Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Фурсиков, О. Ю. Эмануилов, Точная управляемость уравнений Навье–Стокса и Буссинеска, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 3, 93–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm153>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:09:13

УДК 517.977.1

ТОЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА И БУССИНЕСКА

А. В. Фурсиков, О. Ю. Эмануилов

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Постановка задач и формулировка основных результатов	98
1.1. Точная управляемость системы Навье–Стокса с границы области	98
1.2. Точная управляемость системы Навье–Стокса посредством локального распределенного управления	99
1.3. Точная управляемость системы Буссинеска	101
1.4. Точная локальная управляемость и аппроксимативная управляемость системы Буссинеска	103
1.5. Некоторые приложения	105
§ 2. Карлемановские оценки	107
2.1. Предварительные сведения	107
2.2. Карлемановские оценки решений системы (2.9), (2.10)	110
2.3. Окончательные оценки	115
§ 3. Разрешимость задачи точной управляемости для линеаризованной системы Буссинеска	121
3.1. Постановка задачи	121
3.2. Вспомогательная экстремальная задача	123
3.3. Доказательство основного результата	125
§ 4. Локальная точная управляемость системы Буссинеска	127
§ 5. Аппроксимативная управляемость системы Буссинеска: сведение к случаю линейной системы специального вида	128
5.1. Идея доказательства	128
5.2. Аппроксимативная управляемость системы Буссинеска	131
§ 6. О точной управляемости одной линейной системы	135
6.1. Доказательство леммы 5.1	135
6.2. Доказательство теоремы 5.1	138
Список литературы	141

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00947). Работа второго автора выполнена при частичной поддержке KIAS (M97003).

Работа посвящена изучению точной управляемости уравнений Навье–Стокса и Буссинеска, описывающих течение вязкой несжимаемой жидкости без учета и с учетом тепловых процессов. Чтобы сформулировать различные постановки задачи о точной управляемости, рассмотрим задачу Коши для абстрактного эволюционного уравнения

$$(0.1) \quad \frac{\partial v(t)}{\partial t} + A(v(t)) = Bu(t) + f(t),$$

$$(0.2) \quad v(t, \cdot)|_{t=0} = v_0,$$

где $v(t)$ – фазовая функция, определенная при $t \in [0, T]$ и принимающая значения в фазовом пространстве X , $u(t)$ – управление со значениями в пространстве U , A – нелинейный, а $B: U \rightarrow X$ – линейный операторы, $f(t)$ – заданная правая часть. Предположим, что нам задано решение $\hat{v}(t)$ уравнения

$$(0.3) \quad \frac{\partial \hat{v}(t)}{\partial t} + A(\hat{v}(t)) = f(t)$$

с теми же оператором A и правой частью f , что и в (0.1), но без управления u . При этом предполагается, что $\hat{v}(0) \neq v_0$. Задача точной управляемости состоит в построении такого управления $u(t)$, чтобы решение задачи Коши (0.1), (0.2) с этим управлением в момент времени $t = T$ совпадало с заданным решением $\hat{v}(t)$:

$$(0.4) \quad v(t)|_{t=T} = \hat{v}(t)|_{t=T}.$$

Если дополнительно известно, что v_0 достаточно близко к $\hat{v}(0, \cdot)$ в норме X :

$$(0.5) \quad \|\hat{v}(0, \cdot) - v_0\|_X \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon \equiv \varepsilon(\hat{v})$ – достаточно мало, то задача о построении управления u такого, что решение v задачи Коши (0.1), (0.2) удовлетворяет (0.4), называется задачей о локальной точной управляемости уравнения (0.1).

Отметим, что если в правую часть равенства (0.4) подставить произвольный элемент v_1 вместо значения $\hat{v}|_{t=T}$ решения уравнения (0.3), то в случае, когда уравнение (0.1) необратимо по времени, задача точной управляемости (0.1), (0.2), (0.4), вообще говоря, не будет иметь решения. Именно такими необратимыми по времени и являются системы Навье–Стокса и Буссинеска. (В случае уравнений (0.1), обратимых по времени, например, в случае гиперболических систем, можно поставить в правую часть (0.4) произвольную достаточно гладкую функцию v_1 .)

Для необратимых по времени эволюционных уравнений часто ставится задача аппроксимативной управляемости, которая состоит в следующем: для управляемой системы (0.1), (0.2), любого фиксированного элемента $v_1 \in X$ и любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ построить такое управление $u_\varepsilon \in U$, чтобы решение задачи (0.1), (0.2) в момент времени $t = T$ удовлетворяло условию

$$(0.6) \quad \|v(T, \cdot) - v_1\|_X \leq \varepsilon.$$

Теория управляемости для эволюционных уравнений в частных производных начала развиваться в 60-х годах. Ее основы были заложены в работах Ю. В. Егорова [18], Д. Рассела [113]–[114], Г. Фатторини [24] (см. также статьи Т. Сейдмана [116], В. Литмана [102]). В частности, в этих работах был разработан метод моментов, сводящий решение задачи точной управляемости к вопросам теории рядов экспонент (о современном состоянии этого метода см. [1], [3]), а также введен принцип двойственности, сводящий задачу управляемости для эволюционного уравнения к задаче наблюдаемости для сопряженного уравнения. Общий обзор состояния теории до 1978 года дан в работе Д. Рассела [113].

Начиная с середины восьмидесятых годов интерес к теории управляемости существенно возрастает. При этом в основном изучался случай гиперболических уравнений. В 1986 г. появилась работа Л. Ф. Хо [51], в которой были найдены достаточные условия наблюдаемости для гиперболического уравнения второго порядка методом множителей. Одновременно в работах Ж.-Л. Лионса был введен гильбертов метод единственности, позволяющий получать из теоремы единственности для сопряженного уравнения существование решения задачи управляемости для исходного уравнения. В дальнейшем эти методы интенсивно развивались во многих работах. Наиболее полный обзор литературы имеется в монографиях Ж.-Л. Лионса [98], Л. Лагнеза [81], Л. Лагнеза, Ж.-Л. Лионса [82], В. Коморника [74] и обзорной статье Ж.-Л. Лионса [97] (см. также работы [75], [83]–[85]).

Важным шагом в развитии теории граничной управляемости явилась работа К. Бардоса, Г. Лебо, Дж. Рауха [4], в которой для решения задач граничной управляемости гиперболических уравнений были применены теоремы о распространении особенностей, что позволило получить достаточные условия разрешимости (близкие к необходимым) в терминах условия неловушечности (см. [5], [58], [90]).

Интересные результаты по управляемости гиперболических и близких к ним уравнений получены в [83]–[89], [47]–[52], [128], [130].

Как уже отмечалось, из единственности некоторой задачи Коши для сопряженного уравнения удастся выводить результаты по управляемости исходного уравнения. Одним из наиболее мощных методов доказательства единственности задачи Коши являются карлемановские оценки. Поэтому краткий обзор развития этой теории карлемановских оценок, приведенный ниже, представляется полезным.

После появления в начале 60-х годов фундаментальных результатов Л. Хёрмандера [53], [54] и позднее работ В. Исакова [65]–[68] теория карлемановских оценок развивалась в нескольких направлениях, среди которых упомянем теорию карлемановских оценок в пространствах L^p , где $p \neq 2$ (см. [69], [70], [72], [73], [118], [119], [123]), а также теорию карлемановских оценок с сингулярными весовыми функциями [69]. Карлемановские оценки для эллиптических и параболических уравнений с негладкими правыми частями получены в [19], [21], [64]. Случай гиперболического уравнения рассмотрен в работе А. Руиза [112]. Наиболее общие результаты получены в работах Д. Татару [120]–[123].

С начала 90-х годов в задачах точной граничной управляемости стали широко использоваться карлемановские оценки. При помощи карлемановских оценок А. Каземи, М. Клибанов решили в [71] задачу наблюдаемости для волнового уравнения, а И. Лазиешка, Р. Триджиани в [86] исследовали управляемость системы гиперболических уравнений. Случай управляемости гиперболических уравнений в областях с

негладкой границей рассмотрен в работах П. Грисварда [46], и А. Хейбига, М. Моуссаоуи [50].

Подавляющее большинство из упомянутых выше работ посвящено задачам управляемости линейных эволюционных уравнений. В случае нелинейных уравнений известно значительно меньше. Так, для простейшего одномерного гиперболического уравнения $y_{tt} - y_{xx} + y^3 = 0$ вопрос о точной граничной управляемости является открытым. Известны результаты о локальной управляемости (см. [113]), а также нуль-управляемости за промежуток времени, зависящий от энергии начальных данных. Для одномерного гиперболического уравнения с нелинейностью, растущей на бесконечности не быстрее $|y| \ln^+ |y|$, существование решения задачи управляемости доказано в [128], а для нелинейностей типа e^y , $-y^3$ — в [57].

Ж.-Л. Лионсом в [93], [94] была выдвинута гипотеза о глобальной управляемости системой Навье–Стокса с граничным или локально распределенным управлением. После этой работы с начала 90-х годов начали интенсивно исследоваться управляемость параболических уравнений с простейшими нелинейностями и управляемость уравнений, описывающих течение жидкости.

Аппроксимативная управляемость уравнений Стокса изучена в [93], [94], [96], [32]–[35], [19]–[21]. Задача об аппроксимативной управляемости посредством локальной однонаправленной внешней силы, поставленная Ж.-Л. Лионсом в [94], исследована И. И. Диасом, А. В. Фурсиковым [17] и Ж.-Л. Лионсом, Э. Зуаза [100].

Аппроксимативная управляемость для полулинейного параболического уравнения с нелинейностью, растущей на бесконечности не быстрее линейной функции, установлена в работах К. Фабре, Ж.-П. Пуеля и Э. Зуаза [22], [23] и в [27], [129] для нелинейного члена, содержащего градиент.

Для нелинейного параболического уравнения с квадратичной или более высокой нелинейностью ситуация кардинально меняется. В работах [15], [59] в случае полулинейного уравнения с нелинейностью типа y^3 , а в [33]–[35] для уравнения Бюргерса получены априорные оценки, из которых немедленно вытекает теорема о несуществовании решения задачи об аппроксимативной управляемости при некоторых начальных данных для соответствующего параболического уравнения. (В случае одномерного полулинейного параболического уравнения детальный анализ имеется в [41].)

Наиболее мощным методом доказательства точной управляемости нелинейных параболических уравнений, известным в настоящее время, является метод построения решения с помощью экстремальной задачи и последующего применения карлемановских оценок. Основы этого метода были заложены А. В. Фурсиковым и О. Ю. Эмануиловым в работах [35], [36], где исследована минимальная точная управляемость уравнения Бюргерса и двумерного уравнения Гельмгольца. Карлемановская оценка впервые получена в [60]. Точная управляемость для полулинейных параболических уравнений с нелинейностью, растущей на бесконечности не быстрее линейной функции, установлена в работах [61], [10] и [64]. В [25], [26] этот результат перенесен на случай полулинейного параболического уравнения с нелинейным членом, растущим на бесконечности не быстрее $|y| \ln^+ |y|$. Отметим также работу [127], где управляемость одномерного параболического уравнения с аналитической нелинейностью установлена с помощью теоремы Коши–Ковалевской.

Новый подход к доказательству разрешимости задачи управляемости линейных параболических уравнений с коэффициентами, не зависящими от времени, предложен

в работе Г. Лебо и Л. Робиано [91]. Интересные результаты для одномерного уравнения теплопроводности с быстро осциллирующими коэффициентами получены в недавней работе А. Лопеза и Э. Зуаза [105]. Вопросы управляемости уравнения Бюргерса рассмотрены также в [56], [6], [7].

Точная нуль-управляемость уравнений Навье–Стокса установлена в [36], [28].

Точная локальная управляемость системой Навье–Стокса и системой Буссинеска доказана в работах А. В. Фурсикова, О. Ю. Эмануилова [37]–[42] для управления, распределенного по всей границе или по ее части, а также с локальным распределенным управлением.

Точная локальная управляемость системы Навье–Стокса и Буссинеска с локально распределенным управлением и граничными условиями типа проскальзывания изучалась в [62]. Случай локально распределенного управления для системы Навье–Стокса с нулевыми граничными условиями рассмотрен в работе О. Ю. Эмануилова [57] при дополнительных ограничениях на заданную скорость.

Аппроксимативная управляемость двумерного уравнения Эйлера и двумерной системой Навье–Стокса с граничными условиями типа проскальзывания и граничным управлением установлена в работах Ж. М. Корона [11]–[13]. Позднее результат был распространен на случай трехмерного уравнения Эйлера в [43].

В работе [14] доказана глобальная точная управляемость системой Навье–Стокса с локальным распределенным управлением на замкнутом двумерном многообразии.

Основным объектом изучения в настоящей работе является задача управляемости системы Буссинеска, заданной на цилиндре $Q = (0, T) \times \Pi$, где $(0, T)$ – временной интервал, а $\Pi = \mathbb{R}^n / L\mathbb{Z}^n$ – n -мерный тор, т.е. прямое произведение n окружностей длины L . Размерность n тора Π берется равной 2 или 3. При этом управление u предполагается распределенным и имеющим носитель, принадлежащий цилиндру $Q^\omega = (0, T) \times \omega$, где ω – произвольная фиксированная подобласть тора Π . Результаты для уравнений Навье–Стокса получаются как простые следствия соответствующих результатов для уравнений Буссинеска. Однако для нас во введении проще будет обсудить результаты работы на примере системы Навье–Стокса, заданной на цилиндре Q :

$$(0.7) \quad \partial_t v(t, x) - \Delta v(t, x) + (v, \nabla)v + \nabla p(t, x) = f(t, x) + u(t, x), \quad \operatorname{div} v = 0,$$

$$(0.8) \quad v(t, x)|_{t=0} = v_0(x),$$

где $\operatorname{supp} u \subset Q^\omega$.

В настоящей работе доказана точная управляемость системы (0.7), (0.8) для $Q^\omega = (0, T) \times \omega$ со сколь угодно малым временем T и с любым открытым подмножеством $\omega \subset \Pi$, содержащим носитель управления u .

Решение вопроса о точной управляемости на отрезке $[0, T]$ задачи (0.7), (0.8), очевидно, сводится к решению задачи об аппроксимативной управляемости на $[0, T_1]$ ($T_1 < T$) и последующему решению задачи о локальной точной управляемости на $[T_1, T]$. Отметим, что в случае задачи (0.7), (0.8) $X = V^1(\Pi) = \{v \in (H^1(\Pi))^n : \operatorname{div} v = 0\}$, где $H^1(\Pi)$ – пространство Соболева векторных полей, определенных на торе Π . Таким образом, определены неравенства (0.5), (0.6), а с ними и понятие локальной точной управляемости и аппроксимативной управляемости.

Аппроксимативная управляемость задачи (0.7), (0.8) доказана на отрезке $[0, T_1]$, где $T_1 \equiv T_1(\varepsilon)$ и ε – число из неравенства (0.6). При этом $T_1(\varepsilon) \rightarrow 0$, если $\varepsilon \rightarrow 0$.

Из доказательства теоремы о локальной точной управляемости на отрезке времени $[T_1, T]$, приведенной в работе, следует, что отрезок $[T_1, T]$ можно выбрать сколь угодно малым, если ε из неравенства (0.5) достаточно мало. В итоге получается теорема о (нелокальной) точной управляемости с управлением u , имеющим носитель на $Q^\omega = (0, T) \times \omega$, где T может быть сколь угодно малым, а ω – произвольное открытое множество в Π .

Из теоремы о точной управляемости следует возможность стабилизации стационарных неустойчивых решений, существование сколь угодно сложных (хаотических) решений уравнений Навье–Стокса и Буссинеска и некоторое свойство обратимости этих систем (см. ниже п. 1.5).

Наконец отметим, что, как показано ниже в § 1, из теоремы о точной управляемости системы (0.1), (0.2), заданной на торе, легко выводится теорема об управляемости системы Навье–Стокса, заданной в произвольной ограниченной области Ω с управлением, распределенным по всей границе $\partial\Omega$.

§ 1. Постановка задач и формулировка основных результатов

1.1. Точная управляемость системы Навье–Стокса с границы области. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $T > 0$, $\Pi = (0, T) \times \Omega$, $\Sigma = (0, T) \times \partial\Omega$ – боковая поверхность цилиндра Π . Рассмотрим смешанную краевую задачу для системы уравнений Навье–Стокса:

$$(1.1) \quad \partial_t v(t, x) - \Delta v + (v, \nabla)v + \nabla p = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi,$$

$$(1.2) \quad \operatorname{div} v(t, x) \equiv \sum_{i=1}^n \partial_i v_i(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi,$$

$$(1.3) \quad v|_\Sigma = \alpha(t, x),$$

$$(1.4) \quad v(t, x)|_{t=0} = v_0(x),$$

где $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$ – векторное поле скорости течения жидкости, $\nabla p(t, x)$ – градиент давления в жидкости, Δ – оператор Лапласа, $(v, \nabla)v = \sum_{i=1}^n v_i \partial_i v$, $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$ – заданная плотность внешних сил, v_0 – заданное начальное векторное поле, а векторное поле α , определенное на границе Σ , не предполагается заданным, а является управлением.

Задача точной управляемости системы Навье–Стокса с управлением, заданным на границе Σ , т.е. задача точной граничной управляемости, состоит в следующем. Пусть нам задано некоторое решение $(\hat{v}(t, x), \nabla \hat{p}(t, x))$ системы уравнений (1.1), (1.2):

$$(1.5) \quad \partial_t \hat{v}(t, x) - \Delta \hat{v} + (\hat{v}, \nabla)\hat{v} + \nabla \hat{p} = f(t, x), \quad \operatorname{div} \hat{v} = 0.$$

Требуется найти такое управление $\alpha(t, x)$ на границе Σ , чтобы решение $v(t, x)$ задачи (1.1)–(1.4) в момент времени $t = T$ совпадало с $\hat{v}(T, x)$:

$$(1.6) \quad v(t, x)|_{t=T} \equiv \hat{v}(T, x).$$

Для уточнения приведенной выше постановки задачи и формулировки основного результата введем необходимые функциональные пространства. Через $H^k(\Omega)$, k – натуральное число, обозначается пространство Соболева скалярных функций, квадратично суммируемых на Ω вместе со всеми производными до порядка k , а через $(H^k(\Omega))^n$ обозначается аналогичное пространство Соболева векторных полей. Положим

$$(1.7) \quad V^k(\Omega) = \{v(x) = (v_1, \dots, v_n) \in (H^k(\Omega))^n : \operatorname{div} v = 0\},$$

$$(1.8) \quad H^{1,2}(\Pi) = \{v(t, x) \in L_2(0, T; H^2(\Omega)) : \partial_t v \in L_2(0, T; H^0(\Omega))\},$$

$$(1.9) \quad V^{1,2}(\Pi) = \{v \in (H^{1,2}(\Pi))^n : \operatorname{div} v = 0\}.$$

В более общем случае для $1 \leq p \leq \infty$, $k \geq 0$ положим

$$(1.10) \quad V_p^k(\Omega) = \{v(x) \in (W_p^k(\Omega))^n : \operatorname{div} v = 0\},$$

где $W_p^k(\Omega)$ – пространство Соболева функций, суммируемых в степени p вместе с производными до порядка k . Определение пространств Соболева $H^k(\Omega)$ и $W_p^k(\Omega)$ с дробными k см. в [99], [117]. Кроме того, будут использоваться пространства функций $C^{k,\alpha}(\Omega)$, где k – целое неотрицательное, $\alpha \in (0, 1)$, состоящие из k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\overline{\Omega}$, все k -е производные которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α .

Одним из основных результатов настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $f \in L_2(0, T; V^2(\Omega))$, $v_0 \in V^4(\Omega)$ и задано решение $(\widehat{v}, \widehat{p}) \in C^1(0, T; V^4(\Omega)) \times L_2(0, T; H^1(\Omega))$ уравнений (1.5). Предполагается, что на любой связной компоненте Γ_i границы $\partial\Omega$ справедливы равенства:

$$(1.11) \quad \int_{\Gamma_i} (\widehat{v}(t, x), \nu(x)) d\sigma = 0 \quad \text{n.в.,} \quad t \in [0, T], \quad \int_{\Gamma_i} (v_0(x), \nu(x)) d\sigma = 0,$$

где $\nu(x)$ – векторное поле внешних нормалей к $\partial\Omega$. Тогда существует решение $(v, \nabla p, \alpha) \in V^{1,2}(\Pi) \times (L_2(\Pi))^n \times L_2(0, T; (H^{3/2}(\partial\Omega))^n)$ задачи (1.1)–(1.4), (1.6).

Доказательство этой теоремы можно свести к доказательству утверждения, сформулированного в следующем пункте.

1.2. Точная управляемость системы Навье–Стокса посредством локального распределенного управления. Пусть $L > 0$ – некоторое число, $\Pi = \mathbb{R}^n / L\mathbb{Z}^n$ – n -мерный тор ($n = 2, 3$), у которого каждая образующая имеет длину L , $\omega \subset \Pi$ – некоторое открытое подмножество тора Π , $Q = (0, T) \times \Pi$, $Q^\omega = (0, T) \times \omega$. На цилиндре Q рассмотрим систему уравнений Навье–Стокса

$$(1.12) \quad \partial_t v(t, x) - \Delta v + (v, \nabla)v + \nabla p = f(t, x) + u(t, x), \quad (t, x) \in Q,$$

$$(1.13) \quad \operatorname{div} v = 0,$$

с начальным условием

$$(1.14) \quad v(t, x)|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \Pi.$$

Здесь f , v_0 – заданные векторные поля, а $u(t, x)$ – управление, сосредоточенное на цилиндре Q^ω . Отметим, что задание соотношений (1.12)–(1.14) на торе Π в точности означает, что эти соотношения определены при любом $x \in \mathbb{R}^n$ и все векторные поля, входящие в (1.12)–(1.14), т.е. $v(t, x)$, $\nabla p(t, x)$, $f(t, x)$, $u(t, x)$, $v_0(x)$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, периодичны по каждому x_i с периодом L . Например:

$$v(t, x_1, \dots, x_j + L, \dots, x_n) = v(t, x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Аналогично (1.7)–(1.10) введем пространства $V^k(\Pi)$, $V_p^k(\Pi)$ на торе Π и пространства $H^{1,2}(Q)$, $V^{1,2}(Q)$ на цилиндре $Q = (0, T) \times \Pi$.

Определим пространство управлений

$$(1.15) \quad U(\omega) = \{u(t, x) \in (L_2(Q))^n : \text{supp } u \subset Q^\omega\}.$$

Справедлива следующая теорема о точной управляемости системы Навье–Стокса (1.12), (1.13) посредством локального распределенного управления.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $f \in L_2(0, T; V^0(\Pi))$, $v_0 \in V^1(\Pi)$ и задано решение $(\hat{v}, \nabla \hat{p}) \in C^1(0, T; V^0(\Pi) \cap (C^{2,\alpha}(\Pi))^n) \times (L_2(Q))^n$ системы (1.5), определенной на цилиндре Q . Тогда существует решение

$$(v, \nabla p, u) \in V^{1,2}(Q) \times (L_2(Q))^n \times U(\omega)$$

задачи (1.12)–(1.14), (1.6).

