_+; H)}$, то будем говорить, что задача (2), (3) регулярно разрешима.

В данной работе найдены достаточные условия регулярной разрешимости задачи (2), (3), выраженные на языке операторных коэффициентов уравнения (2), при этом указана связь между параметром веса и нижней границей спектра оператора A , а также попутно получены оценки норм операторов промежуточных производных, имеющие самостоятельный математический интерес. Отметим, что для такого рода краевых задач в работах [4], [5] в пространстве без веса изучена регулярная разрешимость, а в работе [6], в случае, когда операторы возмущенной части

уравнения являются комплексными числами, в весовом пространстве исследована нормальная разрешимость.

Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{P}_0 u(t) = -u'''(t) + A^3 u(t), \quad u(t) \in \overset{\circ\circ}{W}_{2,\kappa}^3(\mathbb{R}_+; H), \quad (4)$$

$$\mathcal{P}_1 u(t) = A_1 u''(t) + A_2 u'(t) + A_3 u(t), \quad u(t) \in \overset{\circ\circ}{W}_{2,\kappa}^3(\mathbb{R}_+; H). \quad (5)$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – самосопряженный положительно определенный оператор с нижней границей спектра λ_0 , т.е. $A = A^* \geq \lambda_0 E$, $\lambda_0 > 0$, и число $\kappa \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $\kappa \in (-\lambda_0; 2\lambda_0)$.

Тогда оператор $\mathcal{P}_0$, определенный равенством (4), является изоморфизмом из пространства $\overset{\circ\circ}{W}_{2,\kappa}^3(\mathbb{R}_+; H)$ на $L_{2,\kappa}(\mathbb{R}_+; H)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – самосопряженный положительно определенный оператор и $A_j A^{-j}$, $j = 1, 2, 3$, ограничены в H . Тогда оператор $\mathcal{P}_1$, определенный равенством (5), является ограниченным оператором из пространства $\overset{\circ\circ}{W}_{2,\kappa}^3(\mathbb{R}_+; H)$ в $L_{2,\kappa}(\mathbb{R}_+; H)$.

ТЕОРЕМА 3. Для любого $u(t) \in \overset{\circ\circ}{W}_{2,\kappa}^3(\mathbb{R}_+; H)$ имеют место следующие неравенства:

$$\|A^j u^{(3-j)}\|_{L_{2,\kappa}(\mathbb{R}_+; H)} \leq a_j(\kappa) \|\mathcal{P}_0 u\|_{L_{2,\kappa}(\mathbb{R}_+; H)}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где

$$\begin{aligned} a_1(\kappa) &= \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + 3 \frac{\kappa^2}{4\lambda_0^2} \right) \left(\frac{7}{8} - \frac{3}{4} \frac{\kappa^2}{\lambda_0^2} \right)^{-1} \left(\frac{1}{8} + \left(1 - \frac{|\kappa|^3}{8\lambda_0^3} \right)^{-2} \right) \right]^{1/2} \\ &\quad + \frac{|\kappa|}{\lambda_0} \left[\frac{7}{8} - \frac{3}{4} \frac{\kappa^2}{\lambda_0^2} \right]^{-1/2} \left[\frac{1}{8} + \left(1 - \frac{|\kappa|^3}{8\lambda_0^3} \right)^{-2} \right]^{1/2} + \frac{\kappa^2}{4\lambda_0^2} \left(1 - \frac{|\kappa|^3}{8\lambda_0^3} \right)^{-1}, \\ a_2(\kappa) &= \left[\frac{7}{8} - \frac{3}{4} \frac{\kappa^2}{\lambda_0^2} \right]^{-1/2} \left[\frac{1}{8} + \left(1 - \frac{|\kappa|^3}{8\lambda_0^3} \right)^{-2} \right]^{1/2} + \frac{|\kappa|}{2\lambda_0} \left(1 - \frac{|\kappa|^3}{8\lambda_0^3} \right)^{-1}, \\ a_3(\kappa) &= \left(1 - \frac{|\kappa|^3}{8\lambda_0^3} \right)^{-1} \quad \text{при } \kappa \in (-\lambda_0; 2\lambda_0). \end{aligned}$$

Основным же результатом данной заметки является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполняются условия теоремы 1 и операторы $A_j A^{-j}$, $j = 1, 2, 3$, ограничены в H , причем выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^3 a_j(\kappa) \|A_j A^{-j}\| < 1,$$

где числа $a_j(\kappa)$, $j = 1, 2, 3$, определены в теореме 3. Тогда краевая задача (2), (3) регулярно разрешима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. [2] М. Г. Гасымов // Докл. АН СССР. 1971. Т. 199. № 4. С. 747–750. [3] М. Г. Гасымов // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. 1971. Т. 6. № 2–3. С. 131–147. [4] С. С. Мирзоев // Функцион. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. № 2. С. 84–85. [5] С. С. Мирзоев // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 2. С. 292–295. [6] Ю. А. Дубинский // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 1. С. 32–34.

Бакинский государственный
университет им. Э.М. Расулзаде
E-mail: alievaraz@yahoo.com

Представлено А.Г. Костюченко
Принято редколлегией 23.05.2005