Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Квазипроективные модули со свойством конечной замены,
УМН, 1999, том 54, выпуск 2, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm149>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 09:45:36

КВАЗИПРОЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ СО СВОЙСТВОМ КОНЕЧНОЙ ЗАМЕНЫ

А. А. ТУГАНБАЕВ

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Модуль M называется модулем со свойством конечной замены, если для любого модуля X и для каждого прямого разложения $X = M' \oplus Y = \bigoplus_{i \in I} N_i$, где $M' \cong M$ и I – любое конечное множество, существуют такие подмодули $N'_i \subseteq N_i$ ($i \in I$), что $X = M' \oplus (\bigoplus_{i \in I} N'_i)$. Модуль M называется *проективным относительно модуля N* (или *N -проективным*), если для каждого эпиморфизма $h: N \rightarrow \overline{N}$ и для любого гомоморфизма $\overline{f}: M \rightarrow \overline{N}$ существует такой гомоморфизм $f: M \rightarrow N$, что $\overline{f} = hf$. Модуль, проективный относительно себя, называется *квазипроективным* модулем. Модуль над кольцом A , проективный относительно всех A -модулей, называется *проективным* модулем. Основным результатом данной работы является теорема 1, где доказанный в [1] результат для проективных модулей распространяется на квазипроективные модули.

ТЕОРЕМА 1. Для квазипроективного модуля M равносильны следующие условия:

- (1) M – модуль со свойством конечной замены;
- (2) для любого разложения $M = N_1 + \dots + N_n$ в сумму подмодулей N_i существует такое прямое разложение $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$, что $M_i \subseteq N_i$ для всех i ;
- (3) для любого разложения $M = L + N$ в сумму подмодулей L и N существует такое прямое слагаемое M_1 модуля M , что $M_1 \subseteq L$ и $M = M_1 + N$.

ЛЕММА 1. Пусть модуль M проективен относительно модуля N .

- (1) M проективен относительно любого подмодуля модуля N .
- (2) Если существует эпиморфизм $h: N \rightarrow M$, то $\text{Ker}(h)$ – прямое слагаемое модуля N .
- (3) Если $f: M \rightarrow N$ – гомоморфизм и $N = N_1 + \dots + N_n$, то существуют такие гомоморфизмы $f_i: M \rightarrow N_i$ ($i = 1, \dots, n$), что $f = f_1 + \dots + f_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказано в предложении 16.12(1) из [2].

(2) следует из того, что для тождественного автоморфизма 1_M и эпиморфизма $h: N \rightarrow M$ существует такой гомоморфизм $g: M \rightarrow N$, что $1_M = hg$.

(3) Будем вести индукцию по n . Пусть $n = 2$, $N = N_1 + N_2$ и $h: N \rightarrow N/(N_1 \cap N_2)$ – естественный эпиморфизм. Тогда $h(N) = h(N_1) \oplus h(N_2)$. Пусть $t_i: h(N) \rightarrow h(N_i)$ – естественные проекции, $\overline{g}_i \equiv t_i h f: M \rightarrow h(N_i)$ ($i = 1, 2$). По (1) M – N_i -проективный модуль. Существуют такие гомоморфизмы $g_i: M \rightarrow N_i$, что $h g_i = \overline{g}_i = t_i h f$. Тогда $g_i(M) \subseteq N_i$, $(1 - g_1 - g_2)(M) \subseteq \text{Ker}(h) = N_1 \cap N_2$. Положим $f_1 \equiv g_1$, $f_2 \equiv 1 - f_1 = 1 - g_1$. Тогда $f_1(M) \subseteq N_1$ и $f_2(M) = (1 - g_1)(M) \subseteq g_2(M) + (1 - g_1 - g_2)(M) \subseteq N_2 + N_1 \cap N_2 = N_2$. Поэтому утверждение верно для $n = 2$.

Пусть $n > 2$, $N = N_1 + \dots + (N_{n-1} + N_n)$ и утверждение верно для числа $n - 1$. По предположению индукции существуют такие гомоморфизмы $f_i: M \rightarrow N_i$ ($i = 1, \dots, n - 2$) и $f^*: M \rightarrow N_{n-1} + N_n$, что $f = f_1 + \dots + f_{n-2} + f^*$. Так как M проективен относительно модуля $N_{n-1} + N_n$ и утверждение верно для $n = 2$, то существуют такие гомоморфизмы $f_{n-1}: M \rightarrow N_{n-1}$ и $f_n: M \rightarrow N_n$, что $f^* = f_{n-1} + f_n$. Поэтому $f = f_1 + \dots + f_n$.

ЛЕММА 2. Пусть M – квазипроективный модуль.

- (1) Если $M_1, \dots, M_n$ – такие подмодули модуля M , что $M = M_1 + \dots + M_n$, то для любого эндоморфизма f модуля M существуют такие эндоморфизмы f_i модуля M , что $f_1 + \dots + f_n = f$ и $f_i(M) \subseteq M_i$ ($i = 1, \dots, n$).
- (2) Если $M_1, \dots, M_n$ – такие подмодули модуля M , что $M = M_1 + \dots + M_n$, то существуют такие эндоморфизмы f_i модуля M , что $f_1 + \dots + f_n = 1_M$ и $f_i(M) \subseteq M_i$ ($i = 1, \dots, n$).
- (3) Если $M = M_1 + N$, где M_1 – прямое слагаемое модуля M и N – подмодуль модуля M , то существует такой подмодуль M_2 модуля N , что $M = M_1 \oplus M_2$.
- (4) Пусть $M = P \oplus Q = \bigoplus_{i \in I} N_i$, $h: M \rightarrow Q$ – проекция с ядром P и существуют такие подмодули $Q_i \subseteq h(N_i)$, что $Q = \bigoplus_{i \in I} Q_i$ ($i \in I$).