Выведем теорему 1.1 из теоремы 1.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Сдвинув Ω на соответствующий вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$, можно считать, что Ω является подмножеством куба

$$K = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j \leq L, j = 1, \dots, n\},$$

где $L > 0$ – некоторое число, зависящее от Ω . отождествив у куба K противоположные грани, т.е. множества

$$\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = 0\} \quad \text{и} \quad \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = L\}$$

при каждом $j \in \{1, \dots, n\}$, получим тор Π . Итак, мы осуществили вложение $\Omega \subset \Pi$. Учитывая (1.11), можно в силу предложения 2.3 из [40] продолжить векторное поле $\hat{v} \in C^1(0, T; V^4(\Omega))$ до векторного поля $R\hat{v} \in C^1(0, T; V^4(K)) \subset C^1(0, T; V^0(K) \cap C^{2,\alpha}(K))$ и векторное поле $v_0 \in V^4(\Omega)$ до поля $Rv_0 \in V^4(K) \subset V^0(K) \cap C^{2,\alpha}(K)$ с некоторым $\alpha \in (0, 1)$. При этом метод доказательства предложения 2.3 из [40] позволяет выбрать векторные поля $R\hat{v}$ и Rv_0 таким образом, чтобы $R\hat{v} = 0$ в некоторой окрестности множества $(0, T) \times \partial K$, а $Rv_0 = 0$ в некоторой окрестности ∂K . Это свойство позволяет продолжить $R\hat{v}$ и Rv_0 периодически с K на $\mathbb{R}^n$, т.е. считать, что $R\hat{v}$ и

Rv_0 определены соответственно на Q и Π , причем $R\hat{v} \in C^1(0, T; V^0(\Pi) \cap C^{2,\alpha}(\Pi))$ и $Rv_0 \in V^0(\Pi) \cap C^{2,\alpha}(\Pi)$. Подставив $R\hat{v}$ в (1.5), получим, что

$$(1.16) \quad \partial_t R\hat{v}(t, x) - \Delta R\hat{v} + (R\hat{v}, \nabla)R\hat{v} = h(t, x),$$

где $h(t, x)$ – векторное поле, удовлетворяющее условию

$$(1.17) \quad h|_{(0,T) \times \Omega} = f - \nabla \hat{p}.$$

Так как $R\hat{v} \in C^1(0, T; V^0(\Pi) \cap C^{2,\alpha}(\Pi))$, то в силу (1.16) $h(t, x) \in (C(\bar{Q}))^n \subset (L_2(Q))^n$. Применяя к $h(t, x)$ при почти всех $t \in (0, T)$ разложение Вейля, получим, что

$$(1.18) \quad h(t, x) = h_\sigma(t, x) + \nabla \hat{q}(t, x),$$

где $h_\sigma(t, x) \in L_2(0, T; V^0(\Pi))$, $\nabla \hat{q}(t, x) \in (L_2(Q))^n$. Из (1.16), (1.18) следует, что

$$(1.19) \quad \partial_t (R\hat{v}) - \Delta (R\hat{v}) + ((R\hat{v}), \nabla)(R\hat{v}) + \nabla \hat{q} = h_\sigma(t, x), \quad \operatorname{div} R\hat{v} = 0.$$

Если в задаче (1.12)–(1.14) заменить f на h_σ и v_0 на Rv_0 , то выполнены условия теоремы 1.2, в которой $\omega = \Pi \setminus \Omega$, а пара $(\hat{v}, \hat{p})$ заменена на пару $(R\hat{v}, \hat{q})$, удовлетворяющую (1.19). Поэтому в силу теоремы 1.2 существует решение $(v, \nabla p, u)$ задачи (1.12)–(1.14) с $f = h_\sigma$, $v_0 = Rv_0$, удовлетворяющее условию

$$(1.20) \quad v(T, x) \equiv R\hat{v}(T, x), \quad x \in \Pi.$$

Сужение (1.20) на Π совпадает с (1.6), а сужение (1.12) с $f = h_\sigma$ на Π в силу (1.18), (1.17) можно записать в виде

$$\partial_t v - \Delta v + (v, \nabla)v + \nabla p + \nabla \hat{p} + \nabla \hat{q} = f.$$

Положив $\nabla p + \nabla \hat{p} + \nabla \hat{q} = \nabla p_1$ и введя обозначение $v|_{(0,T) \times \partial\Omega} = \alpha$, получим, что тройка $(v, \nabla p_1, \alpha)$ удовлетворяет утверждению теоремы 1.1.

1.3. Точная управляемость системы Буссинеска. В цилиндре $\Pi = (0, T) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega \subset C^\infty$, рассмотрим систему уравнений Буссинеска

$$(1.21) \quad \partial_t v(t, x) - \Delta v + (v, \nabla)v + \theta(t, x)\vec{e} + \nabla p(t, x) = f(t, x), \quad \operatorname{div} v = 0,$$

$$(1.22) \quad \partial_t \theta(t, x) - \Delta \theta + (v, \nabla)\theta = g(t, x),$$

$$(1.23) \quad v(t, x)|_\Sigma = \alpha(t, x), \quad \theta(t, x)|_\Sigma = \beta(t, x),$$

$$(1.24) \quad v(t, x)|_{t=0} = v_0(x), \quad \theta(t, x)|_{t=0} = \theta_0(x),$$

где $\Sigma = (0, T) \times \partial\Omega$, $v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$ – векторное поле скорости течения жидкости, p – давление, $\theta(t, x)$ – температура жидкости, $\vec{e}$ – направление силы тяжести, $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$ – плотность внешних сил, $g(t, x)$ – плотность источников тепла, v_0, θ_0 – начальные условия, а α, β – граничные условия.

Постановка задачи о точной управляемости с границы для системы Буссинеска аналогична соответствующей постановке для системы Навье–Стокса: пусть $(\hat{v}(t, x), \nabla \hat{p}(t, x), \hat{\theta}(t, x)) \in C^1(0, T; V^4(\Omega)) \times (L_2(\Pi))^n \times C^1(0, T; H^4(\Omega))$ удовлетворяет уравнениям (1.21), (1.22); требуется найти такое управление

$$(\alpha, \beta) \in L_2(0, T; (H^{3/2}(\partial\Omega))^n) \times L_2(0, T; H^{3/2}(\partial\Omega)),$$

чтобы решение (v, p, θ) задачи (1.21)–(1.24) удовлетворяло условию

$$(1.25) \quad v(T, x) = \hat{v}(T, x), \quad \theta(T, x) = \hat{\theta}(T, x).$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $n = 2, 3$, заданы $f \in L_2(0, T; V^0(\Omega))$, $g \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и набор функций $(\widehat{v}, \widehat{p}, \widehat{\theta}) \in C^1(0, T; V^4(\Omega)) \times (L_2(\Pi))^n \times C^1(0, T; H^4(\Omega))$, который удовлетворяет уравнениям (1.21), (1.22) и условию (1.11). Тогда для любого начального условия $(v_0, \theta_0) \in V^4(\Omega) \times H^4(\Omega)$, удовлетворяющего (1.11), существует такое граничное управление $(\alpha, \beta) \in L_2(0, T; (H^{3/2}(\partial\Omega))^n) \times L_2(0, T; H^{3/2}(\partial\Omega))$, что решение $(v, \nabla p, \theta)$ задачи (1.21)–(1.24) существует в пространстве $V^{1,2}(\Pi) \times (L_2(\Pi))^n \times H^{1,2}(\Pi)$, и для него выполнены условия (1.25).

Сформулируем теперь результат о точной управляемости системы Буссинеска посредством локального распределенного уравнения. Пусть $\Pi = \mathbb{R}^n / L\mathbb{Z}$ – тор, $\omega \subset \Pi$ – некоторое открытое подмножество тора, $Q = (0, T) \times \Pi$, $Q^\omega = (0, T) \times \omega$.

На цилиндре Q рассмотрим систему Буссинеска с локально распределенным управлением:

(1.26)

$$N(v, \theta) \equiv \partial_t v(t, x) - \Delta v + (v, \nabla)v + \theta(t, x)\vec{e} = \nabla p + f(t, x) + u'(t, x), \quad \operatorname{div} v = 0,$$

(1.27)

$$R(v, \theta) \equiv \partial_t \theta(t, x) - \Delta \theta + (v, \nabla \theta) = g(t, x) + u_{n+1}(t, x),$$

удовлетворяющую начальным условиям (1.24), заданным на торе Π . Здесь функция

$$u(t, x) \equiv (u'(t, x), u_{n+1}(t, x)) \equiv (u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$$

– управление. Аналогично (1.15) введем пространство управлений посредством формулы

$$(1.28) \quad U(\omega) = U(\omega; 0, T) = \{u(t, x) = (u', u_{n+1}) \in (L_2(Q))^{n+1} : \operatorname{supp} u \subset Q^\omega\}$$

(символы $0, T$ указывают временной интервал $(0, T)$, на котором сосредоточено управление $u \in U(\omega; 0, T)$).

Пусть набор

$$(1.29) \quad (\widehat{v}, \nabla \widehat{p}, \widehat{\theta}) \in C^1(0, T; V^0(\Pi) \cap (C^{2,\alpha}(\Pi))^n) \times (L_2(Q))^n \times C^1(0, T; C^{2,\alpha}(\Pi))$$

при некотором $\alpha \in (0, 1)$ и удовлетворяет на Q уравнениям (1.21), (1.22). Требуется найти такое управление $u = (u', u_{n+1}) \in U(\omega; 0, T)$, чтобы для решения $(v, \nabla p, \theta)$ задачи (1.26), (1.27), (1.24) на торе Π выполнялись равенства (1.25).

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть размерность $n = 2$ или 3 , заданы правые части $f \in L_2(0, T; V^0(\Pi))$, $g \in L_2(0, T; L_2(\Pi))$, а также решение (1.29) уравнений (1.21), (1.22), определенных на цилиндре Q , с этими правыми частями. Тогда для любых начальных условий $v_0 \in V^0(\Pi) \cap (C^{2,\alpha}(\Pi))^n$, $\theta_0 \in C^{2,\alpha}(\Pi)$ существует решение

$$(v, \nabla p, \theta, u) \in V^{1,2}(Q) \times (L_2(Q))^n \times H^{1,2}(Q) \times U(\omega; 0, T)$$

задачи (1.26), (1.27), (1.24), удовлетворяющее на торе Π в момент времени T соотношениям (1.25).

Покажем, что из теоремы 1.4 легко следует сформулированная выше теорема 1.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Пусть Π – тор, построенный по Ω , как в доказательстве теоремы 1.1, $R\hat{v}$ – продолжение $\hat{v}$ с $\mathbb{C}$ на Q , а Rv_0 – продолжение v_0 с Ω на Π , построенные при доказательстве той же теоремы. Пусть $R\hat{\theta} \in C(0, T; W_\infty^1(\Pi))$ – продолжение θ с $\mathbb{C}$ на Q . Подставив $R\hat{v}$, $R\hat{\theta}$ в (1.21), (1.22), аналогично (1.16) получим:

$$(1.30) \quad \begin{aligned} \partial_t(R\hat{v}) - \Delta R\hat{v} + (R\hat{v}, \nabla)R\hat{v} + R\hat{\theta}\vec{e} &= h(t, x), \\ \partial_t R\hat{\theta} - \Delta R\hat{\theta} + (R\hat{v}, \nabla R\hat{\theta}) &= Rg, \end{aligned}$$

где Rg – некоторое продолжение g с $\mathbb{C}$ на Q , а h удовлетворяет (1.17).

Подставив в (1.30) разложение Вейля (1.18) для векторного поля h и положив $\omega = \Pi \setminus \Omega$, получим, что система (1.26), (1.27) с $f = h_\sigma$ и Rg вместо g удовлетворяет условиям теоремы 1.4. Применяя эту теорему, завершаем доказательство теоремы 1.3.

Итак, наша цель состоит в доказательстве теорем 1.2 и 1.4. Их доказательства аналогичны, правда, доказательство теоремы 1.4 по понятным причинам чуть сложнее. Поэтому мы дадим подробное доказательство теоремы 1.4. Упрощения, позволяющие получить доказательство теоремы 1.2, очевидны.

В следующем пункте мы сведем доказательство теоремы 1.4 к доказательству локальной точной управляемости и доказательству аппроксимативной управляемости системы уравнений Буссинеска.

1.4. Точная локальная управляемость и аппроксимативная управляемость системы Буссинеска. Ослабим понятие точной управляемости в двух направлениях, вводя понятия локальной точной и аппроксимативной управляемости.

i) Пусть набор (1.29) удовлетворяет на Q уравнению Буссинеска (1.21), (1.22). Система Буссинеска (1.26), (1.27) называется *локально точно управляемой* относительно пространства управлений (1.28), если существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и для любого начального условия $(v_0, \theta_0) \in V^4(\Pi) \times H^4(\Pi)$, удовлетворяющего неравенству

$$(1.31) \quad \|\hat{v}(0, \cdot) - v_0\|_{V^1(\Pi)} + \|\hat{\theta}(0, \cdot) - \theta_0\|_{H^1(\Pi)} \leq \varepsilon,$$

существует такое управление $u \in U(\omega; 0, T)$, что решение $(v, \nabla p, \theta)$ задачи (1.26), (1.27), (1.24) с указанными начальными условиями и управлением существует в пространстве $V^{1,2}(Q) \times L_2(0, T; H^1(\Pi)) \times H^{1,2}(Q)$ и удовлетворяет условию (1.25).

ТЕОРЕМА 1.5. Система Буссинеска локально точно управляема относительно пространства управлений (1.28). При этом параметр ε_0 , непрерывно и монотонно убывая, зависит от величины

$$\frac{1}{T} + \|\hat{v}\|_{C^1(0, T; V_\infty^2(\Pi))} + \|\hat{\theta}\|_{C^1(0, T; W_\infty^2(\Pi))}.$$

ii) Пусть помимо начальных условий (1.24) задана пара

$$(v_1, \theta_1) \in (V^0(\Pi) \cap (C^{2,\alpha}(\Pi))^n) \times C^{2,\alpha}(\Pi).$$

Иногда нам будет полезно рассматривать множество наборов вида

$$(1.32) \quad \sum_{i=0}^1 (\|v_i\|_{(V^0(\Pi) \cap (C^{2,\alpha}(\Pi))^n)}^2 + \|\theta_i\|_{C^{2,\alpha}(\Pi)}^2) \leq K.$$

Система Буссинеска (1.26), (1.27), (1.24) называется *аппроксимативно управляемой* относительно пространства управлений (1.28), если для любого $\varepsilon > 0$ и любой пары (v_1, θ_1) из множества (1.32) найдутся момент времени $T = T_{\varepsilon, K}$ и решение

$$(v, p, \theta, u) \in V^{1,2}(Q_{T_{\varepsilon, K}}) \times L_2(0, T_{\varepsilon, K}; H^1(\Pi)) \times H^{1,2}(Q_{T_{\varepsilon, K}}) \times U(\omega; 0, T_{\varepsilon, K})$$

задачи (1.26), (1.27), (1.24) такие, что

$$(1.33) \quad \|v(T_{\varepsilon, K}, \cdot) - v_1\|_{V^1(\Pi)} + \|\theta(T_{\varepsilon, K}, \cdot) - \theta_1\|_{H^1(\Pi)} \leq \varepsilon.$$

Здесь $Q_{T_{\varepsilon, K}} = (0, T_{\varepsilon, K}) \times \Pi$.

ТЕОРЕМА 1.6. Система Буссинеска (1.26), (1.27), (1.24) *аппроксимативно управляема* относительно пространства управлений (1.28). Более того, при каждом $\varepsilon > 0$ и любом фиксированном $K > 0$ время $T = T_{\varepsilon, K}$ можно выбрать так, что

$$T_{\varepsilon, K} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Доказательству теорем 1.5, 1.6 будет посвящена оставшаяся часть этой работы. А сейчас выведем с их помощью теорему 1.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Для построения необходимого управления разобьем отрезок времени $[0, T]$ на два $[0, S]$ и $[S, T]$, где $S < T/2$. Пусть

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{T} + \|\widehat{v}\|_{C^1(0, T; V_\infty^2(\Pi))} + \|\widehat{\theta}\|_{C^1(0, T; W_\infty^2(\Pi))} \right)$$

— непрерывная монотонно убывающая функция из теоремы 1.5. Выберем $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее неравенству

$$(1.34) \quad \begin{aligned} \varepsilon &< \varepsilon_0 \left(\frac{2}{T} + \|\widehat{v}\|_{C^1(0, T; V_\infty^2(\Pi))} + \|\widehat{\theta}\|_{C^1(0, T; W_\infty^2(\Pi))} \right) \\ &\leq \varepsilon_0 \left(\frac{1}{T-S} + \|\widehat{v}\|_{C^1(S, T; V_\infty^2(\Pi))} + \|\widehat{\theta}\|_{C^1(S, T; W_\infty^2(\Pi))} \right), \end{aligned}$$

причем второе неравенство (1.34) справедливо в силу монотонности функции $\varepsilon_0(\lambda)$. Поставим в начальный момент времени $S < T/2$ начальное условие

$$(1.35) \quad v(t, x)|_{t=S} = v_S, \quad \theta(t, x)|_{t=S} = \theta_S$$

с $(v_S, \theta_S) \in V^4(\Pi) \times H^4(\Pi)$, удовлетворяющим неравенству

$$\|\widehat{v}(S, \cdot) - v_S\|_{V^1(\Pi)} + \|\widehat{\theta}(S, \cdot) - \theta_S\|_{H^1(\Pi)} \leq \varepsilon,$$

где ε – число из (1.31). Тогда в силу теоремы 1.5 существует управление $u \in U(\omega; S, T)$ такое, что для решения $(v, \nabla p, \theta)$ задачи (1.26), (1.27), (1.35) выполнено соотношение (1.25). Поэтому теорема 1.6 будет доказана, если мы возьмем $S < T/2$ и на временном отрезке $(0, S)$ выберем такое управление, что решение $(v, \nabla p, \theta)$ задачи (1.26), (1.27), (1.24) будет удовлетворять неравенству

$$(1.36) \quad \|\widehat{v}(S, \cdot) - v(S, \cdot)\|_{V^1(\Pi)} + \|\widehat{\theta}(S, \cdot) - \theta(S, \cdot)\|_{H^1(\Pi)} \leq \varepsilon,$$

где ε – число из (1.34).

После этого нам останется применить теорему 1.5 с начальным условием $(v_S, \theta_S) = (v(S, \cdot), \theta(S, \cdot))$, поставленным в момент времени S .

Так как

$$(\widehat{v}, \widehat{\theta}) \in C^1(0, T; V_\infty^2(\Pi)) \times C^1(0, T; W_\infty^2(\Pi)) \subset C(0, T; V^1(\Pi)) \times C(0, T; H^1(\Pi)),$$

то существует $\delta > 0$ такое, что

$$(1.37) \quad \|\widehat{v}(\tau, \cdot) - \widehat{v}(0, \cdot)\|_{V^1(\Pi)} + \|\widehat{\theta}(\tau, \cdot) - \widehat{\theta}(0, \cdot)\|_{H^1(\Pi)} \leq \varepsilon/2 \quad \forall 0 < \tau < \delta,$$

где ε – число из (1.34). В силу теоремы 1.6 существует такое $\varepsilon_1 < \varepsilon/2$, что $T_{\varepsilon_1} < \delta$ и на временном интервале $(0, T_{\varepsilon_1})$ можно выбрать управление $u \in U(\omega; 0, T_{\varepsilon_1})$ такое, что решение $(v, \nabla p, \theta)$ задачи (1.26), (1.27), (1.24) удовлетворяет неравенству

$$(1.38) \quad \|v(T_{\varepsilon_1}, \cdot) - \widehat{v}(0, \cdot)\|_{V^1(\Pi)} + \|\theta(T_{\varepsilon_1}, \cdot) - \widehat{\theta}(0, \cdot)\|_{H^1(\Pi)} \leq \varepsilon_1 < \varepsilon/2.$$

Из (1.37), (1.38) следует (1.36) с $S = T_{\varepsilon_1}$.

1.5. Некоторые приложения. Приведем некоторые приложения теорем об управляемости, сформулированных выше.

1. *Стабилизированность неустойчивых стационарных потоков.* Пусть $(\widehat{v}(x), \nabla \widehat{p}(x)) \in V^2(\Omega) \times (L_2(\Omega))^n$ – стационарное решение системы Навье–Стокса, заданной в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} -\Delta \widehat{v}(x) + (\widehat{v}, \nabla) \widehat{v} + \nabla \widehat{p}(x) &= f(x), \quad \operatorname{div} \widehat{v} = 0, \\ \widehat{v}|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Предположим, что это решение не является устойчивым, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое начальное условие $v_0(x) \in \{v : \|v - \widehat{v}\|_{V^1(\Omega)} < \varepsilon\}$, что решение $(v(t, x), \nabla p(t, x))$ системы Навье–Стокса (1.1)–(1.4) с $f(t, x) \equiv f(x)$, $\alpha(t, x) \equiv 0$ не стремится к $\widehat{v}$ при $t \rightarrow \infty$:

$$\|v(t, \cdot) - \widehat{v}\|_{V^1(\Omega)} \not\rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Неустойчивое стационарное решение $(\widehat{v}, \nabla \widehat{p})$ можно стабилизировать, если вместо краевых условий прилипания включить граничное управление (1.3). Действительно, согласно теореме 1.1 для любого начального условия $v_0(x) \in V^1(\Omega)$ можно найти

такое граничное управление $\alpha(t, x)$, $(t, x) \in \Sigma$, что решение $(v(t, x), \nabla p(t, x))$ задачи (1.1)–(1.4) будет удовлетворять условию:

$$v(T, x) \equiv \widehat{v}(x).$$

Аналогичным свойством стабилизируемости стационарных потоков с помощью граничного управления обладает и система уравнений Буссинеска.

2. *Существование хаотических течений.* Рассмотрим систему уравнений Буссинеска (1.26), (1.27), (1.24) на цилиндре $Q = (0, T) \times \Pi$, где Π – тор, а управление $u(t, x)$ сосредоточено в $Q^\omega = (0, T) \times \omega$, где $\omega \subset \Pi$ достаточно “мало”, например, ω – шар достаточно малого радиуса. Предположим, что $f(t, x) \equiv 0$, $g(t, x) \equiv 0$ в (1.26), (1.27). Покажем, что эта задача имеет сколь угодно сложное (хаотическое) решение. А именно, рассмотрим разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ временного интервала $(0, T)$, каждому элементу разбиения t_j сопоставим произвольную пару $(v_j, \theta_j) \in V^1(\Pi) \times H^1(\Pi)$ и зададимся числом $\varepsilon > 0$. Из теоремы 1.6 об аппроксимативной управляемости системы Буссинеска следует, что существует такое управление $u \in U(\omega; 0, T)$, что решение $(v(t, x), \nabla p(t, x), \theta(t, x))$ задачи (1.26), (1.27), (1.24) удовлетворяет условию

$$(1.39) \quad \|v(t_j, \cdot) - v_j\|_{V^1(\Pi)}^2 + \|\theta(t_j, \cdot) - \theta_j\|_{H^1(\Pi)}^2 < \varepsilon \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Отметим, что правая часть системы (1.26), (1.27) равна нулю при $(t, x) \in Q \setminus Q^\omega$, а решение этой системы может быть сколь угодно сложным на всем Q в смысле справедливости соотношений (1.39).

Аналогичным свойством обладает, конечно, и система Навье–Стокса.

3. *Свойство обратимости.* Пусть $(v_i(t, x), \nabla p_i(t, x))$, $(t, x) \in Q$, $i = 1, 2$, – два решения системы Навье–Стокса (1.5) (с одинаковой правой частью $f(t, x)$, например, с $f(t, x) \equiv 0$). Тогда для любого $\omega \in \Pi$ и $(t_1, t_2) \subset (0, T)$ существует управление $u(t, x)$, сосредоточенное в $(t_1, t_2) \times \omega$, такое, что с помощью этого управления решение $(v_1, \nabla p_1)$ может быть переведено в $(v_2, \nabla p_2)$. Последнее означает, что при указанном управлении u решение $(v, \nabla p)$ системы (1.12) обладает свойством:

$$\begin{aligned} (v(t, x), p(t, x)) &\equiv (v_1(t, x), p_1(t, x)) \quad \text{при } t \in (0, t_1), \\ (v(t, x), p(t, x)) &\equiv (v_2(t, x), p_2(t, x)) \quad \text{при } t \in (t_2, T). \end{aligned}$$

Указанное свойство называется *свойством обратимости*. В силу теоремы 1.2 система Навье–Стокса обладает свойством обратимости.

Аналогичным образом формулируется свойство обратимости и для системы Буссинеска. Справедливость свойства обратимости для системы Буссинеска вытекает из теоремы 1.4.

