Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Скурихин, Лебеговская размерность как размерность Бредона, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 2, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm147>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:26:52

ЛЕБЕГОВСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ КАК РАЗМЕРНОСТЬ БРЕДОНА

Е. Е. Скурихин

Когомологическая размерность топологического пространства, частным случаем которой для конечномерных паракомпактных пространств является лебеговская размерность, известным образом связана с размерностью Бредона [1], [2]. В данной работе показано, что имеется топология Гротендика, естественно определяемая топологическим пространством X , размерность Бредона которой совпадает с когомологической размерностью X . Указанный результат вытекает из общей теоремы, относящейся к упорядоченным множествам (теорема 2).

Обозначения работы [3] ниже используются без оговорок. Если (K, τ) – сайт, то $\mathcal{S}_\tau$ и $\mathcal{P}_K$ обозначают соответственно категории всех абелевых τ -пучков и абелевых предпучков на K . Если D – предпучок множеств на K , A, B – подпредпучки D , то $A \supset B$ в D означает $[A \cup B]_\tau = D$. $\tilde{K}_{D, \tau}$ – решетка всех насыщенных τ -замкнутых подпредпучков D . Здесь $A \subset D$ – насыщенный, если $A(k) \neq \emptyset$ влечет $A(k) = D(k)$. Если $\mathcal{A}$ – абелев τ -пучок, A – предпучок множеств на K , то $\mathcal{A}_A$ – это τ -пучок, порожденный предпучком $\mathcal{A}^A \subset \mathcal{A}$: $\mathcal{A}^A(k) = \mathcal{A}(k)$, если $A(k) \neq \emptyset$, и $\mathcal{A}^A(k) = 0$ в противном случае. $\mathcal{A}_{A'}$ определяется из короткой точной последовательности $0 \rightarrow \mathcal{A}_A \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{A'} \rightarrow 0$. Наконец, чтобы согласовать пучковые обозначения с теми, что используются для когомологий пары, пишем $H_{D, \tau}^k(A', \mathcal{A}) = H_\tau^k(D, \mathcal{A}_{A'})$, $H_{D, \tau}^k(A', B', \mathcal{A}) = H_\tau^k(D, (\mathcal{A}_{A'})_B)$.

Сформулируем сначала свойства мягких пучков, используемые для характеристики размерности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть (K, τ) – сайт, D – предпучок множеств на K , $\mathcal{U}$ – некоторая совокупность пар (A', B') , где $A, B \in K_D$, $B' \leq A'$ (т.е. $A \subset B$). Назовем τ -пучок $\mathcal{A}$ $\mathcal{U}$ -мягким, если $\forall (A', B') \in \mathcal{U}$ отображение $\text{Hom}_{\tilde{K}}(D, \mathcal{A}_{A'}) \rightarrow \text{Hom}_{\tilde{K}}(D, \mathcal{A}_{B'})$, индуцированное каноническим гомоморфизмом $\mathcal{A}_{A'} \rightarrow \mathcal{A}_{B'}$, является эпиморфизмом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (K, τ) – сайт, $D \in \text{Ob}(\hat{K})$, $\mathcal{U}$ – некоторая совокупность пар (A', B') , где $A, B \in K_D$, $B' \leq A'$ (т.е. $A \subset B$). Предположим, что всякий инъективный τ -пучок является $\mathcal{U}$ -мягким и что для любого $\mathcal{U}$ -мягкого τ -пучка $\mathcal{A}$ и для любой пары $(A', B') \in \mathcal{U}$, $H_{D, \tau}^k(A', \mathcal{A}) = H_{D, \tau}^k(B', \mathcal{A}) = 0$ при $k > 0$. Тогда следующие условия на абелев τ -пучок $\mathcal{A}$ и число $n \geq 0$ эквивалентны:

