Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Жеданов, В. П. Спиридонов, Гипергеометрические биортогональные рациональные функции, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 2, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm150>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:34:08

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

А. С. Жеданов, В. П. Спиридонов

Обозначим через $P_n^j(z)$, $n, j \in \mathbb{Z}$, функции независимой переменной $z \in \mathbb{R}$, связанные друг с другом соотношениями

$$(1) \quad P_n^{j+1}(z) = \frac{D_n^{j+1} P_{n+1}^j(z) + C_n^{j+1}(z - \alpha_n^{j+1}) P_n^j(z)}{z - \lambda_{j+1}},$$

$$(2) \quad P_n^{j-1}(z) = B_n^j P_n^j(z) + A_n^j(z - \beta_n^j) P_{n-1}^j(z),$$

в которых коэффициенты $A_n^j, \dots, \lambda_j$ не зависят от z . Сдвинув $j \rightarrow j-1$ в (1) и исключив P_n^{j-1} с помощью (2), получаем трехчленное рекуррентное соотношение

$$(3) \quad P_{n+1}^j(z) + r_n^j(v_n^j - z) P_n^j(z) + u_n^j(z - \alpha_n^j)(z - \beta_n^j) P_{n-1}^j(z) = 0,$$

$$(4) \quad u_n^j = \frac{A_n^j C_n^j}{D_n^j B_{n+1}^j}, \quad r_n^j = \frac{1 - D_n^j A_{n+1}^j - C_n^j B_n^j}{D_n^j B_{n+1}^j},$$

$$r_n^j v_n^j = \frac{\lambda_j - \beta_{n+1}^j D_n^j A_{n+1}^j - \alpha_n^j C_n^j B_n^j}{D_n^j B_{n+1}^j}.$$

Сдвинув $j \rightarrow j+1$ в (2) и исключив P_n^{j+1} с помощью (1) приходим к (3) с другими рекуррентными коэффициентами. В качестве условий совместимости выступают ограничения $\beta_n^j = \beta_n, \alpha_n^j = \alpha_{n+j}$ и следующие нелинейные разностные уравнения:

$$(5) \quad \frac{A_n^j C_n^j}{B_{n+1}^j D_n^j} = \frac{A_n^{j+1} C_{n+1}^{j+1}}{B_{n+1}^{j+1} D_n^{j+1}}, \quad \frac{C_n^j B_n^j + A_{n+1}^j D_n^j - 1}{B_{n+1}^j D_n^j} = \frac{C_n^{j+1} B_{n+1}^{j+1} + A_n^{j+1} D_{n-1}^{j+1} - 1}{B_{n+1}^{j+1} D_n^{j+1}},$$

$$(6) \quad \frac{\alpha_{n+j} C_n^j B_n^j + \beta_{n+1} A_{n+1}^j D_n^j - \lambda_j}{B_{n+1}^j D_n^j} = \frac{\alpha_{n+j+1} C_n^{j+1} B_{n+1}^{j+1} + \beta_n A_n^{j+1} D_{n-1}^{j+1} - \lambda_{j+1}}{B_{n+1}^{j+1} D_n^{j+1}}.$$