Свойство обратимости системы Навье–Стокса и Буссинеска представляет интерес в связи с некоторыми вопросами теории климата. (Чуть подробнее об этом см. в работах Ж.-Л. Лионса [93], [94], [96], Ж.-М. Корона, А. В. Фурсикова [14].)

§ 2. Карлемановские оценки

Доказательство разрешимости задачи точной управляемости линейной эволюционной системы часто сводят к изучению соответствующей задачи наблюдаемости для сопряженной системы. Этот путь реализован в § 2–4 данной работы.

Целью данного параграфа является доказательство некоторых оценок карлемановского типа для решений системы, сопряженной линейаризованным уравнениям Буссинеска.

2.1. Предварительные сведения. Как и раньше, Π есть n -мерный тор, $\omega \subset \Pi$ – подобласть с границей $\partial\omega \in C^\infty$. Предполагается, что $\omega' \Subset \omega$ и область ω' – звездное множество относительно некоторой точки $x_0 \in \omega'$.

ЛЕММА 2.1. *Существует функция $\psi(x) \in C^2(\Pi)$ такая, что*

$$(2.1) \quad |\nabla\psi(x)| > 0 \quad \forall x \in \overline{\Pi \setminus \omega'},$$

где $\omega' \Subset \omega \subset \Pi$. Кроме того,

$$(2.2) \quad \psi(x) \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$, а тор Π строится из куба $K = \{x = (x_1, \dots, x_n), -L/2 \leq x_j \leq L/2, j = 1, \dots, n\}$ посредством отождествления противоположных граней. Положим

$$\psi(x) = c + \sum_{j=1}^n \beta(x_j),$$

где $c > 0$ – константа, $\beta(x)$ – периодическая функция такая, что

$$\beta(x) \in C^\infty(-L/2, L/2), \quad \beta(x) = \begin{cases} x, & x \in [\varepsilon, L/2]; \\ x + L, & x \in [-L/2, -\varepsilon], \end{cases}$$

где ε достаточно мало. Очевидно, для построенной функции ψ выполнено условие (2.1) с

$$\omega' = \{x = (x_1, \dots, x_n), |x_j| \leq \varepsilon, j = 1, \dots, n\}.$$

Условие (2.2) легко обеспечить, выбрав константу $c > 0$ достаточно большой.

Пусть $\gamma(t) \in C^\infty(0, T)$ – функция, удовлетворяющая условиям

$$(2.3) \quad 0 < \gamma(t) \leq T - t, \quad \gamma(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, T/4]; \\ T - t, & t \in [3T/4, T]. \end{cases}$$

Кроме того, предполагается, что $\gamma(t)$ монотонно растет при $t \in (0, T/2)$ и монотонно убывает при $t \in (T/2, T)$. Введем функции

$$(2.4) \quad \varphi = \varphi_\lambda(t, x) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{\gamma(t)}, \quad \alpha \equiv \alpha_\lambda(t, x) = \frac{e^{\lambda^2\|\psi\|_{C(\Pi)}} - e^{\lambda\psi(x)}}{\gamma(t)},$$

где $\lambda > 1$ – параметр, а $\psi(x)$, $\gamma(t)$ – функции, введенные выше.

На цилиндре Q рассмотрим обратное уравнение теплопроводности

$$(2.5) \quad \partial_t z(t, x) + \Delta z(t, x) = f(t, x).$$

ЛЕММА 2.2. Пусть $f \in L_2(Q)$ и $z \in L_2(Q)$ удовлетворяют уравнению (2.5). Тогда существует $\hat{\lambda} > 1$ такое, что для любого $\lambda > \hat{\lambda}$ найдется $s_0(\lambda)$ такое, что при всех $s \geq s_0(\lambda)$ справедлива карлемановская оценка

$$(2.6) \quad \int_Q \left((s\varphi)^{-1} |\partial_t z|^2 + (s\varphi)^{-1} \sum_{i,j=1}^n |\partial_{x_i x_j}^2 z|^2 + s\varphi |\nabla z|^2 + (s\varphi)^3 z^2 \right) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \\ \leq c \left(\int_Q |f(t, x)|^2 e^{-s\alpha_\lambda} dx dt + \int_{Q_{\omega'}} s^3 \varphi^3 z^2 e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \right),$$

где $c > 0$ – константа, не зависящая от f , z и s .

Рассмотрим уравнение Пуассона на торе Π :

$$(2.7) \quad \Delta z = f.$$

ЛЕММА 2.3. Пусть $z \in H^2(\Pi)$ и $f \in L_2(\Pi)$ удовлетворяют (2.7). Существует $\hat{\lambda} > 1$ такое, что при любом $\lambda > \hat{\lambda}$ найдется $s_0(\lambda)$ такое, что при всех $s \geq s_0(\lambda)$ справедлива оценка

$$(2.8) \quad \int_\Pi \left((s\varphi)^{-1} \sum_{i,j=1}^n |\partial_{x_i x_j}^2 z|^2 + s\varphi |\nabla z|^2 + s^3 \varphi^3 |z|^2 \right) e^{-s\alpha_\lambda} dx \\ \leq c \left(\int_\Pi |f|^2 e^{-s\alpha_\lambda} dx + \int_{\omega'} s^3 \varphi^3 |z|^2 e^{-s\alpha_\lambda} dx \right),$$

где константа $c > 0$ не зависит от f , z , s .

Леммы 2.2 и 2.3 доказаны в [10], [30], [38], [40], [41], [61] в случае ограниченной области. В случае тора Π доказательство проводится аналогично.

Заменяя константы $\hat{\lambda}, s_0(\lambda)$ в леммах 2.2, 2.3 их максимумом, будем считать, что $\hat{\lambda}, s_0(\lambda)$ в леммах 2.2, 2.3 одни и те же.

На цилиндре Q рассмотрим следующую систему уравнений:¹

$$(2.9) \quad N^*(y, \tau) = -\partial_t y - \Delta y - (\hat{v}, \nabla) y + ((y, \nabla) \hat{v})^* + \tau \nabla \hat{\theta} + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} y = 0,$$

$$(2.10) \quad R^*(y, \tau) = -\partial_t \tau - \Delta \tau - (\nabla \tau, \hat{v}) + (\hat{e}, y) = g,$$

$$(2.11) \quad y(t, x)|_{t=T} = y_T(x), \quad \tau(t, x)|_{t=T} = \tau_T(x),$$

где $\hat{v}, \hat{\theta}, f, g, y_T, \tau_T$ – заданы, а (y, τ) – искомые функции и

$$((y, \nabla) \hat{v})^* = ((\partial_{x_1} \hat{v}, y), \dots, (\partial_{x_n} \hat{v}, y)).$$

Из приведенной ниже леммы вытекает корректность задачи (2.9)–(2.11).

¹Эта система формально сопряжена линеаризованной системе Буссинеска, введенной ниже, в §3 (см. (3.1), (3.2)).

ЛЕММА 2.4. Пусть $\widehat{v} \in L_\infty(0, T; V_\infty^1(\Pi))$, $\widehat{\theta} \in L_\infty(0, T; W_\infty^1(\Pi))$. Тогда для любых исходных данных $y_0 \in V^1(\Pi)$, $\tau_0 \in H^1(\Pi)$, $f \in (L_2(Q))^n$, $g \in L_2(Q)$ существует единственное решение $(y, \nabla p, \tau) \in V^{1,2}(Q) \times (L^2(Q))^n \times H^{1,2}(Q)$ задачи (2.9)–(2.11). Это решение удовлетворяет оценке

$$(2.12) \quad \|y\|_{V^{1,2}(Q)}^2 + \|\nabla p\|_{(L_2(Q))^n}^2 + \|\tau\|_{H^{1,2}(Q)}^2 \leq c(\|y_T\|_{V^1(\Pi)}^2 + \|\tau_T\|_{H^1(\Pi)}^2 + \|f\|_{(L_2(Q))^n}^2 + \|g\|_{L_2(Q)}^2),$$

где константа $c > 0$ не зависит от y_T , τ_T , f , g .

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Методы доказательства предложений такого типа хорошо известны (см., например, [77], [124]). Для полноты изложения напомним основные этапы доказательства. Получим, прежде всего, энергетическое неравенство для решения задачи (2.9)–(2.11). Умножая (2.9) скалярно в $(L_2(\Pi))^n$ на y , а (2.10) – скалярно в $L_2(\Pi)$ на τ , складывая полученные неравенства, интегрируя по частям, проводя простые преобразования и, в частности, интегрируя по времени от t до T , будем иметь:

$$\begin{aligned} & \|y(t, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(t, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2 + 2 \int_t^T (\|\nabla y(s, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\nabla \tau(s, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2) ds \\ & \leq c_2 \int_t^T (\|y(s, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(s, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2 + \|f(s, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|g(s, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2) ds \\ & \quad + \|y_T\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau_T\|_{L_2(\Pi)}^2. \end{aligned}$$

Применяя к этому неравенству лемму Гронуолла, получим энергетическое неравенство:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} & \|y(t, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(t, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2 + 2 \int_t^T (\|\nabla y(s, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\nabla \tau(s, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2) ds \\ & \leq c \left(\|y_T\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau_T\|_{L_2(\Pi)}^2 + \int_t^T (\|f(s, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|g(s, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2) ds \right). \end{aligned}$$

Проектируя уравнение (2.9) на соленоидальные векторные поля, получим с помощью методов Галеркина, основываясь на неравенстве (2.13), существование и единственность решения

$$(y, \tau) \in (L_\infty(0, T; V^0(\Pi)) \cap L_2(0, T; V^1(\Pi))) \times (L_\infty(0, T; L_2(\Pi)) \cap L_2(0, T; H^1(\Pi))).$$

Пусть $P: (L_2(\Pi))^n \rightarrow V^0(\Pi)$ – ортопроектор. Используя явную формулу для P , справедливую в случае тора (см. [126]), легко видеть, что $P\Delta = \Delta P$ и сужение P на $(H^k(\Pi))^n$ действует на $V^k(\Pi)$, $P|_{(H^k(\Pi))^n}: (H^k(\Pi))^n \rightarrow V^k(\Pi)$. Поэтому проекция уравнения (2.9) на $V^0(\Pi)$ имеет вид

$$(2.14) \quad -\partial_t y - \Delta y = P[f + (\widehat{v}, \nabla)y + ((y, \nabla)\widehat{v})^* + \tau \nabla \widehat{\theta}] \equiv q,$$

причем, очевидно, $q \in L_2(0, T; V^0(\Pi))$. Применяя к задаче (2.14), (2.11) с правой частью q теорему о гладкости решений задачи Стокса, получим, что $y \in V^{1,2}(Q)$ и

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \|y\|_{V^{1,2}(Q)}^2 &\leq c(\|y_T\|_{V^1(\Pi)}^2 + \|q\|_{L_2(0,T;V^0(\Pi))}^2) \\ &\leq c_1(\|y_T\|_{V^1(\Pi)}^2 + \|y\|_{L_2(0,T;V^1(\Pi))}^2 + \|\tau\|_{L_2(0,T;H^1(\Pi))}^2 + \|y\|_{(L_2(Q))^n}^2). \end{aligned}$$

Из (2.15), (2.13) следует требуемая оценка для $\|y\|_{V^{1,2}(Q)}^2$. Оценка для $\|\tau\|_{H^{1,2}(Q)}^2$ получается аналогично. Выражая ∇p из уравнения (2.9), получим оценку для $\|\nabla p\|_{(L_2(Q))^n}^2$.

2.2. Карлемановские оценки решений системы (2.9), (2.10). Прежде всего, получим дополнительную информацию о гладкости давления p из (2.9); для этого наложим более сильные, чем в лемме 2.4, предположения о гладкости $\widehat{v}$, $\widehat{\theta}$ и f . Допустим, что $\operatorname{div} f \in L_2(Q)$ и

$$(2.16) \quad \widehat{v} \in L_\infty(0, T; V_\infty^2(\Pi)), \quad \widehat{\theta} \in L_\infty(0, T; W_\infty^2(\Pi)).$$

Применяя оператор div к обеим частям (2.9) и учитывая бездивергентность функции y , получим равенство

$$(2.17) \quad \Delta p = \operatorname{div}((\widehat{v}, \nabla)y - ((y, \nabla)\widehat{v})^* - \tau \nabla \widehat{\theta} + f).$$

В силу (2.16) и включений $y \in L_2(0, T; V^2(\Pi))$, $\tau \in L_2(0, T; H^2(\Pi))$, вытекающих из леммы 2.4, будем иметь:

$$\operatorname{div}((\widehat{v}, \nabla)y - ((y, \nabla)\widehat{v})^* - \tau \nabla \widehat{\theta}) \in L_2(Q).$$

Поэтому из (2.17) и теоремы вложения Соболева следует, что

$$p \in L_2(0, T; H^2(\Pi)) \subset L_2(0, T; C(\Pi)),$$

и, значит, значение функции p в точке x_0 , т.е. $p(t, x_0)$, определено как функция из $L_2(0, T)$. Чтобы однозначно определить функцию p в (2.9), положим

$$(2.18) \quad p(t, x_0) = 0,$$

где $x_0 \in \omega'$, а ω' — звездная относительно x_0 подобласть из леммы 2.1.

Справедлива

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\widehat{v}, \widehat{\theta}$ удовлетворяют (2.16),

$$(2.19) \quad f \in (L_2(Q))^n, \quad \operatorname{div} f \in L_2(Q), \quad g \in L_2(Q).$$

Существует $\widehat{\lambda} > 1$ такое, что при любом $\lambda > \widehat{\lambda}$ найдется $s_0(\lambda)$ такое, что при всех $s \geq s_0(\lambda)$ решение задачи (2.9)–(2.11) удовлетворяет оценке

$$(2.20) \quad \begin{aligned} I(y, \tau, s) &\equiv \int_Q \left((\varphi s)^{-1} (|\partial_t y|^2 + |\partial_t \tau|^2) + (s\varphi)^{-1} \sum_{i,j=1}^n (|\partial_{x_i x_j}^2 y|^2 + |\partial_{x_i x_j}^2 \tau|^2) \right. \\ &\quad \left. + s\varphi (|\nabla y|^2 + |\nabla \tau|^2) + s^3 \varphi^3 (|y|^2 + |\tau|^2) \right) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \\ &\leq c \left(\int_Q (|f(t, x)|^2 + |\operatorname{div} f|^2 + |g(t, x)|^2) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{Q_{\omega'}} s^3 \varphi^3 (|y|^2 + |\tau|^2 + |p|^2) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \right), \end{aligned}$$

где $c > 0$ не зависит от f, g, s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$(2.21) \quad \tilde{f}(t, x) = f(t, x) + (\widehat{v}, \nabla) y - ((y, \nabla) \widehat{v})^* - \tau \nabla \widehat{\theta},$$

$$(2.22) \quad \tilde{g}(t, x) = g(t, x) - (\vec{e}, y) + (\nabla \tau, \widehat{v}),$$

$$(2.23) \quad q(t, x) = \tilde{f} - \nabla p.$$

Из (2.9), (2.23) следует, что $\operatorname{div} q = 0$. Используя обозначения (2.21)–(2.23), уравнения (2.9), (2.10) можно переписать в виде

$$(2.24) \quad -\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = q, \quad \operatorname{div} y = 0; \quad -\frac{\partial \tau}{\partial t} - \Delta \tau = \tilde{g}.$$

Применяя к каждому из уравнений (2.24) лемму 2.2 и складывая полученные оценки, будем иметь неравенство

$$(2.25) \quad I(y, \tau, s) \leq c \left(\int_Q (|q|^2 + |\tilde{g}|^2) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt + \int_{Q_{\omega'}} s^3 \varphi^3 (|y|^2 + |\tau|^2) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \right),$$

где $I(y, \tau, s)$ – левая часть неравенства (2.20), а c не зависит от $q, \tilde{g}, s > s_0(\lambda)$.

Используя определение (2.21)–(2.23) функций q и $\tilde{g}$, оценим первый интеграл в правой части (2.25):

$$(2.26) \quad \begin{aligned} &\int_Q (|q|^2 + |\tilde{g}|^2) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \\ &\leq c_1 \int_Q (|f|^2 + |g|^2 + |\nabla p|^2 + |\nabla y|^2 + |\nabla \tau|^2 + |y|^2 + |\tau|^2) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt. \end{aligned}$$

Из (2.25), (2.26), увеличивая в случае необходимости s , получим неравенство:

$$(2.27) \quad I(y, \tau, s) \leq c_2 \left(\int_Q (|f|^2 + |g|^2 + |\nabla p|^2) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt + \int_{Q^{\omega'}} s^3 \varphi^3 (|y|^2 + |\tau|^2) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \right).$$

Применяя лемму 2.3 к уравнению (2.17), будем иметь оценку:

$$(2.28) \quad \begin{aligned} & \int_Q \left((s\varphi)^{-1} \sum_{i,j=1}^n |\partial_{x_i x_j}^2 p|^2 + s\varphi |\nabla p|^2 + s^3 \varphi^3 |p|^2 \right) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \\ & \leq c \left(\int_Q |\operatorname{div}((\widehat{v}, \nabla)y - ((y, \nabla)\widehat{v})^* - \tau \nabla \widehat{\theta} + f)|^2 e^{-s\alpha_\lambda} dx dt + \int_{Q^{\omega'}} s^3 \varphi^3 |p|^2 e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \right) \\ & \leq c_1 \left(\int_Q (|\nabla y|^2 + |\nabla \tau|^2 + |y|^2 + |\tau|^2 + |\operatorname{div} f|^2) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt + \int_{Q^{\omega'}} s^3 \varphi^3 |p|^2 e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \right). \end{aligned}$$

Оценивая ∇p из (2.27) с помощью (2.28) и увеличивая s в случае необходимости, получим оценку (2.20).

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $(\widehat{v}, \widehat{\theta})$ удовлетворяет (2.16) и $(y, \tau) \in L_2(0, T; V^1(\Pi)) \times L^2(0, T; H^1(\Pi))$ решение задачи (2.9)–(2.11) с $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ такое, что $(y, \tau)|_{Q^\omega} \equiv 0$. Тогда

$$(y, \tau) \equiv 0 \quad \text{на } Q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу (2.9) $\nabla p|_{Q^\omega} \equiv 0$. Следовательно,

$$p(t, x) = p(t) \quad \forall (t, x) \in Q^\omega,$$

и, согласно (2.18), $p|_{Q^\omega} \equiv 0$. Таким образом, наше утверждение следует из (2.20).

Наша цель теперь – избавиться в оценке (2.20) от члена $|p|^2$ в правой части. Для этого мы используем следующее свойство функции α_λ , которое в силу второго соотношения в (2.4) и (2.2) справедливо при $\lambda \geq \lambda_0$, где λ_0 достаточно велико:

$$(2.29) \quad \text{Пусть } \widehat{\alpha}_\lambda(t) = \max_{x \in \Omega} \alpha_\lambda(t, x), \quad \widetilde{\alpha}(t) = \min_{x \in \Omega} \alpha_\lambda(t, x), \quad \text{тогда } \widehat{\alpha}_\lambda(t) < \frac{10}{9} \widetilde{\alpha}(t).$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\widehat{v}$, $\widehat{\theta}$, f , g удовлетворяют (2.16), (2.19). Пусть $\omega' \Subset \omega \Subset \Pi$, причем $\partial\omega \in C^\infty$, а ω' — множество, звездное относительно точки x_0 из (2.18). Тогда существует $\widehat{\lambda} > 1$ такое, что для любого $\lambda > \widehat{\lambda}$ найдется $s_0(\lambda)$ такое, что при всех $s \geq s_0(\lambda)$ решение задачи (2.9)–(2.11) удовлетворяет оценке

$$(2.30) \quad I(y, \tau, s) \leq c \left(\int_Q (|f|^2 + |\operatorname{div} f|^2 + |g|^2) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt + \int_0^T e^{-9s\widehat{\alpha}_\lambda/10} (\|f(t, \cdot)\|_{(H^{-2}(\omega))^n}^2 + \|\operatorname{div} f(t, \cdot)\|_{H^{-1}(\omega)}^2) dt + \int_{Q^\omega} (|y|^2 + |\tau|^2 + |\partial_t y|^2) e^{-9s\widehat{\alpha}_\lambda/10} dx dt \right),$$

где $c > 0$ не зависит от f , g , а $I(y, \tau, s)$ определено в (2.20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выразим ∇p из уравнения (2.9):

$$(2.31) \quad \nabla p = f + \partial_t y + \Delta y + (\widehat{v}, \nabla) y - ((y, \nabla) \widehat{v})^* - \tau \nabla \widehat{\theta} \equiv f_1.$$

Применив оператор div к обеим частям этого равенства, получим:

$$(2.32) \quad \Delta p = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial x_i^2}, y \right) - \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial \widehat{v}_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} - \tau \Delta \widehat{\theta} - (\nabla \tau, \nabla \widehat{\theta}) + \operatorname{div} f \equiv f_2,$$

причем последнее равенство в (2.32) является определением функции f_2 . Представим p в виде суммы

$$(2.33) \quad p(t, x) = p_1(t, x) + p_2(t, x), \quad t \in (0, T), \quad x \in \omega,$$

где

$$(2.34) \quad \Delta p_1(t, x) = f_2(t, x), \quad x \in \omega, \quad p_1|_{\partial\omega} = 0,$$

$$(2.35) \quad \Delta p_2(t, x) = 0, \quad x \in \omega, \quad p_2|_{\partial\omega} = p|_{\partial\omega}.$$

Как показано выше (см. (2.18)), $p|_{\partial\omega}$ корректно определено при почти всех $t \in (0, T)$. Применяя к (2.34) оценку решений эллиптических краевых задач и используя определение (2.32) правой части f_2 и (2.16), получим

$$(2.36) \quad \begin{aligned} \|\nabla p_1(t, \cdot)\|_{(L_2(\omega))^n}^2 &\leq c \|f_2(t, \cdot)\|_{H^{-1}(\omega)}^2 \\ &\leq c_1 (\|y(t, \cdot)\|_{(L_2(\omega))^n}^2 + \|\tau(t, \cdot)\|_{L_2(\omega)}^2 + \|\operatorname{div} f(t, \cdot)\|_{(H^{-1}(\omega))^n}^2). \end{aligned}$$

В силу (2.31), (2.33)

$$\nabla p_2 = \nabla p - \nabla p_1 = f_1 - \nabla p_1$$

и поэтому, учитывая (2.36), (2.16), будем иметь

$$(2.37) \quad \|\nabla p_2(t, \cdot)\|_{H^{-2}(\omega)}^2 \leq c_2 (\|y(t, \cdot)\|_{(L_2(\omega))^n}^2 + \|\tau(t, \cdot)\|_{L_2(\omega)}^2 + \|\partial_t y(t, \cdot)\|_{(L_2(\omega))^n}^2 + \|f(t, \cdot)\|_{(H^{-2}(\omega))^n}^2 + \|\operatorname{div} f(t, \cdot)\|_{H^{-1}(\omega)}^2).$$

Дифференцируя (2.35), имеем

$$\Delta \nabla p_2(t, x) = 0, \quad x \in \omega;$$

к ∇p_2 применимо утверждение следующей леммы, которую легко вывести, например, с помощью техники срезающих функций из результатов книги Ж.-Л. Лионса, Э. Мадженеса [99].

ЛЕММА 2.5. Пусть $w(x) \in H^{-2}(\omega)$ — гармоническая функция, т.е. $\Delta w(x) = 0$, $x \in \omega$, и $\omega' \Subset \omega$. Тогда

$$(2.38) \quad \|w\|_{L_2(\omega')} \leq c \|w\|_{H^{-2}(\omega)},$$

где c не зависит от w .