- (a) $\mathcal{A}$ обладает $\mathcal{U}$ -мягкой резольвентой длины n ;
- (b) для любой резольвенты $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{B}^n \rightarrow 0$ пучка $\mathcal{A}$ длины n из того, что $\mathcal{B}^i$ – $\mathcal{U}$ -мягкие ($0 \leq i \leq n-1$), следует, что $\mathcal{B}^n$ – $\mathcal{U}$ -мягок;
- (c) $\forall (A', B') \in \mathcal{U}$, $H_{D, \tau}^{n+1}(A', B', \mathcal{A}) = 0$;
- (d) $\forall (A', B') \in \mathcal{U}$, $H_{D, \tau}^k(A', B', \mathcal{A}) = 0$ при $k > n$;
- (e) $\forall (A', B') \in \mathcal{U}$, $H_{D, \tau}^n(A', \mathcal{A}) \rightarrow H_{D, \tau}^n(B', \mathcal{A})$ – эпиморфизм;
- (f) $\forall (A', B') \in \mathcal{U}$, $H_{D, \tau}^{n+1}(A', B', \mathcal{A}) \rightarrow H_{D, \tau}^{n+1}(A', \mathcal{A})$ – мономорфизм.

В частности, при $n = 0$ получается когомологический критерий $\mathcal{U}$ -мягкости: $\mathcal{A}$ – $\mathcal{U}$ -мягок $\Leftrightarrow \forall (A', B') \in \mathcal{U}$, $H_{D, \tau}^1(A', B', \mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow \forall (A', B') \in \mathcal{U}$, $\forall k > 0$, $H_{D, \tau}^k(A', B', \mathcal{A}) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть (K, τ) – сайт, $\mathcal{V}$ – некоторая совокупность пар (A, B) предпучков множеств на K таких, что $B \subset A$, $\mathcal{A}$ – абелев τ -пучок. Обозначим через $d_{\tau, \mathcal{V}, \mathcal{A}} K$ минимум длин $\mathcal{V}$ -вальных резольвент пучка $\mathcal{A}$ и назовем ее $(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ -размерностью Бредона сайта (K, τ) . Если D – предпучок множеств на K , $\mathcal{U}$ – некоторая совокупность пар (A', B') , где $A, B \in K_D$, $B' \leq A'$, то через $d_{\tau, \mathcal{U}, \mathcal{A}} D$ обозначим когомологическую $(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ -размерность D , т.е. минимум длин $\mathcal{U}$ -мягких резольвент $\mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (K, τ) – сайт, K – квазиупорядоченное множество, $D \in \text{Ob}(\hat{K})$, N – $\wedge$ -подполурешетка $(\tilde{K}_{D, \tau})^0$, ν – субканоническая топология Гротендика на N , $\mathcal{U}$

– некоторое множество пар вида (A', B') , где $A', B' \in N$, $B' \leq A'$, и выполняются следующие условия.

- (1) $\forall \alpha = \{A_i \in K_{D, \tau} \mid i \in I\} \in \tau(D)$, $\forall B' \in N$ имеется $\beta = \{B_j' \in N \mid j \in J\} \in \nu(B')$ такое, что семейство $\beta \wedge D$ вписано в $B' \wedge \alpha$, т.е. $\forall j \exists i: B_j' \stackrel{\tau}{\subset} A_i$ в D .
- (2) $\forall B' \in N$ в любое $\beta \in \nu(B')$ вписывается ν -покрытие B' , τ -локально конечное в D .
- (3) Для любого $\mathcal{U}$ -вялого ν -пучка $\mathcal{E}$ на N , $\forall (A', B') \in \mathcal{U}$, $\forall k \geq 1$, $H_\nu^k(A', \mathcal{E}) = H_\nu^k(B', \mathcal{E}) = 0$.

Отметим, что условия ацикличности вялых пучков сформулированы в теореме 2 работы [3].