Начальные условия $P_0^j(z) = p_j, P_1^j(z) = r_0^j(z - v_0^j)$ в (3) приводят при $n > 0$ к полиномам, обобщающим ортогональные полиномы. Для самосогласованности (2) при $n = 0$ наложим условие $A_0^j = A_0^j \beta_0 = 0$. Цепные дроби, ассоциированные с (3), назывались в [1] дробями типа R_{II} . Поэтому назовем $P_n^j(z)$ R_{II} -полиномами, а уравнения (5)–(6) R_{II} -цепочкой (она обобщает цепочку Тоды с дискретным временем, ср. [2]). Как показано в [1], R_{II} -полиномы служат основой для построения биортогональных рациональных функций, так как для каждого j существует линейный функционал $\mathcal{L}_j$ такой, что $\mathcal{L}_j[z^m P_n^j(z) / \prod_{k=1}^n (z - \alpha_{j+k})(z - \beta_k)] = 0$ для $0 \leq m < n$. В [3] это соотношение представлено в виде условия биортогональности двух рациональных функций. Обозначим $R_0^j(z) = S_0^j(z) = 1, R_n^j(z) = P_n^j(z) / \prod_{k=1}^n (z - \alpha_{j+k}), S_n^j(z) = P_n^j(z) / \prod_{k=1}^n u_k^j(z - \beta_k)$. Определим также другую последовательность рациональных функций $H_0^j(z) = u_1^j S_1^j(z) - r_0^j$ и $H_n^j(z) = u_{n+1}^j S_{n+1}^j(z) - r_n^j S_n^j(z) + S_{n-1}^j(z)$ для $n > 0$.

ТЕОРЕМА 1. Функция $R_n^j(z)$ ортогональна $H_m^j(z)$: $\mathcal{L}_j[H_m^j R_n^j] = 0$ при $n \neq m$.

ТЕОРЕМА 2. Следующие четыре инволюции являются симметриями R_{II} -цепочки:

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00281) и ИНТАС (грант № 96-0700).

1. $\tilde{A}_n^j = D_{-n}^{-j}$, $\tilde{D}_n^j = A_{-n}^{-j}$, $\tilde{B}_n^j = C_{-n}^{-j}$, $\tilde{C}_n^j = B_{-n}^{-j}$, $\tilde{\beta}_n = \beta_{1-n}$, $\tilde{\alpha}_{n+j} = \alpha_{-n-j}$, $\tilde{\lambda}_j = \lambda_{-j}$;
2. $\tilde{A}_n^j = \frac{1}{A_j^n}$, $\tilde{B}_n^j = \frac{B_j^n}{A_j^n}$, $\tilde{C}_n^j = \frac{C_{j-1}^{n+1}}{D_{j-1}^{n+1}}$, $\tilde{D}_n^j = \frac{1}{D_{j-1}^{n+1}}$, $\tilde{\alpha}_{n+j} = \alpha_{n+j}$, $\tilde{\beta}_n = \lambda_n$, $\tilde{\lambda}_j = \beta_j$;
3. $\tilde{A}_n^j = \frac{A_{1-j-n}^{1-j-n}}{B_n^{1-j-n}}$, $\tilde{B}_n^j = \frac{1}{B_n^{1-j-n}}$, $\tilde{C}_n^j = \frac{1}{C_n^{1-j-n}}$, $\tilde{D}_n^j = \frac{D_{1-j-n}^{1-j-n}}{C_n^{1-j-n}}$, $\tilde{\lambda}_j = \alpha_{1-j}$, $\tilde{\alpha}_{j+n} = \lambda_{1-j-n}$, $\tilde{\beta}_n = \beta_n$;
4. $\tilde{A}_n^j = B_{1-n-j}^j$, $\tilde{B}_n^j = A_{1-n-j}^j$, $\tilde{C}_n^j = D_{-n-j}^j$, $\tilde{D}_n^j = C_{-n-j}^j$, $\tilde{\alpha}_{n+j} = \beta_{1-n-j}$, $\tilde{\beta}_n = \alpha_{1-n}$, $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j$.

Эти инволюции могут качественно изменять форму решений R_{II} -цепочки, но существует такой подкласс, для которого этого не происходит. Анализ возможной структуры таких решений привел к следующему анзацу обобщенного разделения переменных (ср. [2])

$$(7) \quad \begin{aligned} A_n^j &= \frac{d(n)\rho(2j+n)}{g(2n+j)g(2n+j-1)\phi(n-j)\phi(n-j-1)}, & B_n^j &= 1, \\ C_n^j &= \frac{c(n+j)\phi(n-j)\phi(n-j+1)}{\sigma(j)g(2n+j)g(2n+j+1)}, & D_n^j &= \frac{\rho(2j+n)\phi(n-j)\phi(n-j+1)}{\sigma(j)}, \end{aligned}$$