Применяя к ∇p_2 оценки (2.38), (2.37), получим

$$(2.39) \quad \|\nabla p_2(t, \cdot)\|_{(L_2(\omega'))^n}^2 \leq c (\|y(t, \cdot)\|_{(L_2(\omega))^n}^2 + \|\tau(t, \cdot)\|_{L_2(\omega)}^2 + \|\partial_t y(t, \cdot)\|_{(L_2(\omega))^n}^2 + \|f(t, \cdot)\|_{(H^{-2}(\omega))^n}^2 + \|\operatorname{div} f(t, \cdot)\|_{H^{-1}(\omega)}^2).$$

Так как по предположению множество ω' является звездным относительно точки x_0 из (2.18), то в силу (2.18), (2.33), (2.36), (2.39)

$$\|p(t, \cdot)\|_{L_2(\omega')}^2 \leq c \|\nabla p\|_{(L_2(\omega'))^n}^2 \leq c_1 (\|y(t, \cdot)\|_{(L_2(\omega))^n}^2 + \|\tau(t, \cdot)\|_{L_2(\omega)}^2 + \|\partial_t y(t, \cdot)\|_{(L_2(\omega))^n}^2 + \|f(t, \cdot)\|_{(L_2(\omega))^n}^2).$$

Применяя эту оценку к правой части (2.20) и учитывая (2.29), будем иметь:

$$\begin{aligned} I(y, \tau, s) &\leq c \left(\int_0^T e^{-9s\widehat{\alpha}_\lambda/10} \left(\int_\omega (|y|^2 + |\tau|^2 + |p|^2) dx + \|f(t, \cdot)\|_{(H^{-2}(\omega))^n}^2 + \|\operatorname{div} f(t, \cdot)\|_{H^{-1}(\omega)}^2 \right) dt + \int_Q (|f|^2 + |\operatorname{div} f|^2 + |g|^2) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \right) \\ &\leq c \left(\int_{Q_\omega} (|y|^2 + |\tau|^2 + |\partial_t y|^2 + |f|^2) e^{-9s\widehat{\alpha}_\lambda/10} dx dt + \int_0^T e^{-9s\widehat{\alpha}_\lambda/10} (\|f(t, \cdot)\|_{(H^{-2}(\omega))^n}^2 + \|\operatorname{div} f(t, \cdot)\|_{H^{-1}(\omega)}^2) dt + \int_Q (|f|^2 + |\operatorname{div} f|^2 + |g|^2) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \right). \end{aligned}$$

Это доказывает (2.30).

2.3. Окончательные оценки. Избавимся теперь от члена $\partial_t u$ в правой части неравенства (2.30).

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $f, g, \widehat{v}, \widehat{\theta}$ удовлетворяют (2.19), (2.16) и, кроме того,

$$(2.40) \quad \partial_t \widehat{v} \in L_\infty(0, T; V_\infty^2(\Pi)), \quad \partial_t \widehat{\theta} \in L_\infty(0, T; W_\infty^2(\Pi)).$$

Предполагается, что для множеств ω', ω выполнены условия теоремы 2.2. Тогда существует такое $\widehat{\lambda} > 1$, что при любом $\lambda > \widehat{\lambda}$ найдется $s_0(\lambda)$ такое, что при всех $s \geq s_0(\lambda)$ решение задачи (2.9)–(2.11) удовлетворяет оценке

$$(2.41) \quad \begin{aligned} & \int_Q \frac{1}{s\varphi} (|y(t, x)|^2 + |\tau(t, x)|^2) e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} dx dt \\ & \leq c \left(\int_Q (|f(t, x)|^2 + |\operatorname{div} f|^2 + |g(t, x)|^2) e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} dx dt \right. \\ & \quad + \int_{Q^\omega} (|f(t, x)|^2 + |y(t, x)|^2 + |\tau(t, x)|^2) e^{-9s\widehat{\alpha}_\lambda(t)/10} dx dt \\ & \quad \left. + \|y(T/2, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(T/2, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2 \right), \end{aligned}$$

где $c > 0$ не зависит от f, g, y, τ, s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функции

$$(2.42) \quad \begin{aligned} \tilde{y}(t, x) &= \int_{T/2}^t y(s, x) ds, \quad \tilde{\tau}(t, x) = \int_{T/2}^t \tau(s, x) ds, \quad \tilde{p}(t, x) = \int_{T/2}^t p(s, x) ds, \\ \tilde{f}(t, x) &= \int_{T/2}^t f(s, x) ds, \quad \tilde{g}(t, x) = \int_{T/2}^t g(s, x) ds. \end{aligned}$$

Интегрируя уравнения (2.9), (2.10) по времени от $T/2$ до t , получим, что функции (2.42) удовлетворяют соотношениям:

$$(2.43) \quad \begin{aligned} -\partial_t \tilde{y} - \Delta \tilde{y} + \nabla \tilde{p} &= \tilde{f} - y(T/2, x) \\ &+ \int_{T/2}^t ((\widehat{v}(s, x), \nabla) y(s, x) - ((y, \nabla), \widehat{v})^*(s, x) - \tau(s, x) \nabla \widehat{\theta}(s, x)) ds = 0, \end{aligned}$$

$$(2.44) \quad -\partial_t \tilde{\tau} - \Delta \tilde{\tau} + (\vec{e}, \tilde{y}) = \tilde{g} + \int_{T/2}^t (\nabla \tau(s, x), \widehat{v}(s, x)) ds - \tau(T/2, x).$$

Преобразуем интегралы в уравнениях (2.43), (2.44). Интегрируя по частям, имеем:

$$\int_{T/2}^t (\nabla \tau(s, x), \widehat{v}(s, x)) ds = (\nabla \tilde{\tau}(t, x), \widehat{v}(t, x)) - \int_{T/2}^t (\nabla \tilde{\tau}(s, x), \partial_s \widehat{v}(s, x)) ds;$$

точно так же доказываются равенства

$$\begin{aligned}\int_{T/2}^t (\widehat{v}, \nabla) y \, ds &= (\widehat{v}(t, x), \nabla) \tilde{y}(t, x) - \int_{T/2}^t (\partial_t \widehat{v}(s, x), \nabla) \tilde{y} \, ds, \\ \int_{T/2}^t ((y, \nabla) \widehat{v})^* \, ds &= ((\tilde{y}(t, x), \nabla) \widehat{v}(t, x))^* - \int_{T/2}^t ((\tilde{y}, \nabla) \partial_s \widehat{v})^* \, ds, \\ \int_{T/2}^t \tau \nabla \widehat{\theta} \, ds &= \tilde{\tau}(t, x) \nabla \widehat{\theta}(t, x) - \int_{T/2}^t \tilde{\tau} \partial_s \nabla \widehat{\theta} \, ds.\end{aligned}$$

Подставляя эти равенства в (2.43), (2.44), получим, что $\tilde{y}$, $\tilde{\tau}$, $\tilde{p}$ удовлетворяют уравнениям (2.9), (2.10), в которых правые части f , g заменены, соответственно, на

$$(2.45) \quad F = \tilde{f} - y(T/2, x) - \int_{T/2}^t ((\partial_s \widehat{v}, \nabla) \tilde{y} - ((\tilde{y}, \nabla) \partial_t \widehat{v})^* - \tilde{\tau} \nabla \partial_s \widehat{\theta}) \, ds,$$

$$(2.46) \quad G = \tilde{g} - \int_{T/2}^t (\nabla \tilde{\tau}, \partial_s \widehat{v}) \, ds - \tau(T/2, x).$$

Применяя к этим уравнениям теорему 2.2, получим следующий аналог оценки (2.30):

$$\begin{aligned}(2.47) \quad I(\tilde{y}, \tilde{\tau}, s) &\leq c \left(\int_Q (|F(t, x)|^2 + |\operatorname{div} F(t, x)|^2 + |G(t, x)|^2) e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} \, dx \, dt \right. \\ &\quad + \int_0^T e^{-9s\widehat{\alpha}_\lambda/10} (\|F(t, \cdot)\|_{(H^{-2}(\omega))^n}^2 + \|\operatorname{div} F(t, \cdot)\|_{H^{-1}(\omega)}^2) \, dt \\ &\quad \left. + \int_{Q^\omega} (|\tilde{y}|^2 + |\tilde{\tau}|^2 + |\tilde{y}_t|^2) e^{-9s\widehat{\alpha}_\lambda/10} \, dx \, dt \right).\end{aligned}$$

Для функции $h(t, x)$ положим

$$\tilde{h}(t, x) = \int_{T/2}^t h(\xi, x) \, d\xi.$$

Докажем неравенство

$$(2.48) \quad \int_Q |\tilde{h}(t, x)|^2 e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} \, dx \, dt \leq c \int_Q |h(t, x)|^2 e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} \, dx \, dt,$$

где c не зависит от h и s . Применяя неравенство Коши–Буняковского, а затем теорему Фубини, получим:

$$\begin{aligned}\int_Q |\tilde{h}(t, x)|^2 e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} \, dx \, dt &\leq c \left(\int_0^{T/2} \int_\Pi \int_t^{T/2} |h(\xi, x)|^2 \, d\xi \, e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} \, dx \, dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{T/2}^T \int_\Pi \int_{T/2}^t |h(\xi, x)|^2 \, d\xi \, e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} \, dx \, dt \right) \\ &= c \left(\int_0^{T/2} \int_\Pi |h(\xi, x)|^2 \int_0^\xi e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} \, dt \, dx \, d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{T/2}^T \int_\Pi |h(\xi, x)|^2 \left(\int_\xi^T e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} \, dt \right) \, dx \, d\xi \right) \\ &\leq c_1 \int_Q |h(t, x)|^2 e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} \, dx \, ds,\end{aligned}$$

причем последнее неравенство вытекает из определения (2.4) функции α_λ и того, что функция $\gamma(t)$ монотонно растет при $t \in (0, T/2)$ и монотонно убывает при $t \in (T/2, T)$. Итак, (2.48) доказано.

В силу (2.48)

$$(2.49) \quad \int_Q (|F|^2 + |\operatorname{div} F|^2) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \leq c \left(\int_Q |f|^2 e^{-s\alpha_\lambda} dx dt + \int_\Pi |y(T/2, x)|^2 e^{-s\alpha_\lambda(T/2, x)} dx + \int_Q (|\nabla \tilde{y}|^2 + |\tilde{y}|^2 + \tilde{\tau}^2) e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \right),$$

$$(2.50) \quad \int_Q |G|^2 e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \leq c \left(\int_Q |g|^2 e^{-s\alpha_\lambda} dx dt + \int_\Pi |\tau(T/2, x)|^2 e^{-s\alpha_\lambda(T/2, x)} dx + \int_Q |\nabla \tilde{\tau}|^2 e^{-s\alpha_\lambda} dx dt \right),$$

где константа c не зависит от s .

В силу бездивергентности векторного поля $\partial_t \widehat{v}$

$$\int_{T/2}^t (\partial_s \widehat{v}, \nabla) \tilde{y} ds = \sum_{j=1}^n \int_{T/2}^t \partial_j (\partial_s \widehat{v}_j, \tilde{y}) ds.$$

Поэтому из (2.45) следует, что

$$(2.51) \quad \|F(t, \cdot)\|_{(H^{-2}(\omega))^n}^2 + \|\operatorname{div} F(t, \cdot)\|_{H^{-1}(\omega)}^2 \leq c \left(\|\tilde{f}(t, \cdot)\|_{(L_2(\omega))^n}^2 + \int_{T/2}^t (\|\tilde{y}(s, \cdot)\|_{(L_2(\omega))^n}^2 + \|\tilde{\tau}(s, \cdot)\|_{L_2(\omega)}^2) ds + \|y(T/2, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 \right).$$

Оценивая правую часть неравенства (2.47) с помощью (2.49)–(2.51), будем иметь

$$(2.52) \quad I(\tilde{y}, \tilde{\tau}, s) \leq c \left(\int_Q (|f(t, x)|^2 + |\operatorname{div} f(t, x)|^2 + |g(t, x)|^2 + |\nabla \tilde{y}(t, x)|^2 + |\tilde{y}(t, x)|^2 + |\nabla \tilde{\tau}(t, x)|^2 + |\tilde{\tau}(t, x)|^2) e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} dx dt + \|y(T/2, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(T/2, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2 + \int_{Q^\omega} (|\tilde{y}|^2 + |\tilde{\tau}|^2 + |\partial_t \tilde{y}|^2) e^{-9s\widehat{\alpha}_\lambda(t)/10} dx dt \right),$$

где c не зависит от s . Вспоминая определение (2.20) функционала $I(\tilde{y}, \tilde{\tau}, s)$ и переносим влево члены с $|\nabla \tilde{y}(t, x)|$, $|\tilde{y}(t, x)|$, $|\nabla \tilde{\tau}(t, x)|$, $|\tilde{\tau}(t, x)|$ из интеграла по Q в правой части, получим, увеличивая в случае необходимости $s_0(\lambda)$:

$$I(\tilde{y}, \tilde{\tau}, s) \leq C_1 \left(\int_Q (|f(t, x)|^2 + |\operatorname{div} f(t, x)| + |g(t, x)|^2) e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} dx dt + \|y(T/2, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(T/2, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2 + \int_{Q^\omega} (|\tilde{y}|^2 + |\tilde{\tau}|^2 + |\partial_t \tilde{y}|^2) e^{-9s\widehat{\alpha}_\lambda(t)/10} dx dt \right).$$

Заменяя в интеграле по Q^ω векторное поле $\partial_t \tilde{y}$ на y и оценивая члены с $|\tilde{y}|$ и $|\tilde{\tau}|$ с помощью очевидного аналога неравенства (2.48), получим (2.44).

Освободимся теперь от членов с $y(T/2, \cdot)$, $\tau(T/2, \cdot)$ в правой части (2.41).

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть выполнены условия теоремы 2.3 и $\widehat{\lambda}$, $s_0(\lambda)$ определены в теореме 2.3. Тогда решение задачи (2.9)–(2.11) удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned}
 (2.53) \quad & \int_Q \frac{1}{s\varphi} (|y(t, x)|^2 + |\tau(t, x)|^2) e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} dx dt \\
 & + \|y(T/2, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(T/2, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2 \\
 & \leq c \left(\int_Q (|f(t, x)|^2 + |\operatorname{div} f(t, x)|^2 + |g(t, x)|^2) e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} dx dt \right. \\
 & \quad \left. + \int_{Q^\omega} (|\tau(t, x)|^2 + |f(t, x)|^2 + |y(t, x)|^2) e^{-9s\widehat{\alpha}_\lambda(t)/10} dx dt \right) \quad \forall s \geq s_0(\lambda),
 \end{aligned}$$

где c не зависит от f, g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho(t) \in C^\infty(T/2, 3T/4)$, $\rho(T/2) = 1$, $\rho(3T/4) = 0$ и (y, p, τ) – решение системы (2.9), (2.10). Тогда, очевидно, тройка $(\rho y, \rho p, \rho \tau)$ удовлетворяет системе (2.9), (2.10) при $(t, x) \in (T/2, 3T/4) \times \Pi$, в которой правые части f, g заменены на $\rho f + y \partial_t \rho$ и $\rho g + \tau \partial_t \rho$ соответственно. Кроме того, при $t = 3T/4$ ρy и $\rho \tau$ удовлетворяют нулевым начальным условиям. Поэтому в силу леммы 2.4 и теоремы о следах справедливо неравенство:

$$\begin{aligned}
 (2.54) \quad & \|y(T/2, \cdot)\|_{V^1(\Pi)}^2 + \|\tau(T/2, \cdot)\|_{H^1(\Pi)}^2 \\
 & \leq c \left(\|f\|_{L_2((\frac{T}{2}, \frac{3T}{4}) \times \Pi)}^2 + \|g\|_{L_2((\frac{T}{2}, \frac{3T}{4}) \times \Pi)}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \|y\|_{L_2((\frac{T}{2}, \frac{3T}{4}) \times \Pi)}^2 + \|\tau\|_{L_2((\frac{T}{2}, \frac{3T}{4}) \times \Pi)}^2 \right) \\
 & \leq c_s \left(\int_{T/2}^{3T/4} \int_\Pi \left[(|f|^2 + |g|^2) + \frac{1}{s\varphi} (|y|^2 + |\tau|^2) \right] e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} dx dt \right),
 \end{aligned}$$

причем последнее из неравенств справедливо потому, что при $t \in (T/2, 3T/4)$ функции $s\varphi$ и $e^{-s\alpha_\lambda(t, x)}$ ограничены сверху и снизу положительными константами, зависящими от s, λ , но не зависящими от t, x . Умножим обе части (2.54) на $(2c_s)^{-1}$ и сложим с (2.41). Переносим в полученном неравенстве член

$$\frac{1}{2} \int_{T/2}^{3T/4} \int_\Pi \frac{1}{s\varphi} (|y|^2 + |\tau|^2) e^{-\alpha_\lambda(t, x)} dx dt$$

из правой в левую часть, будем иметь оценку

$$\begin{aligned}
 (2.55) \quad & \int_Q \frac{1}{\varphi} (|y|^2 + |\tau|^2) e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} dx dt + \|y(T/2, \cdot)\|_{V^1(\Pi)}^2 + \|\tau(T/2, \cdot)\|_{H^1(\Pi)}^2 \\
 & \leq c_1 \left(\int_Q (|f|^2 + |\operatorname{div} f|^2 + |g|^2) e^{-s\alpha_\lambda(t, x)} dx dt \right. \\
 & \quad \left. + \int_{Q^\omega} (|f|^2 + |y|^2 + |\tau|^2) e^{-9s\widehat{\alpha}_\lambda(t)/10} dx dt \right. \\
 & \quad \left. + \|y(T/2, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(T/2, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Покажем, что из (2.55) следует неравенство (2.53). Допустим противное. Тогда существует последовательность наборов $(y_k, \nabla p_k, \tau_k, f_k, g_k)$, которые при каждом k удовлетворяют системе (2.9), (2.10), и согласно доказанному выше для каждого набора справедлива оценка (2.55). При этом при подстановке (y_k, τ_k, f_k, g_k) в (2.53) левая часть этого неравенства равна 1, а правая часть стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Поэтому, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что

$$(2.56) \quad (y_k, \tau_k) \rightarrow (\hat{y}, \hat{\tau}) \text{ слабо в пространстве }^2 (L_2(Q, e^{-s\alpha_\lambda}/(s\varphi)))^{n+1},$$

$$(2.57) \quad (f_k, g_k) \rightarrow (\hat{f}, \hat{g}) \equiv (0, 0) \text{ в } (L_2(Q, e^{-s\alpha_\lambda}))^{n+1},$$

$$(2.58) \quad \int_{Q^\omega} (|y_k|^2 + |\tau_k|^2 + |f_k|^2) e^{-9s\hat{\alpha}_\lambda(t)/10} dx dt \\ \rightarrow 0 \equiv \int_{Q^\omega} (|\hat{y}|^2 + |\hat{\tau}|^2 + |\hat{f}|^2) e^{-9s\hat{\alpha}_\lambda(t,x)/10} dx dt,$$

$$(2.59) \quad (y_k(T/2, \cdot), \tau_k(T/2, \cdot)) \rightarrow (\hat{y}(T/2, \cdot), \hat{\tau}(T/2, \cdot)) \text{ слабо в } V^1(\Pi) \times H^1(\Pi),$$

и, следовательно, в силу компактности вложения $V^1(\Pi) \times H^1(\Pi) \Subset V^0(\Pi) \times H^0(\Pi)$

$$(2.60) \quad (y_k(T/2, \cdot), \tau_k(T/2, \cdot)) \rightarrow (\hat{y}(T/2, \cdot), \hat{\tau}(T/2, \cdot)) \text{ в } V^0(\Pi) \times H^0(\Pi).$$

Так как левые части неравенств (2.53), (2.55) совпадают, то, подставляя в (2.55) (y_k, τ_k, f_k, g_k) и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим неравенство

$$(2.61) \quad 1 \leq c_1 (\|\hat{y}(T/2, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\hat{\tau}(T/2, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2).$$

Очевидно, существует такое $\hat{p}$, что набор $(\hat{y}, \nabla \hat{p}, \hat{\tau})$ является слабым решением системы (2.9), (2.10) с $f = 0, g = 0$. В силу теоремы о гладкости слабых решений системы (2.9), (2.10), которые доказываются методами, близкими к использованным при доказательстве леммы 2.4, при любом $\varepsilon > 0$

$$(2.62) \quad \hat{y} \in V^{1,2}((0, T - \varepsilon) \times \Pi), \quad \hat{\tau} \in H^{1,2}((0, T - \varepsilon) \times \Pi).$$

С другой стороны, в силу (2.58) $(\hat{y}, \hat{\tau}) \equiv 0$ в Q^ω и, следовательно, согласно следствию 2.1

$$(\hat{y}, \hat{\tau})|_Q \equiv 0,$$

что противоречит (2.61).

Вместо $\alpha_\lambda, \hat{\alpha}_\lambda$ введем теперь следующие функции:

$$(2.63) \quad \eta \equiv \eta(t, x) \equiv s_0(\hat{\lambda}) \frac{e^{\hat{\lambda}^2 \|\psi\|_{C(\Pi)}} - e^{\hat{\lambda} \psi(x)}}{T - t}, \quad \hat{\eta}(t) = \frac{9}{10} s_0(\hat{\lambda}) \frac{\hat{\alpha}(t) \gamma(t)}{T - t},$$

где ψ — функция из леммы 2.1, $\hat{\alpha}(t)$ определены в (2.29), а $s_0(\hat{\lambda}), \hat{\lambda}$ — числа из теоремы 2.4. Докажем теперь аналог оценки (2.53), в котором функция α_λ заменена на η .

