Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, О связи между задачами Борсука и Эрдёша–Хадвигера,
УМН, 2005, том 60, выпуск 4, 219–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1452>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:21:44

О СВЯЗИ МЕЖДУ ЗАДАЧАМИ БОРСУКА И ЭРДЁША–ХАДВИГЕРА

А. М. РАЙГОРОДСКИЙ

1. Введение и формулировка результата. Задачи Борсука и Эрдёша–Хадвигера являются, по-видимому, одними из наиболее важных в комбинаторной геометрии. Первая задача (см. [1]) состоит в отыскании минимального числа $f(n)$ такого, что всякое ограниченное n -мерное множество ненулевого диаметра может быть разбито на $f(n)$ частей меньшего диаметра. Вторая задача (см. [2]) сводится к отысканию наименьшего количества цветов, в которые можно так раскрасить все евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, чтобы точки, отстоящие друг от друга на фиксированное расстояние $a > 0$, имели разные цвета; это количество принято обозначать через $\chi(\mathbb{R}^n, a)$. На самом деле, легко заметить, что величина $\chi(\mathbb{R}^n, a)$ от значения $a > 0$ не зависит, так что мы вольны положить $a = 1$ и писать для краткости $\chi(\mathbb{R}^n) = \chi(\mathbb{R}^n, 1)$. Аналогичное наблюдение имеет место и в случае с $f(n)$: здесь мы тоже можем считать, что множества, подлежащие разбиению, изначально имеют диаметр 1. Таким образом, как в задаче Борсука, так и в задаче Эрдёша–Хадвигера мы фактически работаем с раскрасками, в которых между точками одного цвета не бывает расстояния 1. Только в первом случае мы раскрашиваем произвольные множества единичного диаметра, а во втором – все пространство. Отметим, кстати, что если использовать теоретико-графовую терминологию (см. [3]), то речь пойдет о хроматических числах различных (вообще говоря, бесконечных) геометрических графов. В частности, величину $\chi(\mathbb{R}^n)$ обычно называют хроматическим числом пространства или графа расстояний, а величину $f(n)$ ассоциируют с хроматическими числами графов диаметров.

Разумеется, связь между задачами видна уже из наших рассуждений. Однако, с одной стороны, эта связь носит лишь поверхностный характер, а с другой стороны, такая поверхностность дополнительно мотивируется тем фактом, что

$$(1.2255 \dots + o(1))^{\sqrt{n}} \leq f(n) \leq (1.224 \dots + o(1))^n$$

(см. нижнюю оценку в [4], а верхнюю в [5] и [6]), в то время как

$$(1.239 \dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$$

(см. нижнюю оценку в [7], а верхнюю в [8]), т.е. в случае пространства число красок, по существу, экспоненциально, а в случае множеств диаметра 1 даже о порядке роста логарифмов соответствующих хроматических чисел судить не удастся. Как это ни странно, некоторое понимание природы близости задач приходит именно в процессе изучения *нижних* оценок для $f(n)$ и $\chi(\mathbb{R}^n)$. Дело в том, что существует общий метод нахождения подобных оценок. Впервые он был развит в работах [9] и [10], но в работах автора (см., например, [11] и [12]) его универсальность была продемонстрирована особенно наглядно: скажем, никто не знает, как улучшить результаты $f(n) \geq (1.2255 \dots + o(1))^{\sqrt{n}}$ и $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.239 \dots + o(1))^n$, но в заметке [12] показано, что $f(n)^{1/\sqrt{n}} + \chi(\mathbb{R}^n)^{1/n} \geq 1.2255 \dots + 1.239 \dots + \delta$, где $\delta > 0$ – вполне определенная константа.

К сожалению, упомянутый метод отнюдь не проясняет причин возникновения столь значительного зазора между все теми же нижними оценками на хроматические числа графов диаметров и графов расстояний. Гораздо более тонкую информацию об этих причинах удастся получить, например, на следующем пути. Определим величину $\chi(n, a, d)$ как минимальное число такое, что всякое n -мерное множество диаметра d может быть разбито на $\chi(n, a, d)$ частей, в каждой из которых расстояния между точками никогда не совпадают с a . Во-первых, понятно, что в данном определении речь вновь идет о хроматических числах некоторых геометрических графов, причем в случае, если $a = d$, эти графы суть как раз графы диаметров, отвечающие задаче Борсука. Во-вторых, a , конечно же, не может превышать d . Наконец, как и для исходных задач, мы вольны, не ограничивая общности, считать, что, скажем, $d = 1$, а $a \in (0, 1]$. При этом, если

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02-01-00912), гранта поддержки ведущих научных школ НШ-136.2003.1, гранта Президента РФ МК-3130.2004.1 и гранта ИНТАС 03-51-5070.

