Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, Об одной оценке в проблеме Борсука, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 2, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm146>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:03:30

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ В ПРОБЛЕМЕ БОРСУКА

А. М. РАЙГОРОДСКИЙ

1. Введение. В [1] Борсук высказал гипотезу о том, что всякое ограниченное множество в $\mathbb{R}^d$ может быть разбито на $d + 1$ часть меньшего диаметра. Утверждение гипотезы Борсука было доказано в размерностях 2 и 3, а также в произвольной размерности для множеств с гладкой границей. В работе [2] с помощью результатов работы [3] был получен контрпример к гипотезе Борсука в размерности 1325. В [4] контрпример был построен в размерности $d = 946$. В [5], за счет уточнения техники, предложенной в работе [4], удалось привести контрпример в размерности $d = 561$. Из доказательства, приведенного в [5], следовало, что гипотеза Борсука может быть опровергнута при всех d таких, что $561 \leq d \leq 757$ и $d \geq 861$. В настоящей работе мы докажем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. При всех $d \geq 561$ найдется ограниченное d -мерное множество, которое нельзя разбить на $d + 1$ часть меньшего диаметра.

Определим величину $f(d)$ как минимальное число такое, что всякое ограниченное множество в $\mathbb{R}^d$ может быть разбито на $f(d)$ частей меньшего диаметра. В [6] для этой величины была получена оценка $f(d) \leq 2^{d-1} + 1$, а в [7] было доказано, что для всякого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших d : $f(d) \leq (\sqrt{3/2} + \varepsilon)^d$. Другое доказательство последнего результата было дано в работе [8]. В [2] было показано, что $f(d) \geq (P(d))^{-1}(1.203)\sqrt{d}$, где $P(d)$ – полином. В настоящей работе мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть $\vartheta = (2/\sqrt{3})\sqrt{2} = 1.2255895\dots$, тогда $f(d) \geq R(d)\vartheta\sqrt{d}$, где $R(d)$ – такая функция, что $R_1(d) \leq R(d) \leq R_2(d)$, причем при $d \rightarrow \infty$: $R_1(d)c\sqrt{d} \rightarrow \infty$ и $R_2(d)/c\sqrt{d} \rightarrow 0 \quad \forall c > 1$.

2. Доказательство теоремы. Пусть $n \in \mathbb{N}$ – достаточно велико, $\delta = 1 - 1/\sqrt{3}$, а p – ближайшее к величине δn нечетное простое число. Известно (см. [9]), что для достаточно большого x и для некоторого $\alpha < 1$ (например, для $\alpha = 38/61$) между x и $x + x^\alpha$ лежит простое число. Поэтому можно считать, что $\delta n - (\delta n)^\alpha < p < \delta n + (\delta n)^\alpha$. Заметим, что выбор величины α влияет исключительно на оценку функции $R(d)$. Рассмотрим семейство векторов $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ такое, что всякий вектор $\mathbf{x} \in \Sigma$ содержит $n - p$ нулевых компонент и p компонент вида $x_{i_1} = 1, x_{i_2} = \pm 1, \dots, x_{i_p} = \pm 1$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$). Таким образом, $\text{conv } \Sigma$ есть кросс-политоп, вершинами которого являются центры граней размерности $n - p$ куба $[-1, 1]^n$. В то же время в работах [2], [4], [5] для построения контрпримеров и получения оценок величины $f(d)$ рассматривались некоторые специальные подмножества множества вершин куба $[-1, 1]^n$. Мы покажем далее, что стандартные методы позволяют работать с кросс-политопами и на их основе получать лучшие оценки для $f(d)$. В самом деле, ясно, что $\text{card } \Sigma = 2^{p-1}C_n^p$. Кроме того, легко видеть, что для любых различных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Sigma$ выполнено следующее простое утверждение:

$$(1) \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv 0 \pmod{p} \text{ тогда и только тогда, когда } (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$$

Каждому вектору $\mathbf{a} \in \Sigma$ поставим в соответствие многочлен $F_{\mathbf{a}} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, определяемый соотношениями $F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{p-1} (i - (\mathbf{a}, \mathbf{x}))$ и $x_i^3 = x_i$. Опираясь на некоторые арифметические свойства этих многочленов, нетрудно показать, что имеет место следующая

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00378).

ЛЕММА. *Каково бы ни было семейство векторов $Q = \{a_1, \dots, a_s\} \subset \Sigma$ такое, что $(a_i, a_j) \not\equiv 0 \pmod{p} \quad \forall i \neq j$, для величины $s = \text{card } Q$ выполнена оценка:*

$$(2) \quad s \leq \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p-1-l}{2} \rfloor} C_n^k C_{n-k}^{p-1-l-2k}.$$

Доказательство леммы стандартно (см. [4] и [5]), поэтому в настоящей работе мы его не приводим.