² Здесь $L_2(e^{-s\alpha_\lambda}/(s\varphi), Q)$ — это пространство L_2 с весом, т.е. пространство с нормой

$$\|z\|_{L_2(e^{-s\alpha_\lambda}/(s\varphi), Q)}^2 = \int_Q z^2 e^{-s\alpha_\lambda}/(s\varphi) dx dt.$$

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть выполнены условия теоремы 2.3 и функции $\eta, \hat{\eta}$ определены в (2.63). Тогда решение задачи (2.9)–(2.11) удовлетворяет оценке:

$$(2.64) \quad J(y, \tau) \equiv \int_Q (T-t)(|y(t, x)|^2 + |\tau(t, x)|^2) e^{-\eta(t, x)} dx dt \\ + \|y(0, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(0, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2 \\ \leq c \left(\int_Q (|f(t, x)|^2 + |\operatorname{div} f(t, x)|^2 + |g(t, x)|^2) e^{-\eta(t, x)} dx dt \right. \\ \left. + \int_{Q^\omega} (|f(t, x)|^2 + |\tau(t, x)|^2 + |y(t, x)|^2) e^{-9\hat{\eta}(t)/10} dx dt \right),$$

где c не зависит от f, g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определений (2.3), (2.4), (2.63) функций $\gamma(t), \alpha_\lambda(t, x), \eta(t, x)$ справедливо равенство

$$s_0(\hat{\lambda})\alpha_{\hat{\lambda}}(t, x) \equiv \eta(t, x) \quad \text{при } t \in (3T/4, T).$$

В силу этого равенства и вследствие ограниченности сверху и снизу функций $\eta(t, x), \alpha_\lambda(t, x)$ при $t \in (T/2, T - T_0)$ верна оценка

$$(2.65) \quad \int_{T/2}^T \int_\Pi (T-t)(|y|^2 + |\tau|^2) e^{-\eta(t, x)} dx dt \\ \leq c \int_{T/2}^T \int_\Pi (T-t)(|y|^2 + |\tau|^2) e^{-s_0(\hat{\lambda})\alpha_{\hat{\lambda}}(t, x)} dx dt.$$

Используя ограниченность сверху и снизу функций $(T-t), \eta(t, x)$ на множестве $(0, T/2) \times \Pi$ и применяя энергетическое неравенство (2.13), получим:

$$(2.66) \quad \int_0^{T/2} \int_\Pi (|y|^2 + |\tau|^2) e^{-\eta(t, x)} dx dt + \|y(0, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(0, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2 \\ \leq c \sup_{0 \leq t \leq T/2} (\|y(t, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(t, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2) \\ \leq c (\|y(T/2, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(T/2, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2 \\ + \|f\|_{L_2(0, T/2; V^0(\Pi))}^2 + \|g\|_{L_2(0, T/2; H^0(\Pi))}^2) \\ \leq c_1 \left(\|y(T/2, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(T/2, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2 \right. \\ \left. + \int_0^{T/2} \int_\Pi (|f|^2 + |g|^2) e^{-\eta(t, x)} dx dt \right).$$

Складывая неравенства (2.65), (2.66) и применяя к правой части полученного неравенства оценку (2.53), получим, учитывая ограниченность сверху и снизу функций

$(T - t)$, $\eta(t, x)$ при $(t, x) \in (0, T/2) \times \Pi$, что справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} & \int_Q (|y|^2 + |\tau|^2) e^{-\eta(t, x)} dx dt + \|y(0, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(0, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2 \\ & \leq c \left(\int_Q \frac{1}{s_0 \varphi} (|y|^2 + |\tau|^2) e^{-s_0(\widehat{\lambda}) \alpha_{\widehat{\lambda}}} dx dt \right. \\ & \quad \left. + (\|y(T/2, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(T/2, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2) + \int_Q (|f|^2 + |g|^2) e^{-\eta} dx dt \right) \\ & \leq c \left(\int_Q (|f|^2 + |\operatorname{div} f|^2 + |g|^2) e^{-\eta} dx dt + \int_{Q^\omega} (|f|^2 + |g|^2 + |y|^2) e^{-\widehat{\eta}} dx dt \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 3. Разрешимость задачи точной управляемости для линеаризованной системы Буссинеска

3.1. Постановка задачи. Линеаризируем систему уравнений Буссинеска (1.26), (1.27) в точке $\widehat{v}, \widehat{p}, \widehat{\theta}$:

(3.1)

$$N'(\widehat{v}, \widehat{\theta})(y, \tau) \equiv \partial_t y - \Delta y + (\widehat{v}, \nabla) y + (y, \nabla) \widehat{v} + \tau \vec{e} = -\nabla p + f + u', \quad \operatorname{div} y = 0,$$

(3.2)

$$R'(\widehat{v}, \widehat{\theta})(y, \tau) \equiv \partial_t \tau - \Delta \tau + (\widehat{v}, \nabla \tau) + (y, \nabla \widehat{\theta}) = g + u_{n+1}.$$

Система (3.1), (3.2) рассматривается, как и (1.26), (1.27), при периодических граничных условиях, т.е. $y = y(t, x)$, $\tau = \tau(t, x)$, где $(t, x) \in Q \equiv (0, T) \times \Pi$, а Π — n -мерный тор ($n = 2, 3$). Зададим для уравнений (3.1), (3.2) начальные условия

$$(3.3) \quad y(t, x)|_{t=0} = y_0(x), \quad \tau(t, x)|_{t=0} = \tau_0(x).$$

ЛЕММА 3.1. Пусть $(\widehat{v}, \widehat{\theta}) \in L_\infty(0, T; V_\infty^1(\Pi)) \times L_\infty(0, T; W_\infty^1(\Pi))$. Тогда для любых $y_0 \in V^1(\Pi)$, $\tau_0 \in H^1(\Pi)$, $f \in (L^2(Q))^n$, $g \in L^2(Q)$ и любой функции $u \in U(\omega) \subset (L^2(Q))^{n+1}$ существует единственное решение задачи (3.1)–(3.3) $(y, \tau, \nabla p) \in V^{1,2}(Q) \times H^{1,2}(Q) \times (L^2(Q))^n$, и это решение удовлетворяет оценке

$$(3.4) \quad \|y\|_{V^{1,2}(Q)}^2 + \|\tau\|_{H^{1,2}(Q)}^2 + \|\nabla p\|_{(L^2(Q))^n}^2 \leq c(\|y_0\|_{V^1(\Pi)}^2 + \|\tau_0\|_{H^1(\Pi)}^2 + \|f\|_{(L^2(Q))^n}^2 + \|g\|_{L^2(Q)}^2 + \|u\|_{(L^2(Q))^{(n+1)}}^2).$$

Эта лемма доказывается так же, как лемма 2.4.

Поставим для системы уравнений (3.1), (3.2) задачу управляемости, наложив помимо (3.3) следующие условия в момент времени T :

$$(3.5) \quad y(T, x) \equiv 0, \quad \tau(T, x) \equiv 0.$$

При этом искомыми функциями являются не только $(y, \tau, \nabla p)$, но также и управление $u = (u', u_{n+1})$.

Для точной постановки задачи управляемости введем необходимые функциональные пространства для исходных данных и решений задачи (3.1)–(3.3), (3.5).

Пусть, как и раньше, $\omega \subset \Pi$ – подобласть тора Π ,

$$\chi_\omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{\omega}, \\ 0, & x \in \omega, \end{cases}$$

– характеристическая функция множества ω . Введем весовые функции

$$(3.6) \quad \rho_1(t, x) = e^{\widehat{\eta}(t)} \chi_\omega(x) + \frac{e^{\eta(t, x)}}{T - t} (1 - \chi_\omega(x)),$$

$$(3.7) \quad \rho(t) = e^{\widehat{\eta}(t)},$$

где $\eta(t, x)$, $\widehat{\eta}(t)$ – функции, определенные в (2.63).

Пусть

$$(3.8) \quad L_2(\rho, Q) = \left\{ y(t, x) \in L_2(Q) : \|y\|_{L_2(\rho, Q)}^2 = \int_Q \rho y^2 dx dt < \infty \right\}.$$

Аналогично определяется пространство $L_2(\rho_1, Q)$.

Введем пространство правых частей для уравнения (3.1):

$$(3.9) \quad F(Q) = \left\{ f \in L_2(0, T; (L_2(\Pi))^n) : \exists f_1 \in (L_2(\rho_1, Q))^n \text{ и } \exists f_2 \in L_2(0, T; H^1(\Pi)) \right. \\ \left. \text{такие, что } f = f_1 + \nabla f_2; \|f\|_{F(Q)} = \inf_{f = f_1 + \nabla f_2} (\|f_1\|_{(L_2(\rho_1, Q))^n}^2 + \|f_2\|_{L_2(0, T; H^1(\Pi))}^2)^{1/2} \right\}.$$

Пространство решений системы (3.1), (3.2) определим следующим образом:

$$(3.10) \quad \Theta = \left\{ (y, \tau) \in V^{1,2}(Q) \times H^{1,2}(Q) : L(y, \tau) \in F(Q) \times L_2(\rho_1, Q), \right. \\ \left. ye^{9\widehat{\eta}/21} \in V^{1,2}(Q), \tau e^{9\widehat{\eta}/21} \in H^{1,2}(Q) \right\},$$

где $L(y, \tau) = (N'(\widehat{v}, \widehat{\theta})(y, \tau), R'(\widehat{v}, \widehat{\theta})(y, \tau))$, а N', R' – операторы из (3.1), (3.2). Норма пространства Θ определяется равенством:

$$(3.11) \quad \|(y, \tau)\|_\Theta^2 = \|L(y, \tau)\|_{F(Q) \times L_2(\rho_1, Q)}^2 + \|ye^{\frac{9}{21}\widehat{\eta}}\|_{V^{1,2}(Q)}^2 + \|\tau e^{\frac{9}{21}\widehat{\eta}}\|_{H^{1,2}(Q)}^2.$$

Пространство управлений определим формулой:

$$(3.12) \quad U(\rho, \omega) = \{u = (u', u_{n+1}) \in (L_2(\rho, Q))^{n+1}, \text{supp } u \subset Q^\omega = (0, T) \times \omega\}.$$

Основным утверждением этого параграфа является

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $(\widehat{v}, \widehat{\theta}) \in W_\infty^1(0, T; V_\infty^2(\Pi)) \times W_\infty^1(0, T; W_\infty^2(\Pi))$. Тогда для любых $y_0 \in V^1(\Pi)$, $\tau_0 \in H^1(\Pi)$, $f \in F(Q)$, $g \in L_2(\rho_1, Q)$ существует решение $(y, p, \tau, u) \in V^{1,2}(Q) \times L_2(0, T; H^1(\Pi)) \times H^{1,2}(Q) \times U(\rho, \omega)$ задачи (3.1)–(3.3), (3.5).

Доказательству этой теоремы посвящена оставшаяся часть этого параграфа.

3.2. Вспомогательная экстремальная задача. Для доказательства теоремы 3.1 мы применим некоторый вариант метода штрафов. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(3.13) \quad J_k(y, \tau, u) = \frac{1}{2} \int_Q \rho(t)(|y|^2 + \tau^2) dx dt + \frac{1}{2} \int_Q m_k(t, x)|u|^2 dx dt \rightarrow \inf,$$

$$(3.14) \quad L(y, \tau) = (-\nabla p + f + u', g + u_{n+1}), \quad \operatorname{div} y = 0,$$

$$(3.15) \quad y(t, x)|_{t=0} = y_0(x), \quad \tau(t, x)|_{t=0} = \tau_0(x),$$

где $L(y, \tau) = (N'(\widehat{v}, \widehat{\theta})(y, \tau), R'(\widehat{v}, \widehat{\theta})(y, \tau))$, а операторы N' и R' определены в (3.1), (3.2) соответственно. При этом функция $\rho(t)$ определена в (3.7), а $m_k(t, x)$ задается формулой

$$(3.16) \quad m_k(t, x) = \chi_\omega(x) e^{\frac{T-t}{T-t+1/k} \widehat{\eta}} + (1 - \chi_\omega(x))k,$$

где $\chi_\omega(x)$ – характеристическая функция множества ω , $\widehat{\eta}(t)$ – функция из (2.63), k – натуральное число.

ЛЕММА 3.2. Пусть $f \in (L_2(\rho_1, Q))^n$, $g \in L_2(\rho_1, Q)$, $y_0 \in V^1(\Pi)$, $\tau_0 \in H^1(\Pi)$. При любом натуральном k существует единственное решение $(y, \tau, \nabla p, u) \in V^{1,2}(Q) \times H^{1,2}(Q) \times L_2(0, T; (L_2(\Pi))^n \times (L_2(Q))^{n+1})$ задачи (3.13)–(3.15). При этом $(y, \tau) \in (L_2(\rho, Q))^n \times L_2(\rho, Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что допустимым элементом задачи (3.13)–(3.15) называется набор $(y, \tau, \nabla p, u) \in V^{1,2}(Q) \times H^{1,2}(Q) \times (L_2(Q))^n \times (L_2(Q))^{n+1}$, удовлетворяющий соотношениям (3.14), (3.15) и для которого конечен функционал из (3.13). Множество допустимых элементов обозначим буквой $\mathcal{A}$. Пусть $(y, \tau, \nabla p) \in V^{1,2}(Q) \times H^{1,2}(Q) \times (L_2(Q))^n$ является решением задачи (3.1)–(3.3) с $u \equiv 0$, а $\mu(t) \in C^\infty[0, T]$ – функция, равная единице в окрестности нуля и нулю в окрестности T . Пусть $u(t, x) = \left(\frac{d\mu}{dt} y - f + \mu f, \frac{d\mu}{dt} \tau - g + \mu g \right)$. Тогда четверка функций $(\mu(t)y, \mu(t)\tau, \mu(t)p, u) \in \mathcal{A}$.

Так как $\mathcal{A} \neq \emptyset$, существует последовательность $(y_m, \tau_m, \nabla p_m, u_m) \in \mathcal{A}$, минимизирующая функционал J_k :

$$(3.17) \quad J_k(y_m, \tau_m, \nabla p_m, u_m) \rightarrow \inf_{(y, \tau, \nabla p, u) \in \mathcal{A}} J_k(y, \tau, \nabla p, u).$$

Из (3.17) и оценки (3.4) следует, что

$$\|y_m\|_{(V^{1,2}(Q) \cap (L_2(\rho, Q))^n)} + \|\tau_m\|_{H^{1,2}(Q) \cap L_2(\rho, Q)} + \|\nabla p_m\|_{(L_2(Q))^n} + \|u_m\|_{(L_2(Q))^{n+1}} \leq c,$$

где c не зависит от m . Поэтому из минимизирующей последовательности можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся в $(V^{1,2}(Q) \cap (L_2(\rho, Q))^n) \times (H^{1,2}(Q) \cap L_2(\rho, Q)) \times (L_2(Q))^n \times (L_2(Q))^{n+1}$ к некоторому набору функций $(\widehat{y}, \widehat{\tau}, \nabla \widehat{p}, \widehat{u})$. Легко видеть, что этот набор является решением задачи (3.13)–(3.15). Единственность решения этой задачи обычным образом выводится из строгой выпуклости функционала (3.13).

Выведем систему оптимальности для задачи (3.13)–(3.15).

ЛЕММА 3.3. Пусть выполнены условия леммы 3.2 и $(y_k, \tau_k, \nabla p_k, u_k) \in (V^{1,2}(Q) \cap (L_2(\rho, Q))^n) \times (H^{1,2}(Q) \cap L_2(\rho, Q)) \times (L_2(Q))^n \times (L_2(Q))^{n+1}$ – решение задачи (3.13)–(3.15). Тогда существует набор $(z_k, r_k, \nabla q_k) \in L_2(0, T; V^0(\Pi)) \times L_2(Q) \times (L_2(Q))^n$ такой, что

$$(3.18) \quad L(y_k, \tau_k) = (-\nabla p_k + f + u'_k, g + u_{k,n+1}), \quad y_k(0, x) = y_0(x), \quad \tau_k(0, x) = \tau_0(x),$$

$$(3.19) \quad L^*(z_k, r_k) = (\nabla q_k - \rho y_k, -\rho \tau_k) \quad \text{в } Q,$$

$$(3.20) \quad (z_k, r_k) - m_k u_k = 0 \quad \text{в } Q,$$

где

$$L^*(z_k, r_k) = (N^*(z_k, r_k), R^*(z_k, r_k)),$$

а операторы N^* и R^* определены в (2.9), (2.10). При этом для (z_k, r_k) выполнена оценка

$$(3.21) \quad \int_Q (T-t)(|z_k|^2 + |r_k|^2)e^{-\eta} dx dt + \|z_k(0, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|r_k(0, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2 \\ \leq C_2 \int_Q \rho^2(|y_k|^2 + |\tau_k|^2)e^{-\eta} dx dt + \int_{Q^\omega} (m_k^2|u_k|^2 + \rho^2|y_k|^2)e^{-\hat{\eta}} dx dt,$$

где C_2 не зависит от (y_k, τ_k, u_k) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (3.18) справедливы в силу (3.14), (3.15).

Для вывода (3.19), (3.20) воспользуемся принципом Лагранжа для абстрактной гладкой задачи вида

$$(3.22) \quad J(x) \rightarrow \inf, \quad Fx = 0,$$

где $J: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ – непрерывно дифференцируемый функционал, а $F: X \rightarrow Z$ – линейный непрерывный оператор в гильбертовых пространствах X, Z . Как показано в книгах В. М. Алексеева, В. М. Тихомирова, С. В. Фомина [2] и А. В. Фурсикова [30], если $\hat{x}$ – локальный экстремум задачи (3.22), а оператор F действует на Z , то существует $z \in Z^* = Z$ такой, что функционал Лагранжа $\mathcal{L}(x, z) = J(x) + (Fx, z)_Z$ удовлетворяет равенству

$$(3.23) \quad \mathcal{L}'_x(\hat{x}, z)[h] = 0 \quad \forall h \in X.$$

В случае задачи (3.13)–(3.15) $x = (y, \tau, \nabla p, u)$, $X = (V^{1,2}(Q) \cap (L_2(\rho, Q))^n) \times (H^{1,2}(Q) \cap L_2(\rho, Q)) \times L_2(0, T; \nabla H^1(\Pi)) \times (L_2(Q))^{n+1}$, где $\nabla H^1(\Pi) = \{\nabla p(x), p \in H^1(\Pi)\}$, $J(x) = J_k(y, \tau, u)$ – функционал из (3.13), $Z = (L_2(Q))^{n+1} \times V^1(\Pi) \times H^1(\Pi)$, $F(x) = (L(y, \tau) - (\nabla p, 0) - u, y|_{t=0}, \tau|_{t=0})$, где $L(y, \tau)$ – оператор (3.14). Для доказательства сюръективности оператора $F: X \rightarrow Z$ установим разрешимость оператора

$$(3.24) \quad L(y, \tau) - (\nabla p, 0) - u = (f, g), \quad y|_{t=0} = \tilde{y}_0, \quad \tau|_{t=0} = \tilde{\tau}_0$$

для любых $(f, g, \tilde{y}_0, \tilde{\tau}_0) \in (L_2(\rho_1, Q))^{n+1} \times V^1(\Pi) \times H^1(\Pi)$. Действительно, подставив произвольный набор $(y, \tau) \in (V^{1,2}(Q) \cap (L_2(\rho, Q))^n) \times (H^{1,2}(Q) \cap L_2(\rho, Q))$, удовлетворяющий (3.24₂), (3.24₃), в (3.24₁), найдем из этого равенства u , считая $p = 0$.

Очевидно $u = (u', u_{n+1}) \in (L_2(Q))^{n+1}$. Таким образом, к задаче (3.13)–(3.15) можно применить принцип Лагранжа. Функция Лагранжа в этом случае имеет вид

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(y, \tau, \nabla p, u, z, r, \phi_1, \phi_2) = & J_k(y, \tau, u) \\ & + \int_Q [N'(\hat{v}, \hat{\theta})(y, \tau) \cdot z + R'(\hat{v}, \hat{\theta})(y, \tau)r - \nabla p \cdot z - u' \cdot z - u_{n+1}r] dx dt \\ & + (y(0, \cdot) - \tilde{y}_0, \phi_1)_{V^0(\Pi)} + (\tau(0, \cdot) - \tilde{\tau}_0, \phi_2)_{H^0(\Pi)}, \end{aligned}$$

где $(z, r, \phi_1, \phi_2) \in (L_2(Q))^{n+1} \times V^{-1}(\Pi) \times H^{-1}(\Pi)$ – элемент гильбертова пространства Z^* , а $(N', R') = L$ – операторы (3.1), (3.2). Применяя к функции Лагранжа (3.25) равенство (3.23), в котором дифференцирование производится по переменной $x = (y, \tau, 0, 0, 0)$, получим (3.19), а применяя (3.23) с дифференцированием по переменной $x = (0, 0, 0, u', u_{n+1})$, получим равенство (3.20). Дифференцируя функцию Лагранжа по ∇p , получаем, что $\operatorname{div} z_k = 0$. Применяя к соотношению (3.19) неравенство (2.64) с $y = z_k$, $\tau = r_k$, $\nabla p = \nabla q_k$, $f = -\rho y_k$, $g = -\rho \tau_k$, а затем в интеграле по Q^ω из правой части используя (3.20), получим неравенство (3.21).

3.3. Доказательство основного результата. Ниже мы докажем теорему 3.1 с помощью перехода к пределу при $k \rightarrow \infty$ в задаче (3.13)–(3.15). Чтобы это сделать, оценим сначала величину $J_k(y_k, \tau_k, u_k)$.

ЛЕММА 3.4. Пусть $f \in (L_2(\rho_1, Q))^n$, $f|_{Q^\omega} \equiv 0$, $g \in L_2(\rho_1, Q)$, $g|_{Q^\omega} \equiv 0$, $y_0 \in V^1(\Pi)$, $\tau_0 \in H^1(\Pi)$ и $(y_k, \tau_k, \nabla p_k, u_k)$ – решение задачи (3.13)–(3.15), построенное в лемме 3.2. Тогда существует константа $c > 0$, не зависящая от k , такая, что

$$(3.26) \quad J_k(y_k, \tau_k, u_k) \leq c(\|f\|_{(L_2(\rho_1, Q))^n}^2 + \|g\|_{L_2(\rho_1, Q)}^2 + \|y_0\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau_0\|_{H^0(\Pi)}^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (z_k, r_k) – функции, построенные в лемме 3.3 и удовлетворяющие оценке (3.21). Учитывая определения (3.16), (3.7) функций $m_k(t, x)$ и $\rho(t)$, получим, что

$$|\chi_\omega(x)m_k(t, x)e^{-\hat{\eta}}| \leq c, \quad \rho^2(t)e^{-\hat{\eta}(t)} = \rho(t), \quad \rho^2(t)e^{-\eta(t, x)} \leq c\rho(t),$$

где константа c не зависит от k .

Применяя эти соотношения к правой части неравенства (3.21) и учитывая определение (3.13) функционала J_k , легко вывести из (3.21) следующую оценку:

$$(3.27) \quad \int_Q (T-t)(|z_k|^2 + |r_k|^2)e^{-\eta} dx dt + \|z_k(0, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|r_k(0, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2 \leq c_1 J_k(y_k, \tau_k, u_k),$$

где константа c_1 не зависит от k . Умножая (3.19) на (y_k, τ_k) скалярно в $(L_2(Q))^n \times L_2(Q)$, интегрируя по частям по x и t и учитывая (3.18), получим равенство

$$\begin{aligned} & - \int_Q \rho(|y_k|^2 + |\tau_k|^2) dx dt \\ & = (z_k(0, \cdot), y_0)_{V^0(\Pi)} + (r_k(0, \cdot), \tau_0)_{L^2(\Pi)} + \int_Q ((f + u'_k, z_k) + (g + u_{n+1,k}r_k)) dx dt. \end{aligned}$$

Из этого равенства в силу (3.20) и определения (3.13) функционала J_k следует:

$$\begin{aligned} 2J_k(y_k, \tau_k, u_k) &= -(z_k(0, \cdot), y_0)_{V^0(\Pi)} - (r_k(0, \cdot), \tau_0)_{L^2(\Pi)} - \int_Q ((f, z_k) + gr_k) dx dt \\ &\leq \left(\|z_k(0, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|r_k(0, \cdot)\|_{L^2(\Pi)}^2 + \int_Q (T-t)(|z_k|^2 + |r_k|^2)e^{-\eta} dx dt \right)^{1/2} \\ &\quad \times (\|y_0\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau_0\|_{L^2(\Pi)}^2 + \|f\|_{(L_2(\rho_1, Q))^n}^2 + \|g\|_{L_2(\rho_1, Q)}^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

где ρ_1 — вес из (3.6) (здесь мы воспользовались предположением: $f|_{Q^\omega} = 0, g|_{Q^\omega} = 0$). Применяя к правой части последнего неравенства оценку (3.27), получим

$$\begin{aligned} 2J_k(y_k, \tau_k, u_k) &\leq c_1 (\|f\|_{(L_2(\rho_1, Q))^n}^2 + \|g\|_{L_2(\rho_1, Q)}^2 + \|y_0\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau_0\|_{L^2(\Pi)}^2)^{1/2} J_k^{1/2}(y_k, \tau_k, u_k). \end{aligned}$$

Отсюда следует (3.26).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Сначала предположим, что $f|_{Q^\omega} \equiv 0, g|_{Q^\omega} \equiv 0$. Рассмотрим последовательность $(y_k, \tau_k, \nabla p_k, u_k)$ решений задачи (3.13)–(3.15), когда параметр k стремится к бесконечности. Из (3.26), (3.13), (3.16) следует, что

$$(3.28) \quad \|y_k\|_{(L_2(\rho, Q))^n}^2 + \|\tau_k\|_{L_2(\rho, Q)}^2 + k \int_{Q \setminus Q^\omega} |u_k|^2 dx dt + \int_{Q^\omega} e^{\hat{\eta}} |u_k|^2 dx dt \leq c,$$

где c не зависит от k . В силу (3.28) и оценки (3.4)

$$(3.29) \quad \|y_k\|_{V^{1,2}(\Pi)}^2 + \|\tau_k\|_{H^{1,2}(\Pi)}^2 + \|\nabla p_k\|_{L_2(Q)}^2 \leq c_1,$$

где c_1 также не зависит от k . В силу (3.28), (3.29) из последовательности решений можно выбрать подпоследовательность, которую мы также обозначим через $\{(y_k, \tau_k, \nabla p_k, u_k)\}$, такую, что

$$(3.30) \quad \begin{aligned} y_k &\rightarrow \hat{y} \text{ слабо в } V^{1,2}(Q) \cap (L_2(\rho, Q))^n, \quad \tau_k \rightarrow \hat{\tau} \text{ слабо в } H^{1,2}(Q) \cap L_2(\rho, Q), \\ \nabla p_k &\rightarrow \nabla \hat{p} \text{ слабо в } (L_2(Q))^n, \quad u_k \rightarrow \hat{u} \text{ слабо в } (L_2(Q))^{n+1}. \end{aligned}$$

