Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Балащенко, Естественные редуцирующие киллинговы f -многообразия, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 3, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm155>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 16:30:55

ЕСТЕСТВЕННО РЕДУКТИВНЫЕ КИЛЛИНГОВЫ f -МНОГООБРАЗИЯ

В. В. Балащенко

Среди почти эрмитовых структур (g, J) на гладких многообразиях M одним из самых примечательных классов являются *приближенно келеровы структуры* (см., например, [1]). Определяющим условием для них является требование $\nabla_X(J)X = 0$, где ∇ – связность Леви-Чивита (псевдо-) римановой метрики g , X – произвольное гладкое векторное поле на M . Обобщением этого понятия на метрические f -структуры [2] классического типа ($f^3 + f = 0$) стали *киллинговы f -структуры*, определяемые условием $\nabla_X(f)X = 0$. Впервые такие структуры под другим названием были введены В. Ф. Кириченко в работе [3], а затем исследовались А. С. Грицансом (см. [4], [5]). Позднее автором заметки (см. [6]) был рассмотрен более общий класс – *приближенно келеровы f -структуры* (*nearly Kähler f -structures*): $\nabla_{fX}(f)fX = 0$. Заметим, что оба указанных обобщения входят в концепцию обобщенной эрмитовой геометрии и принадлежат широкому классу обобщенных G_1 -многообразий (см. [2]).

Замечательной особенностью в исследованиях приближенно келеровых структур стало наличие широкого класса инвариантных примеров, что позволило получить ряд глубоких геометрических результатов (см. [7]–[9]). Природа этих примеров связана с каноническими структурами на обобщенных симметрических пространствах. Оказалось [6], что эта связь допускает содержательное продолжение и позволяет предъявить большой класс инвариантных примеров приближенно келеровых f -структур. Что касается киллинговых f -структур, исследование которых интенсивно продолжается (см., например, [10]), то здесь нетривиальных инвариантных примеров до сих пор обнаружено не было.

В настоящей заметке анализируются возможности существования инвариантных киллинговых f -структур на естественно редуктивных однородных пространствах. В частности, получен ряд критериев киллинговости для канонических f -структур на однородных Φ -пространствах порядков 4 и 5.

Пусть $(G/H, g, f)$ – однородное пространство группы Ли G с инвариантной метрикой g и инвариантной метрической f -структурой. Для простоты будем обозначать одинаковыми символами как сами инвариантные структуры на G/H , так и их значения в точке $o = H$. Предположим, что G/H – редуктивное однородное пространство, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ – соответствующее редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Напомним, что $(G/H, g)$ называется *естественно редуктивным пространством*, если $g([X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z) = g(X, [Y, Z]_{\mathfrak{m}})$ для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$, где индекс $\mathfrak{m}$ обозначает проекцию на $\mathfrak{m}$ относительно редуктивного разложения. Задание на G/H инвариантной метрической f -структуры порождает ортогональное разложение $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, где подпространства $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ определяют соответственно первое и второе фундаментальные распределения для f .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(G/H, g, f)$ – естественно редуктивное киллингово f -многообразие. Тогда имеют место соотношения:

$$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{h}.$$

В частности, оба фундаментальных распределения киллинговой f -структуры определяют инвариантные вполне геодезические слоевые многообразия G/H .

С учетом результатов работы [4] отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ. На естественно редуктивном однородном пространстве $(G/H, g)$ не существует нетривиальных инвариантных киллинговых f -структур основного типа [4].

Отмеченный факт широко обобщает соответствующий результат А. С. Грицанса, полученный для римановых глобально симметрических пространств.

ТЕОРЕМА 2. Для естественно редуктивного киллингова f -многообразия $(G/H, g, f)$ тензор Нейенхейса N и композиционный тензор T [2] имеют вид: $N(X, Y) = [fX, fY]_{\mathfrak{m}} = 2T(X, Y)$, где $X, Y \in \mathfrak{m}$. В частности, критерием интегрируемости структуры f является условие $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{h}$.

Перейдем теперь к рассмотрению регулярных Φ -пространств, на которых имеется значительный запас канонических f -структур [11].