где $d(0) = 0$. Перенормировка $P_n^j(z) \rightarrow \xi_n^j P_n^j(z)$ позволяет придать уравнениям (1)–(6) различные формы. Воспользовавшись этой свободой, мы выбрали калибровку $B_n^j = 1$, $P_0^j = 1$. Нетрудно проверить, что (7) автоматически удовлетворяет первому уравнению в (5) для произвольных функций $d(x), \dots, \sigma(x)$. Инволюции приводят к перестановкам функций $d(x), c(x), \sigma(x)$ между собой с точностью до линейных преобразований аргументов. Аналогичная ситуация имеет место для $\rho(x), \phi(x), g(x)$. Поэтому можно предположить, что соответствующие функции имеют одинаковую форму. Эти наблюдения позволили найти следующее явное решение R_{II} -цепочки. Опуская несущественные общие нормировочные множители, имеем: $g(x) = x - g_0$, $\rho(x) = x - g_0 + \phi_0$, $\phi(x) = x - \phi_0$, $c(x) = d(g_0 - x)$, $\sigma(x) = d(x + \phi_0)$, где g_0, ϕ_0 – произвольные постоянные и $d(x)$ – полином 6-й степени с любопытным соотношением между его корнями: $d(x) = x \prod_{k=1}^5 (x - d_k)$, $\sum_{k=1}^5 d_k = 1 + 2(\phi_0 + g_0)$, оставляющим 4 свободных параметра. При этом $\lambda_j = e(j + \phi_0)/d(j + \phi_0)$, $\beta_n = e(n)/d(n)$, $\alpha_n = e(g_0 - n)/d(g_0 - n)$, где $e(x)$ – полином, аналогичный $d(x)$: $e(x) = x \prod_{k=1}^5 (x - e_k)$, $\sum_{k=1}^5 e_k = 1 + 2(g_0 + \phi_0)$. Для удобства сопоставления с результатами [4] обозначим $s \equiv j + 2 - g_0$, $a \equiv 2j + 1 + \phi_0 - g_0$.

ТЕОРЕМА 3. Рекуррентное соотношение (3) для найденного рационального решения R_{II} -цепочки приводит к R_{II} -полиномам, явно выражающимся через совершенно уравновешенный, 2-сбалансированный гипергеометрический ряд ${}_9F_8$:

$$(8) \quad \begin{aligned} P_n^j(z) &= f_n^j(z) {}_9F_8 \left(\begin{matrix} a, a/2 + 1, -n, s + n - 1, a + 2 - s - x_1, \dots, a + 2 - s - x_5 \\ a/2, a + n + 1, a + 2 - s - n, s - 1 + x_1, \dots, s - 1 + x_5 \end{matrix}; 1 \right), \\ f_n^j(z) &= \frac{(1-z)^n \prod_{k=1}^5 (s - 1 + x_k) n}{(n + s - 1)_n (a + 1)_n}, \end{aligned}$$

где $x_1(z), \dots, x_5(z)$ – корни уравнения 5-й степени $z \prod_{k=1}^5 (x - d_k) = \prod_{k=1}^5 (x - e_k)$.

Функции, найденные Вильсоном в [4], соответствуют случаю, когда $\beta_n, \alpha_n, \lambda_n$ являются полиномами 2-й степени, возникающими при предельном переходе в $d(n)$ к полиному 4-й степени такому, что его корни совпадают с 4 корнями $e(n)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ismail M. E. H., Masson D. R. // J. Approx. Theory. 1995. V. 83. P. 1–40. [2] Spiridonov V., Zhedanov A. // J. Phys. A: Math. Gen. 1997. V. 30. P. 8727–8737. [3] Zhedanov A. // Preprint CRM-2539 1998. [4] Wilson J. A. // SIAM J. Math. Anal. 1991. V. 22. № 4. P. 1147–1155.