При этом в силу (3.28)

$$(3.31) \quad \begin{aligned} (1 - \chi_\omega(x))u_k &\rightarrow 0 \text{ в } (L_2(Q))^n, \\ \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_Q m_k |u_k(t, x)|^2 dx dt &\leq c, \end{aligned}$$

где $c > 0$ — та же константа, что и в (3.28), и, значит,

$$\int_0^{T-\varepsilon} \int_\omega e^{\hat{\eta}} |\hat{u}(t, x)|^2 dx dt \leq c \quad \forall \varepsilon > 0,$$

что немедленно влечет

$$(3.32) \quad \int_{Q^\omega} |\hat{u}(t, x)|^2 e^{\hat{\eta}} dx dt \leq c.$$

Из (3.31), (3.32) следует, что $\hat{u}(t, x) \in U(\rho, \omega)$ (см. (3.12)). Используя (3.30), перейдем к пределу при $k \rightarrow \infty$ в (3.18). В результате получим, что набор $(\hat{y}, \hat{\tau}, \nabla \hat{p}, \hat{u}) \in (V^{1,2}(Q) \cap (L_2(\rho, Q))^n) \times (H^{1,2}(Q) \cap L_2(\rho, Q)) \times (L_2(Q))^n \times U(\rho, \omega)$ удовлетворяет соотношениям (3.18), а значит, и (3.1)–(3.3). Пусть $\hat{\eta}(t)$ – функция из (3.7), определенная в (2.63). Сделав в (3.1)–(3.3) замену $\tilde{y} = e^{\frac{9\hat{\eta}}{21}} \hat{y}$, $\tilde{\tau} = e^{\frac{9\hat{\eta}}{21}} \hat{\tau}$, $\tilde{u} = e^{\frac{9\hat{\eta}}{21}} \hat{u}$, $\tilde{p} = e^{\frac{9\hat{\eta}}{21}} \hat{p}$, получим, что функции $(\tilde{y}, \tilde{\tau}, \nabla \tilde{p}, \tilde{u})$ удовлетворяют системе уравнений

$$(3.33) \quad N'(\hat{v}, \hat{\theta})(\tilde{y}, \tilde{\tau}) = \nabla \tilde{p} + e^{\frac{9\hat{\eta}}{21}} f + \tilde{u}' + \frac{9}{21} \frac{d\hat{\eta}(t)}{dt} \tilde{y}, \quad \operatorname{div} \tilde{y} = 0,$$

$$(3.34) \quad R'(\hat{v}, \hat{\theta})(\tilde{y}, \tilde{\tau}) = e^{\frac{9\hat{\eta}}{21}} g + \tilde{u}_{n+1} + \frac{9}{21} \frac{d\hat{\eta}(t)}{dt} \tilde{\tau}.$$

Выше доказано, что правая часть системы (3.33), (3.34) принадлежит пространству $L_2(0, T; V^0(\Pi)) \times L_2(0, T; H^0(\Pi))$. Поэтому по лемме 3.2 $(\tilde{y}, \tilde{\tau}, \nabla \tilde{p}) \in V^{1,2}(Q) \times H^{1,2}(Q) \times (L_2(Q))^n$. Таким образом, доказано, что в силу свойств функции ρ из (3.6) $(\hat{y}, \hat{\tau}, \nabla \hat{p}, \hat{u})$ является решением линейной задачи точной управляемости (3.1)–(3.3), (3.5) и принадлежит пространству $\Theta \times (L_2(Q))^n \times U(\rho, \omega)$. Наконец, пусть теперь (f, g) – произвольная функция из пространства $F(Q) \times L_2(\rho_1, Q)$ (см. (3.11)). Согласно определению пространства $F(Q)$ существуют $f_1 \in (L_2(\rho_1, Q))^n$ и $\nabla f_2 \in (L_2(Q))^n$ такие, что $f = f_1 + \nabla f_2$. Выше доказано, что для любых начальных данных $((1 - \chi_\omega) f_1, (1 - \chi_\omega) g, y_0, \tau_0) \in (L_2(\rho_1, Q))^{(n+1)} \times V^1(\Pi) \times H^1(\Pi)$ существует решение задачи (3.1)–(3.5) $(y, \tau, \nabla p, u) \in \Theta \times (L_2(Q))^n \times U(\rho, \omega)$. Легко видеть, что функция $(y, \tau, \nabla p - \nabla f_2, u + (\chi_\omega f, \chi_\omega g))$ является решением задачи (3.1)–(3.3), (3.5) с исходными данными (f_1, g, y_0, τ_0) .

§ 4. Локальная точная управляемость системы Буссинеска

Этот параграф посвящен доказательству теоремы 1.5. Мы будем искать решение задачи (1.26), (1.27), (1.24), (1.25) в виде

$$(4.1) \quad v(t, x) = \hat{v}(t, x) + y(t, x), \quad \theta(t, x) = \hat{\theta}(t, x) + \tau(t, x), \quad \nabla p = \nabla \hat{p} + \nabla q,$$

где $(\hat{v}, \hat{\theta}, \hat{p})$ – решение системы Буссинеска (1.26), (1.27) с $u \equiv 0$, заданное в условии теоремы 1.5. Подставляя (4.1) в (1.26), (1.27) и вычитая из полученных уравнений уравнения (1.26), (1.27) для $(\hat{v}, \nabla \hat{p}, \hat{\tau})$, мы приходим к системе для новых независимых функций $(y, \tau, \nabla q, u)$:

$$(4.2) \quad N(y, \tau, q, u) = \partial_t y - \Delta y + (\hat{v}, \nabla) y + (y, \nabla) \hat{v} + \tau \vec{e} + \nabla q + u' = 0, \quad \operatorname{div} y = 0,$$

$$(4.3) \quad R(y, \tau, u) = \partial_t \tau - \Delta \tau + (\hat{v}, \nabla \tau) + (y, \nabla \hat{\theta}) + (y, \nabla \tau) + u_{n+1} = 0,$$

$$(4.4) \quad y(0, \cdot) = v_0 - \hat{v}(0, \cdot), \quad \tau(0, \cdot) = \theta_0 - \hat{\theta}(0, \cdot),$$

$$(4.5) \quad y(T, \cdot) = 0, \quad \tau(T, \cdot) = 0.$$

Введем отображение $A(y, \tau, q, u)$ посредством формулы

$$(4.6) \quad A(y, \tau, q, u) = (N(y, \tau, q, u), R(y, \tau, q, u), y(0, \cdot), \tau(0, \cdot)).$$

Для исследования задачи (4.2)–(4.6) воспользуемся следующим вариантом теоремы о неявной функции (см. [2]).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть X, Z – банаховы пространства и $A \in C^1(X; Z)$ – непрерывно дифференцируемое отображение из X в Z . Предполагается, что для некоторых $x_0 \in X$, $z_0 \in Z$

$$(4.7) \quad A(x_0) = z_0$$

и производная $A'(x_0): X \rightarrow Z$ отображения A в точке x_0 является эпиморфизмом. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $z \in \{z \in Z : \|z - z_0\| < \varepsilon\}$ существует решение $x \in X$ уравнения $A(x) = z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Замена переменных (4.1) сводит задачу (1.24)–(1.27) к задаче (4.2)–(4.5). Разрешимость этой задачи мы докажем при малых $(v_0 - \hat{v}(0, \cdot), \theta_0 - \hat{\theta}(0, \cdot))$ с помощью теоремы 4.1. Для этого положим:

$$(4.8) \quad X = \Theta \times L_2(0, T; \nabla H^1(\Pi)) \times U(\rho, \omega),$$

$$(4.9) \quad Z = F(Q) \times L_2(\rho_1, Q) \times V^1(\Pi) \times H^1(\Pi),$$

где $L_2(\rho, Q)$, $F(Q)$, Θ , $U(\rho, \omega)$ – пространства (3.8), (3.9), (3.10), (3.12) соответственно. Определим отображение A формулами (4.6), (4.2), (4.3), а пространства X , Z посредством (4.8), (4.9). Отметим, что соотношения (4.5) будут выполняться автоматически, так как $x = (y, \tau, q, u) \in X$, где X – пространство (4.8). Положим $x_0 = (0, 0, 0, 0)$, $z_0 = (0, 0, 0, 0)$; для таких x_0, z_0 , очевидно, выполнено условие (4.7). С помощью элементарных оценок устанавливается непрерывная дифференцируемость оператора $A(x): X \rightarrow Z$. Сюръективность отображения $A'(0): X \rightarrow Z$ доказана в теореме 3.1. Таким образом, оператор (4.6), (4.2), (4.3), действующий в пространствах (4.8), (4.9), удовлетворяет всем предположениям теоремы 4.1, а значит, для него справедливо и утверждение этой теоремы. Итак, разрешимость задачи (4.2)–(4.5) при малых $(v_0 - \hat{v}(0, \cdot), \theta_0 - \hat{\theta}(0, \cdot))$ доказана, а значит, доказана и теорема 1.5.

§ 5. Аппроксимативная управляемость системы Буссинеска: сведение к случаю линейной системы специального вида

5.1. Идея доказательства. В этом и следующих параграфах будет доказана аппроксимативная управляемость системы Буссинеска (1.26), (1.27), т.е. системы

$$(5.1) \quad \partial_t v - \Delta v + (v, \nabla)v + \theta \vec{e} - \nabla p = f + u', \quad \operatorname{div} v = 0,$$

$$(5.2) \quad \partial_t \theta - \Delta \theta + (v, \nabla \theta) = g + u_{n+1},$$

где (f, g) – заданные внешние силы, а управление $u = (u', u_{n+1})$ сосредоточено в $Q^\omega = (0, T) \times \omega$. Как и ранее, система (5.1), (5.2) рассматривается в цилиндре

$Q = (0, T) \times \Pi$, где Π – n -мерный тор, $n = 2, 3$. Предполагается, что при $t = 0$ заданы начальные условия

$$(5.3) \quad v|_{t=0} = v_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0,$$

где $v_0 \in V^0(\Pi) \cap (C^{2,\alpha}(\Pi))^n$, $\theta_0 \in C^{2,\alpha}(\Pi)$ – заданные функции. Напомним, что задача аппроксимативной управляемости состоит в следующем: для любого $v_1 \in V^0(\Pi) \cap (C^{2,\alpha}(\Pi))^n$, $\theta_1 \in C^{2,\alpha}(\Pi)$ и любого $\varepsilon > 0$ построить такое управление $u = (u', u_{n+1}) \in U(\omega; 0, T)$,³ чтобы сужение решения $(v, \nabla p, \theta)$ задачи (5.1)–(5.3) при $t = T$ удовлетворяло условию:

$$(5.4) \quad \|v(T, \cdot) - v_1\|_{V^1(\Pi)}^2 + \|\theta(T, \cdot) - \theta_1\|_{H^1(\Pi)}^2 < \varepsilon^2.$$

Пусть $m(t, x) = (m_1, \dots, m_n) \in C^\infty(Q)$ – векторное поле на Q , причем

$$(5.5) \quad \operatorname{div} m(t, x) = \sum_{i=1}^n \partial_i m_i = 0, \quad (t, x) \in Q, \quad \text{и} \quad m(t, x) = \nabla \gamma(t, x), \quad (t, x) \in Q \setminus Q^\omega,$$

где $\gamma(t, x)$ – некоторая функция на $Q \setminus Q^\omega$, которая в силу (5.5) гармонична на $\Pi \setminus \omega$ для любого $t \in (0, T)$.

Мы хотим свести задачу аппроксимативной управляемости (5.1)–(5.4) к доказательству точной управляемости системы линейных уравнений первого порядка с коэффициентами, которые мы сами и выберем. Эти коэффициенты будут определяться некоторым векторным полем m вида (5.5). Будем искать решение (v, p, θ) в виде

$$(5.6) \quad v = z + m, \quad \theta = r; \quad \operatorname{div} z = 0, \quad \operatorname{div} m = 0$$

(каким при этом получится давление p , будет видно ниже). Подставив (5.6) в (5.1), (5.2), получим:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \partial_t z + (m, \nabla)z + (z, \nabla)m + (z, \nabla)z - \Delta z + \partial_t m \\ - \Delta m + (m, \nabla)m - \nabla p + r\vec{e} = f + u', \quad \operatorname{div} z = 0, \end{aligned}$$

$$(5.8) \quad \partial_t r + (m, \nabla)r + (z, \nabla)r - \Delta r = g + u_{n+1}.$$

Отметим, что основная трудность состоит в построении требуемых функций (z, r) на множестве $Q \setminus Q^\omega$. Действительно, если (z, r) построены на $Q \setminus Q^\omega$, мы продолжим (z, r) на Q^ω произвольным образом с сохранением лишь условия $\operatorname{div} z = 0$ и с предписанными значениями для (z, r) при $t = T, x \in \omega$. После этого, подставляя (z, r) в левую часть (5.7), (5.8), определим управление u .

Покажем, что в силу (5.5) выражение $\partial_t m - \Delta m + (m, \nabla)m$ на $Q \setminus Q^\omega$ является градиентом некоторой функции q_1 :

$$(5.9) \quad \partial_t m - \Delta m + (m, \nabla)m = \nabla q_1.$$

³ Пространство управлений $U(\omega; 0, T)$ определено формулой (1.28).

Действительно, в силу (5.5₂) $\partial_t m - \Delta m = \nabla(\partial_t \gamma - \Delta \gamma)$. Далее,

$$(m, \nabla)m = \sum_{j=1}^n m_j \partial_j m = \sum_{j=1}^n \partial_j \gamma \partial_j \nabla \gamma = \frac{1}{2} \nabla |\nabla \gamma|^2 \quad \text{в } Q \setminus Q^\omega.$$

В дальнейшем мы проведем сжатие временной координаты $t \rightarrow t/\delta$, за счет чего члены $(z, \nabla)z$, Δz , $r\vec{e}$, f в (5.7) и $(z, \nabla)r$, Δr , g в (5.8) окажутся малыми. Оставляя главные члены в (5.7), (5.8), получим систему:

$$(5.10) \quad \partial_t z + (m, \nabla)z + (z, \nabla)m - \nabla q = u', \quad \operatorname{div} z = 0,$$

$$(5.11) \quad \partial_t r + (m, \nabla)r = u_{n+1},$$

где $\nabla q = \nabla p - \nabla q_1$, а ∇q_1 определено в (5.9). Начальное условие для уравнений (5.10), (5.11) порождается условиями (5.3):

$$(5.12) \quad z|_{t=0} = \tilde{v}_0, \quad r|_{t=0} = \tilde{\theta}_0,$$

а условие аппроксимативной управляемости (5.4) мы заменим условием точной управляемости

$$(5.13) \quad z(T, \cdot) = \tilde{v}_1, \quad r(T, \cdot) = \tilde{\theta}_1.$$

При этом $\tilde{v}_j \in V^0(\Pi) \cap (C^\infty(\Pi))^n$, $\tilde{\theta}_j \in C^\infty(\Pi)$, $j \in \{0, 1\}$, будут выбраны близкими соответственно к v_j , θ_j , $j \in \{0, 1\}$.

Коэффициенты системы (5.10), (5.11) определяются векторным полем m , которое строится в следующей лемме.

ЛЕММА 5.1. *Существуют момент времени $T > 0$ и векторное поле $m(t, x) = (m_1, \dots, m_n) \in (C^\infty(Q))^n$, удовлетворяющее условиям (5.5), такие, что*

$$(5.14) \quad m(0, x) \equiv m(T, x) \equiv 0, \quad \left. \frac{\partial^k m(t, x)}{\partial t^k} \right|_{t=0} \equiv \left. \frac{\partial^k m(t, x)}{\partial t^k} \right|_{t=T} \equiv 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

(k – любое натуральное число), и при любом $x_0 \in \Pi$ выполнено соотношение

$$(5.15) \quad \{(t, x(t, x_0)), t \in (0, T)\} \cap Q^\omega \neq \emptyset,$$

где $x(t, x_0)$ – решение следующей задачи Коши:

$$(5.15') \quad \frac{d}{dt} x(t, x_0) = m(t, x(t, x_0)), \quad x(t, x_0)|_{t=0} = x_0.$$

При этом для любого $x_0 \in \Pi$ справедливо равенство $x(T, x_0) = x_0$. Кроме того, существуют конечное покрытие $\{\mathcal{O}_i, i = 1, \dots, k\}$ тора Π открытыми множествами $\mathcal{O}_i$ и число $\Delta > 0$ такие, что при любом i все кривые $x(t, x_0)$, $x^0 \in \mathcal{O}_i$, одновременно находятся в ω в течение некоторого временного интервала длины Δ .

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $m(t, x)$ удовлетворяет всем условиям леммы 5.1 и заданы $\tilde{v}_i \in (C^\infty(\Pi))^n \cap V^1(\Pi)$, $\tilde{\theta}_i \in C^\infty(\Pi)$, $i = 0, 1$. Тогда существует решение

$$(z, \nabla q, r, u) \in ((C^\infty(Q))^n \cap V^{1,2}(Q)) \times (C^\infty(Q))^n \times C^\infty(Q) \times (U(\omega; 0, T) \cap (C^\infty(Q))^{n+1})$$

задачи (5.10)–(5.13), при любом $k \geq 2$ и $\alpha \in (0, 1)$ удовлетворяющее неравенству

$$(5.16) \quad \begin{aligned} & \|z\|_{C^1(0,T;(C^{k,\alpha}(\Pi))^n)}^2 + \|r\|_{C^1(0,T;C^{k,\alpha}(\Pi))}^2 \\ & + \|\nabla q\|_{C(0,T;(C^{k,\alpha}(\Pi))^n)}^2 + \|u\|_{C(0,T;(C^{k,\alpha}(\Pi))^{n+1})}^2 \\ & \leq c_k \left(\sum_{j=0}^1 (\|\tilde{v}_j\|_{(C^{k,\alpha}(\Pi))^n}^2 + \|\tilde{\theta}_j\|_{C^{k,\alpha}(\Pi)}^2) \right), \end{aligned}$$

где константа c_k зависит лишь от нормы векторного поля $m(t, x)$ в пространстве $(C^{k,\alpha}(Q))^n$.

Доказательства леммы 5.1 и теоремы 5.1 будут приведены в следующем параграфе, а сейчас мы выведем из теоремы 5.1 аппроксимативную управляемость системы Буссинеска.

5.2. Аппроксимативная управляемость системы Буссинеска.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.6. Пусть заданы

$$\begin{aligned} (v_0, \theta_0) & \in (V^0(\Pi) \cap (C^{2,\alpha}(\Pi))^n) \times C^{2,\alpha}(\Pi), \\ (v_1, \theta_1) & \in (V^0(\Pi) \cap (C^{2,\alpha}(\Pi))^n) \times C^{2,\alpha}(\Pi) \end{aligned}$$

и $\varepsilon > 0$. Требуется найти такое управление $u \in U(\omega; 0, T)$, чтобы выполнялось неравенство (5.4) для решения $(v, \nabla p, \theta)$ задачи (5.1)–(5.3). Согласно теореме 5.1 существует управление $u \in U(\omega; 0, T)$ такое, что выполнены равенства (5.13) для решения $(z, \nabla q, r)$ задачи (5.10)–(5.12). По функциям $z, \nabla q, r, m, u$ построим функции

$$(5.17) \quad \begin{aligned} z_\delta(t, x) &= z\left(\frac{t}{\delta}, x\right), \quad r_\delta(t, x) = r\left(\frac{t}{\delta}, x\right), \quad m_\delta(t, x) = \frac{1}{\delta} m\left(\frac{t}{\delta}, x\right), \\ \nabla q_\delta(t, x) &= \frac{1}{\delta} \nabla q\left(\frac{t}{\delta}, x\right), \quad u_\delta(t, x) = \frac{1}{\delta} u\left(\frac{t}{\delta}, x\right), \end{aligned}$$

где $\delta > 0$ – некоторый параметр. Подставим функции (5.17) в систему (5.10), (5.11) вместо соответствующих функций $z, r, m, \nabla q, u$. В результате получим, что функции (5.17) на цилиндре $Q_{\delta T} \equiv (0, \delta T) \times \Pi$ удовлетворяют системе уравнений:

$$(5.18) \quad \partial_t z_\delta + (m_\delta, \nabla) z_\delta + (z_\delta, \nabla) m_\delta - \nabla q_\delta = u'_\delta, \quad \operatorname{div} z_\delta = 0,$$

$$(5.19) \quad \partial_t r_\delta + (m_\delta, \nabla) r_\delta = (u_{n+1})_\delta.$$

При этом соотношения (5.12), (5.13) переходят в равенства

$$(5.20) \quad z_\delta|_{t=0} = \tilde{v}_0, \quad r_\delta|_{t=0} = \tilde{\theta}_0,$$

$$(5.21) \quad z_\delta(\delta T, \cdot) = \tilde{v}_1, \quad r_\delta(\delta T, \cdot) = \tilde{\theta}_1.$$

Напомним, что, представив решение системы (5.1), (5.2) в виде (5.6), мы свели эту систему к системе (5.10), (5.11), выбросив из системы (5.1), (5.2) несколько членов, которые мы объявили малыми. Так как, очевидно, $z_\delta + m_\delta$, ∇q_δ , r_δ , u_δ не могут быть точным решением системы (5.1), (5.2), мы будем искать точное решение этой системы в следующем виде:

$$(5.22) \quad v = z_\delta + m_\delta + y, \quad \theta = r_\delta + \tau, \quad u = u_\delta - \chi_\omega \Delta m_\delta.$$

Подставим (5.22) в (5.1), (5.2) и, учитывая (5.18), (5.19), (5.9), запишем полученные равенства в виде уравнений относительно (y, τ) , определенных при $(t, x) \in Q_{\delta T}$:

$$(5.23) \quad \partial_t y - \Delta y + (y, \nabla)(y + z_\delta + m_\delta) + (z_\delta + m_\delta, \nabla)y + \tau \vec{e} - \nabla q_2 = f_1, \quad \operatorname{div} y = 0,$$

$$(5.24) \quad \partial_t \tau - \Delta \tau + (m_\delta + z_\delta + y, \nabla \tau) + (y, \nabla r_\delta) = g_1,$$

где

$$(5.25) \quad f_1 = f + \Delta z_\delta - (z_\delta, \nabla)z_\delta - z_\delta \vec{e}, \quad g_1 = g + \Delta r_\delta - (z_\delta, \nabla r_\delta),$$

$\nabla q_2 = \nabla p - \frac{1}{\delta} \nabla q_1 \left(\frac{t}{\delta}, x \right)$, а ∇q_1 определено в (5.9).

Выберем начальные и конечные условия $(\tilde{v}_j, \tilde{\theta}_j) \in (V^1(\Pi) \cap (C^\infty(\Pi))^n) \times C^\infty(\Pi)$, $j \in \{0, 1\}$, задачи (5.10)–(5.12) так, чтобы для них выполнялись оценки

$$(5.26) \quad \|\tilde{v}_0 - v_0\|_{V^1(\Pi) \cap C^{2,\alpha}(\Pi)}^2 + \|\tilde{\theta}_0 - \theta_0\|_{C^{2,\alpha}(\Pi)}^2 < \delta^2,$$

$$(5.27) \quad \|\tilde{v}_1 - v_1\|_{V^1(\Pi) \cap C^{2,\alpha}(\Pi)}^2 + \|\tilde{\theta}_1 - \theta_1\|_{C^{2,\alpha}(\Pi)}^2 < (\varepsilon/2)^2,$$

где (v_0, θ_0) , (v_1, θ_1) соответственно начальные и конечные условия задачи (5.1)–(5.4).⁴ Из (5.22), (5.3), (5.20), (5.14) следуют начальные условия для (y, τ) :

$$(5.28) \quad y|_{t=0} = v_0 - \tilde{v}_0, \quad \tau|_{t=0} = \theta_0 - \tilde{\theta}_0.$$

Вследствие (5.22), (5.14), (5.21), (5.27) для доказательства (5.4) достаточно установить неравенство

$$(5.29) \quad \|y(T\delta, \cdot)\|_{V^1(\Pi)}^2 + \|\tau(T\delta, \cdot)\|_{H^1(\Pi)}^2 < (\varepsilon/2)^2.$$

⁴ Отметим, что $\tilde{v}_0$, $\tilde{\tau}_0$, определенные в (5.26), конечно, зависят от δ . Следовательно, функции z , r , построенные в теореме 5.1, также зависят от δ . Однако силу (5.16) нормы от z , r в пространстве $C^1(0, T; C^{2,\alpha}(\Pi))$ ограничены константой, не зависящей от δ . Это замечание используется ниже в оценках (5.30)–(5.38).