Пусть G/H – регулярное Φ -пространство, порождаемое автоморфизмом Φ связной группы Ли G , $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ – каноническое редуктивное разложение, соответствующее автоморфизму $\varphi = d\Phi_e$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т.е. $\mathfrak{m} = A_\varphi \mathfrak{g}$, $A_\varphi = \varphi - \text{id}$ [12]. Обозначим через θ ограничение φ на $\mathfrak{m}$. Напомним, что инвариантная аффинорная структура F на G/H называется *канонической* [11], если ее значение в точке o есть полином от θ : $F = F[\theta]$. В работе [11] получены, в частности, формулы для всех канонических структур типов J и f на однородных Φ -пространствах произвольного порядка n ($\Phi^n = \text{id}$), которые всегда регулярны (см. [12]). Например, на однородных Φ -пространствах порядка 3 имеется широко известная каноническая структура $J = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta - \theta^2)$, обеспечивающая основной класс примеров инвариантных приближенно келеровых структур (см. [8], [9]). Напомним также (см. [12]), что в случае полупростой группы Ли G любое регулярное Φ -пространство $(G/H, g)$ является естественно редуктивным, где метрика g порождена формой Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Перейдем теперь к рассмотрению канонических f -структур на однородных Φ -пространствах порядков 4 и 5.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(G/H, g, f)$ – естественно редуктивное Φ -пространство порядка 4, где $f = \frac{1}{2}(\theta - \theta^3)$ – каноническая метрическая f -структура. Структура f киллингова тогда и только тогда, когда G/H – локально симметрическое пространство (т.е. $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$), для которого $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] = 0$.

Пусть теперь G/H – однородное Φ -пространство порядка 5. Формулы для всех классических канонических структур на G/H получены в [11]. Не приводя их здесь, укажем строение интересующих нас канонических структур. Пусть $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ – разложение, определяемое канонической структурой почти произведения P . Тогда в терминах этого разложения канонические почти комплексные структуры и f -структуры имеют вид: $J_1 = (I, J)$, $J_2 = (I, -J)$, $f_1 = (I, 0)$, $f_2 = (0, J)$, где I и J – специальные операторы комплексных структур на $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ соответственно.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(G/H, g)$ – естественно редуктивное Φ -пространство порядка 5, f_1 и f_2 , J_1 и J_2 – канонические структуры на этом пространстве. Следующие условия эквивалентны: 1) f_1 – киллингова структура; 2) f_2 – киллингова структура; 3) J_1 и J_2 являются приближенно келеровыми структурами; 4) $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] = 0$; 5) G/H – локально симметрическое пространство: $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Эквивалентность двух последних условий теоремы 4 можно получить, детализируя общие результаты работы [13].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Канонические f -структуры на естественно редуктивных Φ -пространствах порядков 4 и 5 могут быть киллинговыми лишь на келеровых многообразиях G/H . Это свидетельствует о жесткости условия киллинговости для инвариантных f -структур.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Вопрос о существовании инвариантных киллинговых f -структур основного типа остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gray A. // J. Differential Geom. 1970. V. 4. № 3. P. 283–309. [2] Кириченко В. Ф. // Итоги науки и техн. Пробл. геом. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1986. С. 25–71. [3] Кириченко В. Ф. // Дифференциальная геометрия. Саратов, 1981. С. 43–49. [4] Грицанс А. С. // УМН. 1990. Т. 45. № 4. С. 149–150. [5] Грицанс А. С. // Изв. вузов. Матем. 1992. № 6. С. 49–57. [6] Balashchenko V. V. Riemannian geometry of canonical structures on regular Φ -spaces // Preprint № 174/1994. Ruhr-Universität Bochum, 1994. P. 1–19. [7] Wolf J., Gray A. // J. Differential Geom. 1968. V. 2. № 1–2. P. 77–159. [8] Gray A. // J. Differential Geom. 1972. V. 7. № 3–4. P. 343–369. [9] Кириченко В. Ф. // Матем. заметки. 1981. Т. 30. № 4. С. 569–582. [10] Кириченко В. Ф., Липагина Л. В. Постоянство типа коммутативно-киллинговых f -многообразий. М.: МПГУ, 1998; Деп. в ВИНТИ РАН. № 1564-B98. [11] Балашченко В. В., Степанов Н. А. // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 11. С. 3–34. [12] Степанов Н. А. // Изв. вузов. Матем. 1967. № 3. С. 88–95. [13] Чурбанов Ю. Д. // Изв. вузов. Матем. 1994. № 2. С. 84–86.