$a \rightarrow 0$, то в некотором роде мы приближаемся к постановке задачи Эрдёша–Хадвигера: по крайней мере, отношение “запрещенного” расстояния к диаметру объемлющего множества убывает к нулю. Таким образом, рассматривая $\chi(n, a, d) = \chi(n, a, 1)$, $a \in (0, 1]$, мы на “одном конце” ($a = 1$) имеем задачу Борсука, а на другом – задачу Эрдёша–Хадвигера; в промежутке же возникает непрерывная цепочка новых нетривиальных комбинаторно-геометрических задач, решив которые можно приблизиться к пониманию того, как, в действительности, устроен переход от экспоненты к субэкспоненциальной функции вида $\text{const} \sqrt[n]{n}$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть $a = 1 - \frac{\varepsilon}{n}$, где $\varepsilon = \varepsilon(n)$ – произвольная функция, значения которой лежат в интервале $[0, n]$. Тогда если $\varepsilon \leq c_1 n^{3/4}$ с некоторой (любой) абсолютной константой $c_1 > 0$, то найдется постоянная $\gamma_1 = \gamma_1(c_1) > 1$ такая, что $\chi(n, a, 1) \geq (\gamma_1 + o(1))\sqrt[n]{n}$; если же $\varepsilon \geq c_2 n^{3/4}$ с некоторой (любой) абсолютной константой $c_2 > 0$, то найдется постоянная $\gamma_2 > 1$ такая, что $\chi(n, a, 1) \geq (\gamma_2 + o(1))\varepsilon^2/n$.

2. Несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказательство теоремы основано на довольно тонком комбинировании различных аспектов линейно-алгебраического метода в комбинаторике. Эти аспекты фактически содержатся в работах [4], [7], [9]–[12], так что в данной короткой заметке мы их не излагаем.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Разумеется, введение дополнительного параметра ε в формулировке теоремы никакой общности не ограничивает. Мы тем самым лишь переписываем условие задачи в более удобной для нас форме.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Легко видеть теперь, как гладко изменяется оценка в процессе изменения величины ε . В самом деле, при $\varepsilon \leq n^{3/4}$ мы как раз приходим к известной субэкспоненте из задачи Борсука. Если же $\varepsilon \rightarrow n$ и, даже более того, $\varepsilon \geq c_3 n$, $0 < c_3 < 1$, то мы получаем экспоненту типа экспоненты из задачи Эрдёша–Хадвигера. Примечательно то, что, в частности, свойство экспоненциальности нижних оценок для $\chi(n, a, 1)$ вовсе не является “глобальным” в том смысле, что экспонента возникает уже при раскраске множеств, у которых отношение величины диаметра к величине “запрещенного” расстояния постоянно (не равно бесконечности).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Нетрудно понять, что $\chi(n, a, 1) \leq (3 + o(1))^n$ и что существующие средства не позволяют рассчитывать на сколь-нибудь значительное продвижение здесь. Представляется, однако, естественным предположить, что подчеркнутая в замечании 3 “локальность” экспоненты свидетельствует о несовершенстве упомянутых средств и что, по-видимому, наши нижние оценки более близки к истине, чем все известные оценки сверху.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. Borsuk // Fund. Math. 1933. V. 20. P. 177–190. [2] H. Hadwiger // Portugal. Math. 1944. V. 4. P. 140–144. [3] Ф. Харари. Теория графов. М.: Мир, 1973. [4] А. М. Райгородский // УМН. 1999. Т. 54. № 2. С. 185–186. [5] О. Schramm // Mathematika. 1988. V. 35. № 2. P. 180–189. [6] J. Bourgain, J. Lindenstrauss // Lecture Notes in Math. 1991. V. 1469. P. 138–144. [7] А. М. Райгородский // УМН. 2000. Т. 55. № 2. С. 147–148. [8] D. G. Larman, C. A. Rogers // Mathematika. 1972. V. 19. P. 1–24. [9] P. Frankl, R. Wilson // Combinatorica. 1981. V. 1. P. 357–368. [10] J. Kahn, G. Kalai // Amer. Math. Soc. (N.S.). 1993. V. 29. № 1. P. 60–62. [11] А. М. Райгородский // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 107–146. [12] А. М. Райгородский // УМН. 2004. Т. 59. № 3. С. 177–178.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией 23.05.2005