Покажем, что L_2 -нормы правых частей f_1, g_1 задачи (5.23), (5.24), (5.28) малы при малых δ . Действительно, в силу (5.25), (5.17), (5.16) с помощью очевидных оценок и замен переменных получим:

$$\begin{aligned}
 (5.30) \quad \|g_1\|_{L_2(Q_{T\delta})}^2 &\leq \int_0^{T\delta} \int_{\Pi} |g(t, x)|^2 dx dt + \delta \int_0^{T\delta} \left\| r\left(\frac{t}{\delta}, \cdot\right) \right\|_{H^2(\Pi)}^2 d\frac{t}{\delta} \\
 &\quad + c\delta \int_0^{T\delta} \left\| z\left(\frac{t}{\delta}, \cdot\right) \right\|_{V^1(\Pi)}^2 \left\| r\left(\frac{t}{\delta}, \cdot\right) \right\|_{H^2(\Pi)}^2 d\frac{t}{\delta} \\
 &\leq \int_0^{T\delta} \|g(t, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2 dt \\
 &\quad + c\delta \sum_{j=0}^1 (\|\tilde{v}_j\|_{V^2(\Pi)}^2 + \|\tilde{\theta}_j\|_{H^2(\Pi)}^2) \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Точно так же выводится неравенство:

$$\begin{aligned}
 (5.31) \quad \|f_1\|_{L_2(Q_{T\delta})}^2 &\leq \int_0^{T\delta} \|f(t, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2 dt \\
 &\quad + c\delta \sum_{j=0}^1 (\|\tilde{v}_j\|_{V^2(\Pi)}^2 + \|\tilde{\theta}_j\|_{H^2(\Pi)}^2) \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Так как правые части и начальные условия задачи (5.23), (5.24), (5.26) малы, для доказательства существования и единственности решения достаточно получить оценки решения линеаризованной системы

$$(5.32) \quad \partial_t y - \Delta y + (y, \nabla)(z_\delta + m_\delta) + (z_\delta + m_\delta, \nabla)y + \tau \vec{e} - \nabla q_2 = f_1, \quad \operatorname{div} y = 0,$$

$$(5.33) \quad \partial_t \tau - \Delta \tau + (m_\delta + z_\delta, \nabla \tau) + (y, \nabla r_\delta) = g_1.$$

Умножая первое из уравнений (5.32) на y скалярно в $V^0(\Pi)$, а (5.33) на τ скалярно в $L_2(\Pi)$, складывая полученные неравенства и рассуждая, как при выводе (2.13), получим:

$$\begin{aligned}
 (5.34) \quad &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|y(t, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(t, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2) + (\|\nabla y(t, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\nabla \tau(t, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2) \\
 &\leq (\|f_1(t, \cdot)\|_{(L_2(\Pi))^n}^2 + \|g_1(t, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2) + c(\|y(t, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(t, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2) \\
 &\quad \times (1 + \|z_\delta(t, \cdot)\|_{V_\infty^1(\Pi)} + \|r_\delta(t, \cdot)\|_{W_\infty^1(\Pi)} + \|m_\delta(t, \cdot)\|_{(C^1(\Pi))^n}).
 \end{aligned}$$

Обозначив

$$a(t) = 1 + \|z_\delta(t, \cdot)\|_{V^0(\Pi) \cap (C^{2,\alpha}(\Pi))^n} + \|r_\delta(t, \cdot)\|_{C^{2,\alpha}(\Pi)} + \|m_\delta(t, \cdot)\|_{(C^{2,\alpha}(\Pi))^n},$$

где $0 < \alpha < 1$, получим из (5.34) с помощью леммы Гронуола следующую оценку:

$$(5.35) \quad \begin{aligned} & \|y(t, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(t, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2 \\ & \leq c \left[e^{\int_0^t a(s) ds} (\|\tilde{v}_0 - v_0\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tilde{\theta}_0 - \theta_0\|_{H^0(\Pi)}^2) \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t e^{\int_0^s a(s_1) ds_1} (\|f_1(s, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^n + \|g_1(s, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2) ds \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \int_0^{T\delta} \|m_\delta(t, \cdot)\|_{(C^{2,\alpha}(\Pi))^n} dt &= \int_0^{T\delta} \left\| m\left(\frac{t}{\delta}, \cdot\right) \right\|_{(C^{2,\alpha}(\Pi))^n} d\frac{t}{\delta} \\ &= \int_0^T \|m(t, \cdot)\|_{(C^{2,\alpha}(\Pi))^n} dt. \end{aligned}$$

Аналогично получаем оценки

$$\begin{aligned} & \int_0^{T\delta} (\|r_\delta(t, \cdot)\|_{C^{2,\alpha}(\Pi)} + \|z_\delta(t, \cdot)\|_{(C^{2,\alpha}(\Pi))^n}) dt \\ & \leq \delta \int_0^T (\|r(t, \cdot)\|_{C^{2,\alpha}(\Pi)} + \|z(t, \cdot)\|_{(C^{2,\alpha}(\Pi))^n}) dt \\ & \leq c\delta \sum_{j=0}^1 (\|\tilde{v}_j\|_{(C^{2,\alpha}(\Pi))^n} + \|\tilde{\theta}_j\|_{C^{2,\alpha}(\Pi)}). \end{aligned}$$

Из этих оценок следует, что при любом $t \in (0, T\delta)$

$$(5.36) \quad \int_0^t a(s) ds \leq c \left(1 + \delta \sum_{j=0}^1 (\|\tilde{v}_j\|_{(C^{2,\alpha}(\Pi))^n} + \|\tilde{\theta}_j\|_{C^{2,\alpha}(\Pi)}) \right).$$

Из (5.34)–(5.36) вытекает энергетическое неравенство ($t \in (0, T\delta)$):

$$(5.37) \quad \begin{aligned} & \|y(t, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tau(t, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2 + \int_0^t (\|\nabla y(s, \cdot)\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\nabla \tau(s, \cdot)\|_{H^0(\Pi)}^2) ds \\ & \leq \gamma_K \left(\|\tilde{v}_0 - v_0\|_{V^0(\Pi)}^2 + \|\tilde{\theta}_0 - \theta_0\|_{H^0(\Pi)}^2 + \int_0^t (\|f_1(s, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2 + \|g_1(s, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2) ds \right), \end{aligned}$$

где функция γ_K монотонно и непрерывно зависит от K , а K – константа из (1.32). Применяя оператор ∇ к уравнениям (5.32), (5.33), умножая скалярно в L_2 первое из полученных уравнений на ∇y , а второе на $\nabla \tau$, рассуждая, как при выводе (5.34)–(5.37), и используя при этом (5.36), получим следующий аналог оценки (5.37):

$$(5.38) \quad \begin{aligned} & \|y(t, \cdot)\|_{V^1(\Pi)}^2 + \|\tau(t, \cdot)\|_{H^1(\Pi)}^2 + \int_0^t (\|y(s, \cdot)\|_{V^2(\Pi)}^2 + \|\tau(s, \cdot)\|_{H^2(\Pi)}^2) ds \\ & \leq \gamma_K \left(\|\tilde{v}_0 - v_0\|_{V^1(\Pi)}^2 + \|\tilde{\theta}_0 - \theta_0\|_{H^1(\Pi)}^2 + \int_0^t (\|f_1(s, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2 + \|g_1(s, \cdot)\|_{L_2(\Pi)}^2) ds \right). \end{aligned}$$

Из оценки (5.38) методом простой итерации выводится существование решения (y, τ) нелинейной задачи (5.23), (5.24), (5.28), причем это решение удовлетворяет оценке (5.38), в которой константа γ_K заменена на $2\gamma_K$. В силу (5.38), (5.26), (5.30), (5.31) можно выбрать столь малое δ , чтобы выполнялось неравенство (5.29). При этом мы положим $T_{\varepsilon, K} = T_\delta$.

§ 6. О точной управляемости одной линейной системы

Этот параграф посвящен доказательству леммы 5.1 и теоремы 5.1.

6.1. Доказательство леммы 5.1. Докажем сначала следующее утверждение.

ЛЕММА 6.1. *Для каждого $x_0 \in \Pi$ существует момент времени $T = T_{x_0}$ и векторное поле $m = m_{x_0}(t, x) \in (C^\infty((0, T_{x_0}) \times \Pi))^n$, удовлетворяющее условиям (5.5), (5.14), (5.15) с $x(t, x_0)$, определенным в (5.15').*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное и обозначим через M множество таких начальных условий x_0 , для которых векторных полей m_{x_0} с указанным выше свойством не существует. Так как в силу непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от начальных условий множество $\Pi \setminus M$ является открытым, то M – замкнутое множество. Пусть $x_0 \in M$ и $y_0 \in \overline{\omega}$ – такие точки, что

$$(6.1) \quad |x_0 - y_0| = \min_{x \in M, y \in \overline{\omega}} |x - y|.$$

Покажем, что при некотором $\xi \in C^\infty(\partial\omega)$, для которого $\int_{\partial\omega} \xi d\sigma = 0$, решение $q(x)$ краевой задачи Неймана

$$(6.2) \quad \Delta q(x) = 0, \quad x \in \Pi \setminus \omega; \quad \left. \frac{\partial q}{\partial n} \right|_{\partial\omega} = \xi$$

удовлетворяет условию

$$(6.3) \quad (\nabla q(x_0), y_0 - x_0) > 0,$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, x_0, y_0 – точки из (6.1). Допустим противное, т.е. что при любом $\xi \in C^\infty(\partial\omega)$, $\int_{\partial\omega} \xi ds = 0$, для решения q задачи (6.2) справедливо равенство:

$$(6.4) \quad (\nabla q(x_0), y_0 - x_0) = 0.$$

Рассмотрим краевую задачу Неймана

$$(6.5) \quad \Delta z(x) = (\nabla \delta(x - x_0), y_0 - x_0), \quad x \in \Pi \setminus \omega; \quad \left. \frac{\partial z(x)}{\partial n} \right|_{\partial\omega} = 0,$$

где $\delta(x - x_0)$ – δ -функция Дирака, сосредоточенная в точке x_0 . Необходимым условием разрешимости задачи (6.5) является равенство

$$(6.6) \quad \int_{\Pi \setminus \omega} (\nabla \delta(x - x_0), y_0 - x_0) \mathbf{1}(x) dx = 0,$$

где $\mathbf{1}(x)$ – функция, тождественно равная единице, а интеграл понимается как соотношение двойственности между обобщенной и пробной функциями. Равенство (6.6), очевидно, справедливо. Поэтому (см. [99; теорема 6.6]) существует решение $z(x)$ задачи (6.5), бесконечно дифференцируемое во всех точках $x \in \Pi \setminus \omega$ кроме $x = x_0$. Умножая первое из уравнений (6.5) скалярно в $L_2(\Pi \setminus \omega)$ на решение q задачи (6.2) и интегрируя по частям с учетом (6.2) и краевого условия из (6.5), получим равенства:

$$(6.7) \quad - \int_{\partial\omega} z(x) \xi(x) d\sigma = \int_{\Pi \setminus \omega} (\nabla \delta(x - x_0), y_0 - x_0) q(x) dx \\ = -(\nabla q(x_0), y_0 - x_0) = 0,$$

причем последнее равенство в (6.7) справедливо в силу (6.4). Так как в (6.7) $\xi(x)$ – произвольная гладкая функция с нулевым средним, то

$$z|_{\partial\omega} \equiv \text{const}.$$

Поскольку решение z задачи (6.5) определено с точностью до константы, можно считать, что

$$(6.8) \quad z|_{\partial\omega} = 0.$$

Из теоремы Хольмгрена о единственности решения задачи Коши для оператора Лапласа и соотношений (6.5), (6.8) следует, что $z(x) = 0$ для любого $x \in (\Pi \setminus \omega) \setminus x_0$, и, значит, $z(x)$ – обобщенная функция, сосредоточенная в точке x_0 . Поэтому

$$z(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} C_\alpha D^\alpha \delta(x - x_0).$$

Подставив это равенство в (6.5), получим:

$$\sum_{|\alpha| \leq N} C_\alpha D^\alpha \Delta \delta(x - x_0) = (\nabla \delta(x - x_0), y_0 - x_0).$$

Но это равенство не может выполняться ни при каких N и C_α , поскольку справа стоит сумма первых производных δ -функции, а слева – сумма производных порядка не меньше 2. Таким образом, доказано условие (6.3).

Пусть $q(x)$ – решение задачи (6.2), удовлетворяющее (6.3). Продолжим $\nabla q(x)$ с $\Pi \setminus \omega$ на Π до гладкого бездивергентного векторного поля, которое обозначим $r(x)$. Такое продолжение возможно (см. [40]), поскольку в силу (6.2)

$$\int_{\partial\omega} (\nu, \nabla q) d\sigma = \int_{\partial\omega} \xi d\sigma = 0.$$

Ясно, что решение $x(t)$ задачи

$$\frac{d}{dt} x(t) = r(x(t)), \quad x|_{t=0} = x_0$$

при всех $t \in (0, \varepsilon)$ и достаточно малом ε принадлежит $\Pi \setminus M$: $x(t) \in \Pi \setminus M$, $t \in (0, \varepsilon)$. Если взять

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\in C^\infty(0, \varepsilon), \quad 0 \leq \varphi(t) \leq 1, \\ \varphi(0) &= \varphi(\varepsilon) = \varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(\varepsilon) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

то для решения задачи

$$\frac{d}{dt}x(t) = \varphi(t)r(x(t)), \quad x|_{t=0} = x_0$$

также справедливо включение $x(\varepsilon) \in \Pi \setminus M$. Из определения множества $\Pi \setminus M$ следует существование $T_{x(\varepsilon)}$ и векторного поля $m_{x(\varepsilon)}(t, x) \in C^\infty$, удовлетворяющего условиям (5.5), (5.14) и соотношению (5.15), в котором x_0 заменено на $x(\varepsilon)$. Определим векторное поле $m_{x_0}(t, x)$ формулой

$$m_{x_0}(t, x) = \begin{cases} \varphi(t)r(x) & \text{при } t \in (0, \varepsilon), \\ m_{x(\varepsilon)}(t + \varepsilon, x) & \text{при } t \in (\varepsilon, T_{x(\varepsilon)} + \varepsilon). \end{cases}$$

Очевидно, справедливо соотношение (5.15), где $x(t, x_0)$ – решение задачи

$$\frac{d}{dt}x(t, x_0) = m_{x_0}(t, x(t, x_0)), \quad x|_{t=0} = x_0.$$

Но это противоречит включению $x_0 \in M$. Следовательно, $M = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.1. Пусть $x_0 \in \Pi$, T_{x_0} – момент времени, а $m = m_{x_0}(t, x)$ – векторное поле из формулировки леммы 6.1. В силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий у любой точки $x_0 \in \Pi$ существует окрестность $\mathcal{O}(x_0)$ такая, что для решения $x(t, z)$ задачи

$$\frac{d}{dt}x(t, z) = m_{x_0}(t, x(t, z)), \quad x(t, z)|_{t=0} = z, \quad z \in \overline{\mathcal{O}(x_0)},$$

выполнено соотношение $\{(t, x(t, z)), t \in (0, T_{x_0})\} \cap Q_{T_{x_0}}^\omega \neq \emptyset$, где $Q_{T_{x_0}}^\omega = (0, T_{x_0}) \times \omega$. При этом существует отрезок времени конечной длины, в течение которого все кривые $x(t, z)$, $z \in \mathcal{O}(x_0)$, одновременно находятся в области ω . Из покрытия $\{\mathcal{O}(x_0), x_0 \in \Pi\}$ выберем конечное подпокрытие $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_K$. Через T_i , $m_i(t, x)$ обозначим момент времени и векторное поле, удовлетворяющее утверждению леммы 6.1 с $x_0 = z \in \mathcal{O}_i$. По $m_i(t, x)$ построим векторное поле

$$(6.9) \quad \hat{m}_i(t, x) = \begin{cases} m_i(t, x) & \text{при } t \in (0, T_i), \\ -m_i(2T_i - t, x) & \text{при } t \in (T_i, 2T_i). \end{cases}$$

Это векторное поле, очевидно, обладает следующими свойствами: все решения $x(t, z)$, $z \in \mathcal{O}_i$, задачи Коши

$$(6.10) \quad \frac{d}{dt}x(t, z) = \hat{m}_i(t, x(t, z)), \quad x(t, z)|_{t=0} = z$$

находятся одновременно в течение отрезка времени Δ_i в области ω . При этом траектория $x(t, x_0)$, выходящая при $t = 0$ из любой точки $x_0 \in \Pi$, возвращается в момент времени $t = 2T_i$ в ту же точку x_0 . Поэтому если определить $T, m(t, x)$ по формулам

$$T = 2 \sum_{i=1}^K T_i,$$

$$m(t, x) = \left\{ \hat{m}_i \left(t - 2 \sum_{j=0}^{i-1} T_j, x \right) \text{ при } t \in \left(2 \sum_{j=0}^{i-1} T_j, 2 \sum_{j=0}^i T_j \right), i = 1, \dots, K \right\},$$

где $\hat{m}_i$ определены в (6.9) и $T_0 = 0$, то эта пара удовлетворяет всем утверждениям леммы 5.1.

6.2. Доказательство теоремы 5.1. Прежде чем изучать задачу точной управляемости (5.10)–(5.12), рассмотрим задачу

$$(6.11) \quad \partial_t y + (m, \nabla) y + (y, \nabla) m = u',$$

$$(6.12) \quad \partial_t r + (m, \nabla r) = u_{n+1},$$

$$(6.13) \quad y|_{t=0} = \tilde{v}_0, \quad r|_{t=0} = \tilde{\theta}_0,$$

$$(6.14) \quad y|_{t=T} = \tilde{v}_1, \quad r|_{t=T} = \tilde{\theta}_1,$$

выбросив в (5.10) неизвестную функцию ∇q и условие бездивергентности $\operatorname{div} z = 0$.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $(0, T)$ – временной отрезок и $m(t, x) \in (C^\infty(Q))^n$ – векторное поле, построенное в лемме 5.1. Тогда для любых $\tilde{v}_i \in (C^\infty(\Pi))^n$, $\tilde{\theta}_i \in C^\infty(\Pi)$ существует управление $u = (u', u_{n+1}) \in U(\omega; 0, T) \cap (C^\infty(Q))^{n+1}$ и пара $(y, r) \in (C^\infty(Q))^n \times C^\infty(Q)$, удовлетворяющие соотношениям (6.11)–(6.14). При этом для любого натурального p существует константа C_p , зависящая лишь от векторного поля $m(t, x)$ и его производных порядка не выше $p + 1$, такая, что

$$(6.15) \quad \|y\|_{C^1(0, T; (C^{p, \alpha}(\Pi))^n)}^2 + \|r\|_{C^1(0, T; C^{p, \alpha}(\Pi))}^2 + \|u\|_{U(\omega; 0, T) \cap C(0, T; (C^{p, \alpha}(\Pi))^{n+1})}^2 \\ \leq c_p \left(\sum_{j=0}^1 (\|\tilde{v}_j\|_{(C^{p, \alpha}(\Pi))^n}^2 + \|\tilde{\theta}_j\|_{C^{p, \alpha}(\Pi)}^2) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\mathcal{O}_i, i = 1, \dots, k\}$ – конечное покрытие тора Π из леммы 5.1, а $\{\varphi_i\}$ – соответствующее этому покрытию разбиение единицы.

Построим сначала решение задачи точной управляемости, заменив условия (6.13), (6.14) на следующие:

$$(6.16) \quad y|_{t=0} = \varphi_i \tilde{v}_0, \quad r|_{t=0} = \varphi_i \tilde{\theta}_0,$$

$$(6.17) \quad y|_{t=T} = \varphi_i \tilde{v}_1, \quad r|_{t=T} = \varphi_i \tilde{\theta}_1.$$

Будем решать систему

$$(6.18) \quad \partial_t \rho(t, x) + (m, \nabla) \rho + (\rho, \nabla) m = 0, \quad \partial_t \beta(t, x) + (m, \nabla) \beta = 0,$$

снабженную начальными условиями (6.16) с $y = \rho$, $r = \beta$, методом характеристик. Характеристиками системы (6.18) являются решения задачи Коши

$$(6.19) \quad \frac{d}{dt} x(t, z) = m(t, x(t, z)),$$

$$(6.20) \quad x(t, z)|_{t=0} = z,$$

когда z пробегает Π . Подставляя $x(t, z)$ вместо x в (6.18), получим задачу Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решая эту задачу Коши, будем иметь:

$$(6.21) \quad \tilde{\rho}_i(t, x(t, z)) = e^{\int_0^t M(\tau) d\tau} \varphi_i(z) \tilde{v}_0(z), \quad \tilde{\beta}_i(t, x(t, z)) \equiv \varphi_i(z) \tilde{\theta}_0(z),$$

где $M(t)$ – матрица, сопряженная к $\nabla_x m(t, x(t, z))$. Эти формулы, очевидно, однозначно определяют $\tilde{\rho}_i(t, x)$, $\tilde{\beta}_i(t, x)$.

Согласно лемме 5.1 существует интервал времени $\Delta_i = (\tau_{i,0}, \tau_{i,1})$ такой, что при любых $t \in \Delta$, $z \in \mathcal{O}_i$ справедливо включение $x(t, z) \in \omega$, где $x(t, z)$ – характеристики, определенные в (6.19), (6.20). Пусть

$$(6.22) \quad \tilde{\chi}_i(t) \in C^\infty(0, T), \quad \tilde{\chi}_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in (0, \tau_{i,0}), \\ 0 & \text{при } t \in \left(\frac{\tau_{i,0} + \tau_{i,1}}{2}, T\right). \end{cases}$$

Положим

$$(6.23) \quad \tilde{y}_i(t, x) = \tilde{\chi}_i(t) \tilde{\rho}(t, x), \quad \tilde{r}_i(t, x) = \tilde{\chi}_i(t) \tilde{\beta}(t, x).$$

В силу (6.21)–(6.23) $(\tilde{y}_i, \tilde{r}_i) \in (C^\infty(Q))^{n+1}$ и носители этих функций сосредоточены в криволинейной трубке, образованной характеристиками (6.19), (6.20), выходящими из множества $\mathcal{O}_i$. Определим $\hat{y}_i, \hat{r}_i$ аналогично, решая задачу (6.18), (6.17). При этом, очевидно, характеристики задаются уравнением (6.19) с начальным условием в момент времени T :

$$(6.24) \quad x(t, z)|_{t=T} = z.$$

Отметим, что в силу способа построения векторного поля $m(t, x)$, данного в лемме 5.1, множество характеристик, определенных соотношениями (6.19), (6.20) с $z \in \mathcal{O}_i$, совпадает с множеством характеристик (6.19), (6.24) с $z \in \mathcal{O}_i$.

