Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Е. Антоненкова, Ф. А. Шамоян, Описание линейных непрерывных функционалов в весовых пространствах аналитических в шаре функций со смешанной нормой, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 4, 217–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1451>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:19:20

**ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ
В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ
В ШАРЕ ФУНКЦИЙ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ**

О. Е. АНТОНЕНКОВА, Ф. А. ШАМОЯН

Пусть B_n – открытый единичный шар в n -мерном комплексном пространстве, S_n – его граница, $0 < p, q < +\infty$. Обозначим через Ω множество всех положительных функций ω , суммируемых на $(0, 1)$, для которых существуют положительные числа $m_\omega, M_\omega, q_\omega$, причем $m_\omega, q_\omega \in (0, 1)$, такие, что $m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega, \forall r \in (0, 1), \lambda \in [q_\omega, 1]$. Важным частным случаем таких функций являются функции вида $\omega(t) = t^\alpha, \alpha > -1$. Свойства функций из класса Ω хорошо изучены в монографии [1]. Обозначим через $L^{p,q}(\omega)$ пространство измеримых в B_n функций f , для которых

$$\|f\|_{L^{p,q}(\omega)} = \left(\int_0^1 \omega(1-r) \left(\int_{S_n} |f(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \right)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1} dr \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

а через $H(B_n)$ – множество всех голоморфных в B_n функций. Положим также $A^{p,q}(\omega) = H(B_n) \cap L^{p,q}(\omega)$. Подпространство пространства $L^{p,q}(\omega)$, состоящее из n -гармонических функций, обозначим через $h^{p,q}(\omega)$. В статье [2] получено описание линейных непрерывных функционалов в пространствах $A^{p,q}(\omega)$ в следующем частном случае: $\omega(t) = t^\beta, \beta > -1, 1 < p < +\infty, \max\{1, 1+\beta\} < q < +\infty$. При остальных p и q метод, предложенный в этой работе, не проходит. В этой заметке мы предлагаем другой подход, позволяющий описать линейные непрерывные функционалы в пространствах $A^{p,q}(\omega)$ при всех $0 < p, q < +\infty$ и $\omega \in \Omega$. Для изложения этих результатов введем обозначения. Пусть $\omega_\alpha(t) = \omega(t) \cdot \left(\frac{t^\alpha}{\omega(t)} \right)^q, t \in (0, 1), \alpha_\omega = \frac{\log m_\omega}{\log q_\omega}, I = (0, 1], J = (1, +\infty), D^\alpha$ – интегро-дифференциальный оператор Римана–Лиувилля дробного порядка $\alpha \in \mathbb{R}$. Для $\xi, z \in B_n$ положим $e_z = \frac{1}{1-\langle \xi, z \rangle}$. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Φ – линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}(\omega)$, $p, q \in J$, и $g(z) = \Phi(e_z), z \in B_n$. Тогда $g \in H(B_n)$ и $D^{\alpha+1}g \in A^{p',q'}(\omega_\alpha), \alpha > \alpha_\omega, p' = \frac{p}{p-1}, q' = \frac{q}{q-1}, \omega_\alpha(t) = \omega(t) \left(\frac{t^\alpha}{\omega(t)} \right)^{q'}, t \in (0, 1)$. Функционал Φ представим в виде

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \int_{S_n} f(\rho\xi) \overline{g(\rho\xi)} d\sigma(\xi), \quad (1)$$

при этом существуют положительные константы c_1, c_2 такие, что

$$c_1 \|D^{\alpha+1}g\|_{A^{p',q'}(\omega_\alpha)} \leq \|\Phi\| \leq c_2 \|D^{\alpha+1}g\|_{A^{p',q'}(\omega_\alpha)}. \quad (2)$$

Верно и обратное: любая функция g такая, что $D^{\alpha+1}g \in A^{p',q'}(\omega_\alpha)$, по формуле (1) порождает линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}(\omega)$, для которого справедливы оценки (2).

Чтобы сформулировать аналог этой теоремы для остальных p, q , введем следующие обозначения. Пусть $p, q \in I$. Обозначим через $\lambda^{p,q}(\omega)$ пространство функций $g \in H(B_n)$, для которых

$$\|g\|_{\lambda^{p,q}(\omega)} = \sup_{z \in B_n} \left\{ \frac{(1-|z|^2)^{\alpha-\frac{1}{q}+1-n(\frac{1}{p}-1)}}{\omega(1-|z|)^{1/q}} |D^{\alpha+1}g(z)| \right\} < +\infty,$$

где $\alpha > \frac{\alpha_\omega+1}{q} + n(\frac{1}{p}-1) - 1$. Пусть далее $p \in J, q \in I$, обозначим через $\widehat{\lambda}^{p,q}(\omega)$ множество $g \in H(B_n)$, для которых

$$\|g\|_{\widehat{\lambda}^{p,q}(\omega)} = \sup_{r \in (0,1)} \left\{ \frac{(1-r)^{\alpha-\frac{1}{q}+1}}{\omega(1-r)^{1/q}} \left(\int_{S_n} |D^{\alpha+1}g(r\xi)|^{p'} d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{p'}} \right\} < +\infty,$$