- (4) Для любого инъективного τ -пучка $\mathcal{I}$, $\forall (A', B') \in \mathcal{U}$, $\forall k \geq 1$, $H_\tau^1(D, \mathcal{I}_A) = H_\tau^1(D, \mathcal{I}_B) = 0$.

Обозначим через $h_D: \mathcal{S}_\tau \rightarrow \mathcal{P}_N$ функтор, задаваемый равенством

$$h_D(\mathcal{A})(A') = \text{Hom}_{\hat{K}}(D, \mathcal{A}_{A'}).$$

Тогда

1. h_D переводит любую точную последовательность τ -пучков в точную последовательность ν -пучков.

Будем рассматривать h_D , как (точный) функтор $\mathcal{S}_\tau \rightarrow \mathcal{S}_\nu$. Очевидно, h_D переводит $\mathcal{U}$ -мягкие пучки в $\mathcal{U}$ -вялые.

2. Каждый инъективный τ -пучок является $\mathcal{U}$ -мягким, и для всякого $\mathcal{U}$ -мягкого τ -пучка $\mathcal{A}$, $\forall (A', B') \in \mathcal{U}$, $\forall k \geq 1$, $H_\tau^k(D, \mathcal{A}_{A'}) = H_\tau^k(D, \mathcal{A}_{B'}) = H_\tau^k(D, (\mathcal{A}_{A'})_B) = 0$.

3. Для любого τ -пучка $\mathcal{A}$, $\forall (A', B') \in \mathcal{U}$, $\forall k \geq 0$, $H_\tau^k(D, \mathcal{A}_{A'}) = H_\nu^k(A', h_D(\mathcal{A}))$, $H_\tau^k(D, \mathcal{A}_{B'}) = H_\nu^k(B', h_D(\mathcal{A}))$, $H_\tau^k(D, (\mathcal{A}_{A'})_B) = H_\nu^k(A', B', h_D(\mathcal{A}))$.

4. Для любого τ -пучка $\mathcal{A}$, $d_{\tau, \mathcal{U}, \mathcal{A}} D = d_{\nu, \mathcal{U}, \mathcal{B}} N$, где $\mathcal{B} = h_D(\mathcal{A})$.

Таким образом, в силу пунктов (1)–(3) данной теоремы, пункт (4) легко выводится из теоремы 1 данной работы и теоремы 1 работы [3]. Отметим, что для выполнения единственного “не обоснованного” кохомологического условия (4) также можно дать достаточное условие в терминах свойств топологии Гротендика τ .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть X – паракомпактное топологическое пространство. Обозначим через N упорядоченное по включению множество всех замкнутых подмножеств X . Если $A \in N$, то полагаем $\alpha = \{A_i \in N \mid i \in I\} \in \nu(A) \Leftrightarrow \alpha$ – локально-конечное в X покрытие A . Тогда (N, ν) – сайт и для любого абелева пучка $\mathcal{A}$ на X $\dim_{\mathcal{A}} X = d_{\nu, \mathcal{U}, \mathcal{B}} N$, где $\dim_{\mathcal{A}} X$ – кохомологическая $\mathcal{A}$ -размерность пространства X , $\mathcal{U}$ – множество всех таких пар (A, B) замкнутых подмножеств X , что $B \subset A$, а $\mathcal{B}$ – ν -пучок на N , задаваемый равенством $\mathcal{B}(A) = \mathcal{A}_A(X)$.

В частности, если размерность Лебега $\dim X < \infty$, то $\dim X = d_{\nu, \mathcal{U}, Z} N$, где Z – пучок целых чисел на N .

Аналогичный результат верен для нормальной размерности вполне регулярного пространства, однако сайт (N, ν) задается при этом более сложными топологическими условиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bredon G. E. Sheaf Theory. New York: McGraw-Hill, 1967. [2] Кузьминов В. И., Шведов И. А. // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 1. С. 24–27. [3] Скурихин Е. Е. // УМН. 1998. Т. 53. № 6. С. 263–264.