Решая задачу Коши (6.18), (6.17) с $y = \alpha$, $r = \beta$ с помощью характеристик (6.19), (6.24) аналогично (6.21)–(6.23), получим:

$$(6.25) \quad \hat{\rho}_i(t, x(t, z)) = e^{-\int_t^T M(\tau) d\tau} \varphi_i(z) \tilde{v}_1(z), \quad \hat{\beta}_i(t, x(t, z)) = \varphi_i(z) \tilde{\theta}_1(z),$$

$$(6.26) \quad \hat{y}_i(t, x) = \hat{\chi}_i(t) \rho_i(t, x), \quad \hat{r}_i(t, x) = \hat{\chi}_i(t) \beta_i(t, x),$$

где

$$(6.27) \quad \widehat{\chi}_i(t) \in C^\infty(0, T), \quad \widehat{\chi}_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in (\tau_{i,1}, T), \\ 0 & \text{при } t \in \left(0, \frac{\tau_{i,0} + \tau_{i,1}}{2}\right). \end{cases}$$

Наконец, положим:

$$(6.28) \quad y(t, x) = \sum_{i=1}^K (\tilde{y}_i(t, x) + \widehat{y}_i(t, x)), \quad r(t, x) = \sum_{i=1}^K (\tilde{r}_i(t, x) + \widehat{r}_i(t, x)).$$

Очевидно, пара $(y(t, x), r(t, x)) \in (C^\infty(Q))^{n+1}$ удовлетворяет краевой задаче (6.11)–(6.14), причем

$$(6.29) \quad u'(t, x) = \sum_{i=1}^K \left(\frac{d\tilde{\chi}_i(t)}{dt} \tilde{\rho}_i(t, x) + \frac{d\widehat{\chi}_i(t)}{dt} \widehat{\alpha}_i(t, x) \right),$$

$$(6.30) \quad u_{n+1}(t, x) = \sum_{i=1}^K \left(\frac{d\tilde{\chi}_i(t)}{dt} \tilde{\beta}_i(t, x) + \frac{d\widehat{\chi}_i(t)}{dt} \widehat{\beta}_i(t, x) \right).$$

Из построения функций (6.29), (6.30) следует, что

$$\text{supp } u' \subset Q^\omega, \quad \text{supp } u_{n+1} \subset Q^\omega.$$

Кроме того, с помощью формул (6.21)–(6.23), (6.25)–(6.30) легко вывести оценку (6.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Пусть (y, r, u) – решение задачи (6.11)–(6.14), построенное в теореме 6.1. Для векторного поля y запишем разложение Вейля

$$(6.31) \quad y(t, x) = z(t, x) + \nabla p(t, x),$$

где $z(t, x)$ – соленоидальное векторное поле: $\text{div } z = 0$. Напомним, что построение разложения (6.31) сводится с помощью взятия дивергенции от обеих частей этого равенства к решению уравнения

$$(6.32) \quad \Delta p(t, x) = \text{div } y(t, x).$$

Подставляя (6.31) в (6.11), получим

$$(6.33) \quad \partial_t z + (m, \nabla)z + (z, \nabla)m + \nabla \partial_t p + (m, \nabla)\nabla p + (\nabla p, \nabla)m = u'.$$

Учитывая, что при $x \in \Pi \setminus \omega$, $m = \nabla \gamma$, будем иметь:

$$(m, \nabla)\nabla p + (\nabla p, \nabla)m = \sum_{i,k} (\partial_i \gamma \partial_i \partial_k p + \partial_i p \partial_i \partial_k \gamma) = \nabla(\nabla \gamma, \nabla p).$$

Следовательно, при $x \in \Pi \setminus \omega$

$$(6.34) \quad \nabla \partial_t p + (m, \nabla)\nabla p + (\nabla p, \nabla)m = \nabla(\partial_t p + (\nabla \gamma, \nabla p)) = \nabla q,$$

где $q = \partial_t p + (\nabla \gamma, \nabla p)$. Продолжая q с $\Pi \setminus \omega$ до гладкой функции $q(t, x)$, определенной на Π с помощью оператора продолжения Уитни, и подставляя q в (6.33), получим:

$$\partial_t z + (m, \nabla)z + (z, \nabla)m + \nabla q = u' + u''(t, x),$$

где $u''(t, x) \in C^\infty(Q)$, $\text{supp } u'' \subset Q^\omega$. Используя неравенство (6.15) и оценки Шаудера решения эллиптического уравнения (6.32) (см. [78]), легко вывести оценку (5.16).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Авдонин С. А., Иванов С. А. Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент. Киев: Уч.-метод. кабинет по высш. образов., 1989; Расшир. англ. перевод: Families of Exponentials. The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [2] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
- [3] Baiocchi C., Komornik V., Loretto P. Théorèmes du type Ingham et application à la théorie du contrôle // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1998. V. 326. P. 453–458.
- [4] Bardos C., Lebeau G., Rauch J. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary // SIAM J. Control Optim. 1992. V. 30. P. 1024–1065.
- [5] Bardos C., Masrour T. Mesures de défaut: Observation et contrôle de plaques // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1996. V. 323. P. 621–626.
- [6] Burns J. A., Kang S. A control problem for Burgers' equation with Bounded Input/Output // Nonlinear Dynamics. 1991. V. 2. P. 235–262.
- [7] Burns J. A., Kang S. A stabilization problem for Burgers' equation with unbounded control and observation // Internat. Ser. Numer. Math. 1991. V. 100. P. 51–72.
- [8] Burq N. Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel // Acta. Math. 1998. V. 180. P. 1–29.
- [9] Burq N., Gerard P. Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1997. V. 325. P. 749–752.
- [10] Chae D., Imanuvilov O. Yu., Kim S. M. Exact controllability for semilinear parabolic equations with Neumann boundary conditions // J. Dynamical and Control Systems. 1996. V. 2. № 4. P. 449–483.
- [11] Coron J.-M. Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1993. V. 317. P. 271–276.
- [12] Coron J.-M. On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids // J. Math. Pures Appl. 1996. V. 75. P. 155–188.
- [13] Coron J.-M. On the controllability of the 2-D incompressible Navier–Stokes equations with the Navier slip boundary conditions // ESAIM, Control Optim. Calc. Var. <http://www.emath.fr/cocv/>. 1996. V. 1. P. 35–75.
- [14] Coron J.-M., Fursikov A. V. Global exact controllability of the 2-D Navier–Stokes equations on manifold without boundary // Russian J. Math. Phys. 1996. V. 4. № 3. P. 1–20.
- [15] Diaz J. I. Sur la contrôlabilité approchée des inéquations variationnelles et d'autres problèmes paraboliques non linéaires // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1991. V. 312. P. 519–522.
- [16] Diaz J. I., Ramos A. M. Approximate controllability and obstruction phenomena for quasilinear diffusion equations // Preprint, 1997.
- [17] Diaz J. I., Fursikov A. V. Approximate controllability of the Stokes system on cylinders by external unidirectional forces // J. Math. Pures Appl. 1997. V. 76. P. 353–375.
- [18] Егоров Ю. В. Некоторые задачи теории оптимального управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 5. С. 887–904.
- [19] Fabre C. Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and non-linear control problems // ESAIM, Control Optim. Calc. Var. <http://www.emath.fr/cocv/> 1996. V. 1. P. 267–302.
- [20] Fabre C. Résultats d'unicité pour les équations de Stokes et applications au contrôle // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1996. V. 322. P. 1191–1196.
- [21] Fabre C., Lebeau G. Prolongement unique des solutions de l'équation de Stokes // Comm. Partial Differential Equations. 1996. V. 21. № 3–4. P. 573–596.
- [22] Fabre C., Puel J.-P., Zuazua E. Contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur semi-linéaire // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1992. V. 315. P. 807–812.
- [23] Fabre C., Puel J.-P., Zuazua E. Approximate controllability of the semilinear heat equation // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1995. V. 125. P. 31–61.

- [24] Fattorini H. Boundary control of temperature distributions in a parallelepipedon // SIAM J. Control Optim. 1975. V. 13. P. 1–13.
- [25] Fernandez-Cara E. Null controllability of the semilinear heat equation // ESAIM, Control Optim. Calc. Var. <http://www.emath.fr/cocv/> 1997. V. 2. P. 87–103.
- [26] Fernandez-Cara E. Null controllability for semilinear parabolic equations with critical growth of the nonlinearity // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1997. V. 324. P. 1371–1376.
- [27] Fernandez L. A., Zuazua E. Approximate controllability of semilinear heat equation involving gradient terms // J. Optim. Theory Appl. 1999.
- [28] Fursikov A. V. Exact boundary zero controllability of three dimensional Navier–Stokes equations // J. Dynam. Control Systems. 1995. V. 1. P. 325–350.
- [29] Fursikov A. V. Lagrange principle for problems of optimal control of ill-posed or singular distributed systems // J. Math. Pures Appl. 1992. V. 71. P. 139–194.
- [30] Фурсиков А. В. Оптимальное управление: Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.
- [31] Fursikov A. V. Controllability property for the Navier–Stokes equations // Internat. Ser. Numer. Math. 1999.
- [32] Фурсиков А. В., Эмануилов О. Ю. Об ε -управляемости задачи Стокса с распределенным управлением сосредоточенным на подобласти // УМН. 1992. Т. 47. № 1. С. 217–218.
- [33] Фурсиков А. В., Эмануилов О. Ю. Аппроксимативная управляемость системы Стокса // Вестник Рос. Унив. Дружбы Нар. Сер. матем. 1994. Т. 1. № 1. С. 89–108.
- [34] Fursikov A. V., Imanuvilov O. Yu. On approximate controllability of the Stokes system // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 1993. V. 2. № 2. P. 205–232.
- [35] Fursikov A. V., Imanuvilov O. Yu. On controllability of certain systems simulating a fluid flow // IMA Vol. Math. Appl. 1995. V. 68. P. 149–184.
- [36] Fursikov A. V., Imanuvilov O. Yu. On exact boundary zero-controllability of two-dimensional Navier–Stokes equations // Acta Appl. Math. 1994. V. 37. P. 67–76.
- [37] Fursikov A. V., Imanuvilov O. Yu. Local exact controllability of the Navier–Stokes equations // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1996. V. 323. P. 275–280.
- [38] Фурсиков А. В., Эмануилов О. Ю. Точная локальная управляемость двумерных уравнений Навье–Стокса // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 9. С. 102–138.
- [39] Фурсиков А. В., Эмануилов О. Ю. Локальная точная управляемость уравнений Буссинеска // Вестн. Рос. Унив. Дружбы Нар. Сер. матем. 1996. Т. 3. № 1. С. 177–194.
- [40] Fursikov A. V., Imanuvilov O. Yu. Local exact boundary controllability of the Boussinesque equations // SIAM J. Control Optim. 1998. V. 36. № 2. P. 391–421.
- [41] Fursikov A. V., Imanuvilov O. Yu. Controllability of evolution equations // Lecture Notes Ser. Seoul GARC 1996. V. 34. P. 1–163.
- [42] Fursikov A. V., Imanuvilov O. Yu. Local exact controllability of the Navier–Stokes system // Contem. Math. 1997. V. 209. P. 115–129.
- [43] Glass O. Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 3 // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1997. V. 325. P. 987–992.
- [44] Glowinski R., Lions J.-L. Exact and approximate controllability for distributed parameter systems. 1 // Acta Numer. / ed. A. Iserles. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. P. 269–378.
- [45] Glowinski R., Lions J.-L. Exact and approximate controllability for distributed parameter systems. 2 // Acta Numer. / ed. A. Iserles. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. P. 159–333.
- [46] Grisvard P. Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités // J. Math. Pures Appl. 1989. V. 68. P. 215–259.
- [47] Hansen S. W. Boundary control of a one-dimensional linear thermoelastic rod // SIAM J. Control Optim. 1994. V. 32. № 4. P. 1052–1074.
- [48] Hansen S. W., Zhang B. Yu. Boundary control of a linear thermoelastic beam // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 210. P. 182–205.
- [49] Hansen S. W., Zuazua E. Exact controllability and stabilization of a vibrating string with an interior point mass // SIAM J. Control Optim. 1995. V. 33. № 5. P. 1357–1391.

- [50] Heibig A., Moussaoui M. Exact controllability of the wave equation for domains with slits and for mixed boundary conditions // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 1996. V. 2. P. 367–386.
- [51] Ho L. F. Boundary observability of the wave equation // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I*. 1986. V. 302. P. 443–446.
- [52] Horn M., Lasiecka I. Nonlinear boundary stabilization of parallelly connected Kirchhoff plates // *Dynam. Control*. 1996. V. 6. P. 263–292.
- [53] Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы в частных производных. М.: Мир, 1965.
- [54] Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
- [55] Hormander L. On the uniqueness of the Cauchy problem under partial analyticity assumptions // *Geometrical Optics and Related Topics* / ed. F. Colombini and N. Lerner. V. 32, 1997. P. 179–220.
- [56] Horsin T. On the controllability of the Burger equation // *ESAIM, Control Optim. Calc. Var.* 1998. V. 3. P. 85–95.
- [57] Эмануилов О. Ю. Граничное управление полулинейными эволюционными уравнениями // *УМН*. 1989. Т. 44. №6. С. 183–184.
- [58] Эмануилов О. Ю. Точная управляемость гиперболических уравнений. Ч. 1, 2 // *Автоматика*. 1990. №3. С. 10–13; №4. С. 31–39.
- [59] Эмануилов О. Ю. Точная граничная управляемость параболического уравнения // *УМН*. 1993. Т. 48. №3. С. 211–212.
- [60] Эмануилов О. Ю. Точная управляемость полулинейного параболического уравнения // *Вестник Рос. Унив. Дружбы Нар. Сер. матем.* 1994. №1. С. 109–116.
- [61] Эмануилов О. Ю. Граничная управляемость параболических уравнений // *Матем. сб.* 1995. Т. 186. №6. С. 109–132.
- [62] Imanuvilov O. Yu. Local exact controllability for the 2-D Navier–Stokes equations with the Navier slip boundary conditions // *Lecture Notes in Phys.* 1997. V. 491. P. 148–168.
- [63] Imanuvilov O. Yu. On exact controllability for Navier–Stokes equations // *ESAIM, Control. Optim. Calc. Var.* 1998. V. 3. P. 97–131.
- [64] Imanuvilov O. Yu., Yamamoto M. On Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations // *UTMS* 98-46.
- [65] Исаков В. О единственности решения задачи Коши // *Докл. АН СССР*. 1980. Т. 255. №1. С. 18–21.
- [66] Isakov V. Inverse parabolic problems with the final overdetermination // *Comm. Pure Appl. Math.* 1991. V. 64. P. 185–209.
- [67] Isakov V. Carleman type estimates in an anisotropic case and applications // *J. Differential Equations*. 1993. V. 105. P. 217–239.
- [68] Isakov V. On uniqueness in a lateral Cauchy problem with multiple characteristics // *J. Differential Equations*. 1997. V. 134. P. 134–147.
- [69] Jerison D. Carleman inequalities for the Dirac and Laplace operators and unique continuation // *Adv. Math.* 1986. V. 62. P. 118–134.
- [70] Jerison D., Kenig C. Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrödinger operators // *Ann. of Math.* 1985. V. 12. P. 463–494.
- [71] Kazemi A., Klibanov M. Stability estimates for ill-posed Cauchy problems involving hyperbolic equations and inequalities // *Appl. Anal.* 1993. V. 50. P. 93–102.
- [72] Kim Y. M. Carleman inequalities for the Dirac operator and strong unique continuation // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1995. V. 123. №7. P. 2103–2112.
- [73] Kim Y. M. Strong unique continuation of the Schrödinger operator // *Bull. Korean Math. Soc.* 1994. V. 31. №1. P. 55–60.
- [74] Komornik V. Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method. Paris: Masson, 1994.

- [75] Komornik V. Rapid boundary stabilization of linear distributed systems // *SIAM J. Control Optim.* 1997. V. 35. P. 1591–1613.
- [76] Kurata K. On a backward estimate for solutions of parabolic differential equations and its applications to unique continuation // *Adv. Stud. Pure Math.* 1994. V. 23. P. 247–257.
- [77] Ладыженская О. А. Математическая теория вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
- [78] Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
- [79] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [80] Ландис Е. М., Олейник О. А. Обобщенная аналитичность и некоторые связанные с ней свойства решений эллиптических и параболических уравнений // *УМН.* 1974. Т. 29. №2. С. 195–212.
- [81] Lagnese J. Boundary stabilization of thin plates. Philadelphia: SIAM, 1989. (SIAM Stud. Appl. Math. V. 10.)
- [82] Lagnese J., Lions J.-L. Modeling, Analysis and control of thin plates. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [83] Lasiecka I., Triggiani R. Controllability of semilinear abstract systems with application to waves and plates boundary control problems // *Appl. Math. Optim.* 1991. V. 23. P. 109–154.
- [84] Lasiecka I., Triggiani R. Optimal regularity, exact controllability and uniform stabilization of Schrödinger equations with Dirichlet control // *Differential Integral Equations.* 1992. V. 5. №3. P. 521–535.
- [85] Lasiecka I., Triggiani R. Controllability of semilinear abstract systems with application to waves and plates boundary control problems // *Appl. Math. Optim.* 1991. V. 23. №3. P. 109–154.
- [86] Lasiecka I., Triggiani R. Carleman estimates and exact boundary controllability for a system of coupled, nonconservative second-order hyperbolic equations // *Lecture Notes in Pure Appl. Math.* 1997. V. 188. P. 215–243.
- [87] Lasiecka I., Triggiani R. Regularity of hyperbolic equations under $L_2(0, T; L_2(\Gamma))$ -Dirichlet boundary terms // *Appl. Math. Optim.* 1983. V. 10. P. 275–286.
- [88] Lasiecka I., Triggiani R., Valente V. Uniform stabilization of spherical shells by boundary dissipation // *Adv. Differential Equations.* 1996. V. 1. №4. P. 635–674.
- [89] Lasiecka I., Triggiani R., Yao P. E. Exact controllability for second-order hyperbolic equations with variable coefficient-principal part and first-order terms // *Nonlinear Anal.* 1997. V. 30. №1. P. 111–122.
- [90] Lebeau G. Contrôle de l'équation de Schrödinger // *J. Math. Pure Appl.* 1992. V. 7. P. 267–291.
- [91] Lebeau G., Robbiano L. Contrôle exact de l'équation de la chaleur // *Comm. Partial Differential Equations.* 1995. V. 20. №1–2. P. 336–356.
- [92] Lin F. H. A uniqueness theorem for parabolic equations // *Comm. Pure Appl. Math.* 1990. V. 43. P. 127–136.
- [93] Lions J.-L. Are there connections between turbulence and controllability? // *Lecture Notes in Control Inform. Sci.* 1990. V. 144.
- [94] Lions J.-L. Remarques sur la contrôlabilité approchée // *Control of Distributed Systems (Span.-Fr. Days, Malaga, Spain, 1990).* V. 3. Malaga: Univ. of Malaga, 1990. P. 77–87.
- [95] Lions J.-L. Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Paris: Gauthier-Villars, 1968.
- [96] Lions J.-L. Remarks on approximate controllability // *J. Anal. Math.* 1992. V. 59. P. 103–116.
- [97] Lions J.-L. Exact controllability, stabilizability, and perturbations for distributed systems // *SIAM Rev.* 1988. V. 30. P. 1–68.
- [98] Lions J.-L. Contrôlabilité exacte et stabilization de systèmes distribués. V. 1. Paris: Masson, 1988.

- [99] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
- [100] Lions J.-L., Zuazua E. A generic uniqueness result for the Stokes system and its control theoretical consequences // *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* 1996. V. 177. P. 221–235.
- [101] Lions J.-L., Zuazua E. Contrôlabilité exacte des approximations de Galerkin des équations de Navier–Stokes // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I.* 1997. V. 324. № 9. P. 1015–1221.
- [102] Littman W. Boundary control theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations with constant coefficients // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. IV.* 1978. V. 5. P. 567–580.
- [103] Littman W., Taylor S. Smoothing evolution equations and boundary control theory // *J. Anal. Math.* 1992. V. 59. P. 117–132.
- [104] Liu Bo. Exact controllability of a hybrid system, membrane with strings, on general polygon domains // *SIAM J. Control Optim.* 1995. (to appear).
- [105] López A., Zuazua E. Uniform null-controllability for the one-dimensional heat equation with rapidly oscillating coefficients // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I.* 1998. V. 326. P. 955–960.
- [106] Lu G. Unique continuation with weak type lower order terms: The variable coefficient case // *Publ. Mat.* 1995. V. 39. P. 187–200.
- [107] Poon Chi-Chen. Unique continuation for parabolic equations // *Comm. Partial Differential Equations.* 1996. V. 21. № 3–4. P. 521–539.
- [108] Puel J.-P., Tchuente M. Boundary stabilisation for the von Karman equations // *SIAM J. Control Optim.* 1995. V. 33. № 1. P. 255–273.
- [109] Robbiano L. Théorème d'unicité adapté au contrôle des solutions des problèmes hyperboliques // *Comm. Partial Differential Equations.* 1991. V. 16. P. 789–800.
- [110] Robbiano L., Zuazua E. Uniqueness in the Cauchy problem for operators with partially holomorphic coefficients // *Invent. Math.* 1998. V. 131. № 3. P. 493–540.
- [111] Rosier L. Exact boundary controllability for the Korteweg–de Vries equation on a bounded domain // *SIAM J. Control Optim. Calc. Var.* 2. 1997. P. 33–55.
- [112] Ruiz A. Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential // *J. Math. Pures Appl.* 1992. V. 71. P. 455–467.
- [113] Russel D. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions // *SIAM Rev.* 1978. V. 20. P. 639–739.
- [114] Russel D. A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations // *Stud. Appl. Math.* 1973. V. 52. P. 189–212.
- [115] Saut J.-C., Scheurer B. Unique continuation for some evolution equations // *J. Differential Equations.* 1987. V. 66. P. 118–139.
- [116] Seidman T. Two results on exact boundary controllability of parabolic equations // *Appl. Math. Optim.* 1984. V. 11. P. 145–152.
- [117] Слободетский Л. Н. Обобщенные пространства Соболева и их приложения к граничным задачам для уравнений с частными производными // *Научн. зап. Ленинград. пед. ин-та.* 1958. Т. 197. С. 54–112.
- [118] Sogge C. D. Unique continuation theorem for second order parabolic differential operators // *Ark. Mat.* 1990. V. 28. P. 159–182.
- [119] Sogge C. D. Oscillatory integrals, Carleman inequalities and unique continuation for second order elliptic operators // *J. Amer. Math. Soc.* 1989. V. 2. P. 491–516.
- [120] Tataru D. Boundary controllability for conservative PDE's // *Appl. Math. Optim.* 1995. V. 31. № 3. P. 257–296.
- [121] Tataru D. A priori estimates of Carleman's type in domains with boundary // *J. Math. Pures Appl.* 1994. V. 73. P. 355–387.
- [122] Tataru D. Carleman estimates and unique continuation for solutions to boundary value problems // *J. Math. Pures Appl.* 1996. V. 75. P. 367–408.
- [123] Tataru D. The X^s_θ spaces and unique continuation for solutions to the semilinear wave equation // *Comm. in Partial Differential Equations.* 1996. V. 21. № 5–6. P. 841–887.
- [124] Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. М.: Мир, 1981.

- [125] Triggiani R. Regularity theory, exact controllability, and optimal quadratic cost problem for spherical shells with physical boundary controls // Control Cybernet. 1996. V. 25. №3. P. 553–568.
- [126] Вишик М. И., Фурсиков А. В. Математические задачи статистической гидромеханики. М.: Наука, 1980.
- [127] Yung-Jen Lin Guo, Littman W. Null boundary controllability for semilinear heat equations // Appl. Math. Optim. 1995. V. 32. P. 281–316.
- [128] Zuazua E. Exact controllability for semilinear wave equations in one space dimension // Ann. Inst. H. Poincaré. 1993. V. 10. P. 109–129.
- [129] Zuazua E. Approximate controllability of the semilinear heat equation: boundary control. Intern. Conf. in honour of Prof. R. Glowinski. Computation Science for the 21st Century // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1997. V. 324. №9. P. 738–747.
- [130] Zuazua E. Controllability of the linear system of thermoelasticity // J. Math. Pures Appl. 1995. V. 74. P. 291–315.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

Iowa State University

E-mail: fursikov@dia101.msu.ru vika@iastate.edu

Поступила в редакцию

17.11.1998