Семейству векторов Σ сопоставим семейство n^2 -мерных векторов Σ^* следующим образом. Каждому вектору $x \in \Sigma$ поставим в соответствие вектор $x * x = (x_i \times x_j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$. Легко убедиться в том, что для любых двух векторов $x * x, z * z \in \Sigma^*$ выполнено равенство $(x * x, z * z) = (x, z)^2$. Отсюда следует, что максимальное расстояние между векторами из Σ^* достигается в том и только том случае, когда скалярное произведение их прообразов равно нулю. Воспользовавшись последним рассуждением, утверждением (1) и неравенством (2), получаем, что множество Σ^* невозможно разбить на $f < 2^{p-1} C_n^p / (\sum_{l=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p-1-l}{2} \rfloor} C_n^k C_{n-k}^{p-1-l-2k})$ частей так, чтобы диаметр каждой части был меньше диаметра всего множества. Кроме того понятно, что размерность семейства векторов Σ^* равна $\frac{n(n+1)}{2} - 1$. Положим $d = \frac{n(n+1)}{2} - 1$. Из сказанного выше следует, что $f(d) \geq 2^{p-1} C_n^p / (\sum_{l=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p-1-l}{2} \rfloor} C_n^k C_{n-k}^{p-1-l-2k})$. Учитывая выбор величины p и проведя несложные выкладки, можно показать, что тем самым $f(d) \geq R(d) \vartheta \sqrt{d}$, и теорема доказана.

3. Доказательство утверждения. Положим $n = 36$, $d_0 = 561$. Пусть $\Sigma^* = \{x = (x_1, \dots, x_{(n-1)(n-3)})\}$ – семейство векторов, построенное в работе [5]. Тогда из [5] следует, что найдутся индексы $i_1, \dots, i_{n-3}$ такие, что $x_{i_j} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n-3$ и $\forall x \in \Sigma^*$. Фиксируем произвольное $d \geq 564$ и рассмотрим $t = d - d_0$ и $m = \sqrt{(n-1)(n-3)} - 3 + 1$. Определим семейство векторов $\Sigma_d = \{(x_1, \dots, x_{(n-1)(n-3)+t})\}$. (Здесь $x_{i_1} = x_{i_2} = x_{i_3} = 1$, для некоторого $2 \leq i \leq t-1$: $x_{(n-1)(n-3)+i} = m$, $x_{(n-1)(n-3)+1} = \dots = x_{(n-1)(n-3)+i-1} = x_{(n-1)(n-3)+i+1} = \dots = x_{(n-1)(n-3)+t} = 1$, а все остальные компоненты равны нулю.) Определим также $\tilde{\Sigma}_d = \{(x_1, \dots, x_{(n-1)(n-3)}, 1, \dots, 1)\} \subset \mathbb{R}^{(n-1)(n-3)+t}$ как семейство векторов, полученных из векторов семейства Σ^* добавлением t компонент, равных единице. Рассмотрим наконец семейство векторов $\Sigma_d^* = \Sigma_d \sqcup \tilde{\Sigma}_d$. Нетрудно видеть, основываясь на результатах работы [5], что размерность линейного подпространства, в котором лежит Σ_d^* , равна $d_0 + 1 + (t-2) = d-1$. Кроме того, из [5] следует, что диаметр множества $\tilde{\Sigma}_d$ равен $\sqrt{2(n-1)(n-3)} - 6$. В то же время расстояние между любыми двумя векторами из Σ_d , а также между любыми двумя векторами, один из которых принадлежит Σ_d , а другой $\tilde{\Sigma}_d$, равно $\sqrt{2(n-1)(n-3)} - 6$. Из этого факта и оценки, полученной в [5], следует, что $f(d-1) \geq f(d_0) + t - 2 \geq 755 + t > d$. При $d = 562$ контрпример фактически построен в [5]. Утверждение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Borsuk K. // Fund. Math. 1933. V. 20. P. 177–190. [2] Kahn J., Kalai G. // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. V. 29. №1. P. 60–62. [3] Frankl P., Wilson R. // Combinatorica. 1981. V. 1. P. 259–286. [4] Nilli A. // Contemp. Math. 1994. V. 178. P. 209–210. [5] Райгородский А. М. // УМН. 1997. Т. 52. №6. С. 181–182. [6] Lassak M. // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 1982. V. 30. P. 449–451. [7] Schramm O. // Mathematika. 1988. V. 35. P. 180–199. [8] Bourgain J., Lindenstrauss J. // Lecture Notes in Math. 1991. V. 1469. P. 138–144. [9] Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.