где $\alpha > \frac{\alpha_\omega + 1}{q} - 2$. Здесь $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Если $p \in I$, $q \in J$, то через $\tilde{\lambda}_\omega^{p,q}$ обозначим пространство $g \in H(B_n)$, для которых

$$\|g\|_{\tilde{\lambda}_\omega^{p,q}(\omega)} = \left(\int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha q' - nq'(\frac{1}{p}-1)}}{\omega(1-r)^{q'/q}} \sup_{\xi \in S_n} |D^{\alpha+1}g(r\xi)|^{q'} r^{2n-1} dr \right)^{\frac{1}{q'}} < +\infty,$$

где $\alpha > \frac{\alpha_\omega}{q} + n(\frac{1}{p}-1) - \frac{1}{q'}$. Здесь $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Можно установить, что определение этих классов не зависит от α . Пусть пространство $\Lambda^{p,q}(\omega)$, где $p, q \in I \cup J$, совпадает с пространством $\lambda^{p,q}(\omega)$, если $p, q \in I$, с пространством $\hat{\lambda}^{p,q}(\omega)$, если $p \in J$, $q \in I$, и с пространством $\tilde{\lambda}^{p,q}(\omega)$, если $p \in I$, $q \in J$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p, q \in I \cup J$, $0 < \min\{p, q\} \leq 1$. Тогда если Φ — линейный непрерывный функционал на $\Lambda^{p,q}(\omega)$ и $g(z) = \Phi(ez)$, $z \in B_n$, то $g \in \Lambda^{p,q}(\omega)$ и Φ представим в виде

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \int_{S_n} f(\rho\xi) \overline{g(\rho\xi)} d\sigma(\xi), \quad (3)$$

при этом существуют положительные константы c_1, c_2 такие, что

$$c_1 \|g\|_{\Lambda^{p,q}(\omega)} \leq \|\Phi\| \leq c_2 \|g\|_{\Lambda^{p,q}(\omega)}. \quad (4)$$

Верно и обратное: любая функция $g \in \Lambda^{p,q}(\omega)$ по формуле (3) порождает линейный непрерывный функционал на $\Lambda^{p,q}(\omega)$, для которого справедливы оценки (4).

Доказательство теорем 1 и 2 основано на следующих двух вспомогательных утверждениях, имеющих, на наш взгляд, самостоятельный интерес. Для формулировки этих утверждений введем также следующие обозначения. Пусть $\alpha > -1$, $K_\alpha(z, \xi) = \frac{\omega(1-|\xi|)}{(1-\langle z, \xi \rangle)^{\alpha+n+1}}$, где $z, \xi \in B_n$, $T_\alpha(f)(z) = c(\alpha) \int_{B_n} K_\alpha(z, \xi) f(\xi) d\nu(\xi)$.

ЛЕММА 1. Пусть $1 \leq p, q < +\infty$, $\alpha > \alpha_\omega$. Тогда оператор T_α отображает пространство $L^{p,q}(\omega)$ на пространство $\Lambda^{p,q}(\omega_\alpha)$, при этом справедлива оценка $\|T_\alpha(f)\|_{\Lambda^{p,q}(\omega_\alpha)} \leq c \|f\|_{L^{p,q}(\omega)}$.

ЛЕММА 2. Предположим, что:

- а) если $p, q \in I$, то $\alpha > \frac{\alpha_\omega + 1}{q} + n(\frac{1}{p} - 1) - 1$;
- б) если $p \in I$, $q \in J$, то $\alpha > \frac{\alpha_\omega}{q} + n(\frac{1}{p} - 1) - \frac{1}{q'}$, где $q' = \frac{q}{q-1}$;
- в) если $p \in J$, $q \in I$, то $\alpha > \frac{\alpha_\omega + 1}{q} - 1$.

Тогда при всех наборах $p, q \in I \cup J$, $0 < \min\{p, q\} \leq 1$, оператор $T_\alpha(f)$ отображает пространство $h^{p,q}(\omega)$ на пространство $\Lambda^{p,q}(\omega_\alpha)$, причем $\|T_\alpha(f)\|_{\Lambda^{p,q}(\omega_\alpha)} \leq c \|f\|_{h^{p,q}(\omega)}$.

Аналоги этих результатов для других пространств голоморфных в поликруге функций получены в работах [3], [4]. Данные результаты имеют приложения в теории тёплицевых операторов.

При соответствующем выборе параметра α метод, используемый при доказательстве лемм 1 и 2, позволяет нам построить в явном виде линейный ограниченный проектор из пространства $L^{p,q}(\omega)$ на соответствующее пространство $\Lambda^{p,q}(\omega)$ при $1 \leq p, q < +\infty$ и из пространства $h^{p,q}(\omega)$ на $\Lambda^{p,q}(\omega)$ при всех $p, q \in I \cup J$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. Сенета. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985. [2] S. Gadbois // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 104. № 4. P. 1171–1180. [3] Ф. А. Шамоян // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31. № 2. С. 197–215. [4] Ф. А. Шамоян, О. В. Ярославцева // Записки науч. семин. ПОМИ. 1997. Т. 247. С. 268–275.