Тогда существуют такие подмодули $N'_i \subseteq N_i$, что $M = P \oplus (\bigoplus_{i \in I} N'_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из леммы 1(3).

(2) следует из (1) при $f = 1_M$.

(3) Пусть $M = M_1 \oplus L$. Тогда $N/(M_1 \cap N) \cong (N + M_1)/M_1 \in (M_1 \oplus L)/M_1 \cong L$. Так как M – квазипроективный модуль и $N \subseteq M$, то $M - N$ -проективный модуль. Тогда прямое слагаемое L N -проективного модуля M является N -проективным модулем. Кроме того, существует эпиморфизм $N \rightarrow L$ с ядром $M_1 \cap N$. По лемме 1(2) существует прямое разложение $N = (M_1 \cap N) \oplus M_2$. Тогда $M = M_1 \oplus M_2$.

(4) Так как $P \subseteq P \oplus Q_i \subseteq P + N_i$ для всех $i \in I$, то $P \oplus Q_i = (P + N_i) \cap (P \oplus Q_i) = P + ((P \oplus Q_i) \cap N_i)$. По (3) существует такой подмодуль N'_i модуля N_i , что $P \oplus Q_i = P \oplus N'_i$. Непосредственно проверяется, что $M = P \oplus (\bigoplus_{i \in I} Q_i) = P \oplus (\bigoplus_{i \in I} N'_i)$.

ЛЕММА 3 [3]. Пусть M – модуль, $S \equiv \text{End}(M)$. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) M – модуль со свойством конечной замены;
- (2) для любых таких элементов $f_1, \dots, f_n$ кольца S , что $\sum_{i=1}^n f_i = 1_M$ существуют такие ортогональные идемпотенты $e_i \in Sf_i$, что $\sum_{i=1}^n e_i = 1_M$;
- (3) для любых таких элементов f_1 и f_2 кольца S , что $f_1 + f_2 = 1_M$, существуют такие ортогональные идемпотенты e_1 и e_2 кольца S , что $1 = e_1 + e_2$, $e_1 \in Sf_1$ и $e_2 \in Sf_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $S \equiv \text{End}(M)$.

(1) $\Rightarrow$ (2) По лемме 2(2) существуют такие эндоморфизмы f_i модуля M , что $f_1 + \dots + f_n = 1_M$ и $f_i(M) \subseteq N_i$ ($i = 1, \dots, n$). По лемме 3 существуют такие ортогональные идемпотенты $e_i \in f_i S$, что $\sum_{i=1}^n e_i = 1_M$. Тогда $e_i(M) \subseteq f_i(M) \subseteq N_i$ ($i = 1, \dots, n$). Положим $M_i = e_i(M)$. Тогда $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ и $M_i \subseteq N_i$ для всех i .

(2) $\Rightarrow$ (3) проверяется непосредственно.

(3) $\Rightarrow$ (1) Пусть f_1 и f_2 – такие эндоморфизмы модуля M , что $f_1 + f_2 = 1_M$. Тогда $M = f_1(M) + f_2(M)$. По (3) существует такое прямое слагаемое M_1 модуля M , что $M_1 \subseteq f_1(M)$ и $M = M_1 + f_2(M)$. По лемме 2(3) существует такой подмодуль M_2 модуля $f_2(M)$, что $M = M_1 \oplus M_2$. Существуют такие ортогональные идемпотенты e_i кольца $\text{End}(M)$, что $e_1 + e_2 = 1_M$ и $e_i(M) = M_i \subseteq f_i(M)$ ($i = 1, 2$). Тогда $e_i(M)$ – прямое слагаемое модуля $f_i(M)$, откуда существуют такие эндоморфизмы g_i модуля M , что $e_i = g_i f_i \in Sf_i$ ($i = 1, 2$). По лемме 3 M – модуль со свойством конечной замены.

Модуль M называется *регулярным*, если все его конечно порожденные подмодули являются прямыми слагаемыми модуля M . Следующее замечание 1 распространяет на квазипроективные модули аналогичный результат для проективных модулей, доказанный в [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть M – квазипроективный регулярный модуль, Q – прямое слагаемое модуля M и N – конечно порожденный подмодуль модуля M .

Тогда $Q + N$ – прямое слагаемое модуля M и существует такой подмодуль U модуля N , что $Q + N = Q \oplus U$.

Пусть $M = Q \oplus L$, $h: M \rightarrow L$ – проекция с ядром Q . Так как $h(N)$ – конечно порожденный подмодуль регулярного модуля L , то $h(N)$ – прямое слагаемое модуля L . Поэтому $Q + N = Q \oplus h(N)$ – прямое слагаемое модуля M . По лемме 2(3) существует такой подмодуль U модуля N , что $Q + N = Q \oplus U$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nicholson W. K. // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. V. 229. P. 269–278.
- [2] Anderson F. W., Fuller K. R. Rings and Categories of Modules. New York: Springer-Verlag, 1973.
- [3] Zimmermann-Huisgen B., Zimmermann W. // J. Algebra. 1984. V. 88. P. 416–434.
- [4] Stock J. // J. Algebra. 1986. V. 103. P. 437–453.